Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Седунова, Средние значения некоторых мультипликативных функций, *Матем. заметки*, 2015, том 97, выпуск 1, 115–128

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10571>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.87.193.239

26 апреля 2023 г., 13:26:40

Средние значения некоторых мультипликативных функций

А. А. Седунова

В работе получены асимптотические формулы для средних значений ряда арифметических функций $f = f(n)$ на “коротком” промежутке вида $x < n \leq x + h$, где длина h отличается от x степенным понижением: $h = x^{1-\delta}$, $0 < \delta < 1$.

Библиография: 10 названий.

DOI: 10.4213/mzm10571

Будем употреблять устоявшиеся обозначения; в частности, $s = \sigma + it$, $i^2 = -1$, $\sigma = \operatorname{Re} s$, $t = \operatorname{Im} s$; $\zeta(s)$ – дзета-функция Римана, χ_4 – неглавный характер по модулю 4, т.е.

$$\chi(n) = \begin{cases} 1, & \text{если } n \equiv 1 \pmod{4}, \\ -1, & \text{если } n \equiv 3 \pmod{4}, \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

$L(s, \chi_4)$ – отвечающая этому характеру L -функция Дирихле; (a, b) – наибольший общий делитель чисел a и b ; $\theta, \theta_1, \dots$ – комплексные числа, по абсолютной величине не превосходящие 1, и в разных выражениях, вообще говоря, разные.

В настоящей работе изучаются суммы вида

$$S(x, h; f) = \sum_{x < n \leq x+h} f(n), \quad (1)$$

где $1 \leq h \leq x$, $f(n)$ – некоторая мультипликативная функция. В качестве $f(n)$ мы рассматриваем функции

$$f_1(n) = \frac{1}{\tau_k(n)}, \quad f_2(n) = \frac{\sigma(n)}{\tau(n)}, \quad f_3(n) = \frac{1}{r(n)}, \quad (2)$$

где $\tau_k(n)$ – количество решений уравнения $x_1 \cdot x_2 \cdots x_k = n$ в натуральных числах $x_1, x_2, \dots, x_k$; $\tau_2(n) = \tau(n)$ – количество делителей n , $\sigma(n)$ – сумма делителей n , и, наконец, $r(n)$ – число решений уравнения $x^2 + y^2 = n$ в целых числах x и y (в случае, когда $r(n) = 0$, полагаем $f_3(n) = 0$).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№ 12-01-31165_мол_а).

Отличительной особенностью функций (2) является то, что функции комплексного переменного, которые получаются аналитическим продолжением рядов Дирихле

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_j(n)n^{-s}, \quad (3)$$

имеют на границе абсолютной сходимости (3) точки ветвления.

Это обстоятельство является причиной того, что асимптотические формулы для сумм (1) имеют гораздо более сложный вид чем, скажем, в случае, когда $f(n) = \tau(n), \sigma(n), r(n)$ и т.д. Например, в случае, когда $f(n) = \tau(n)$, классический результат Дирихле дает

$$\sum_{n \leq X} \tau(n) = X(\ln X + 2\gamma - 1) + O(\sqrt{X}), \quad (4)$$

где γ – постоянная Эйлера, в то время как

$$\sum_{n \leq X} \frac{1}{\tau(n)} = \frac{X}{(\ln x)^{1/2}} \left(A_0 + \frac{A_1}{\ln X} + \frac{A_2}{(\ln X)^2} + \dots \right), \quad (5)$$

где A_j – некоторые постоянные, причем

$$A_0 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \prod_p \sqrt{p(p-1)} \ln \frac{p}{p-1}.$$

Формула (5) впервые была опубликована Рамануджаном [1] в 1919 г. Полное ее обоснование было дано Вильсон в работе [2].

Ввиду того, что асимптотические формулы типа (4), (5) для сумм значений мультипликативных функций получаются стандартным применением метода комплексного интегрирования (формулы Перрона) и простейших теорем о границе нулей соответствующего ряда Дирихле, затруднительно указать какие-либо работы, посвященные непосредственно выводу таких формул. Исключением является статья Мукановой [3], в которой дается вывод асимптотики суммы значений $f(n) = f_1(n)$. Отметим, что данная асимптотика содержится в качестве вспомогательного результата в статье [4].

Полагая в (4) последовательно $X = x$, $X = x + h$ и вычитая почленно получившиеся формулы, приходим к следующему равенству для суммы значений $\tau(n)$ по промежутку $x < n \leq x + h$:

$$\sum_{x < n \leq x+h} \tau(n) = h(\ln x + 2\gamma) + O(\sqrt{x}).$$

Несложно видеть, что эта формула будет асимптотической уже при $h \gg \sqrt{x} (\ln x)^{-1}$.

В то же время такой прием, примененный к сумме (5), приводит к соответствующей асимптотике лишь при h , очень близких к x :

$$\frac{x}{\ln x} \ll h \ll x.$$

Целью настоящей работы является получение асимптотических формул для сумм $S_j(x, h) = S(x, h; f_j)$, $j = 1, 2, 3$, в случаях, когда длина h промежутка суммирования имеет вид x^α , где $0 < \alpha < 1$ – некоторая постоянная величина.

Основными результатами работы являются следующие утверждения.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $k \geq 2$ – фиксированное целое число, $x \geq x_0(k) > 0$, $\alpha_k = (287k + 64)/(492k + 64)$, $h = x^{\alpha_k} e^{(\ln x)^{0,1}}$. Тогда при любом фиксированном $N \geq 0$ имеет место равенство

$$\sum_{x < n \leq x+h} \frac{1}{\tau_k(n)} = \frac{h}{(\ln x)^{1-1/k}} \left(A_0 + \frac{A_1}{\ln x} + \frac{A_2}{(\ln x)^2} + \cdots + \frac{A_N}{(\ln x)^N} + \frac{\theta C_1}{(\ln x)^{N+1}} \right),$$

где

$$|\theta| \leq 1, \quad C_1 = C_1(k; N), \quad A_j = A_j(k), \quad A_0 = \left(\Gamma\left(\frac{1}{k}\right) \right)^{-1} \Pi_0(k),$$

$$\Pi_0(k) = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p} \right)^{1/k} \cdot \left(1 + \frac{1}{kp} + \frac{1 \cdot 2}{k \cdot (k+1)} \frac{1}{p^2} + \cdots \right).$$

В частности, при $k = 2$ имеем

$$\sum_{x < n \leq x+h} \frac{1}{\tau(n)} = \frac{h}{(\ln x)^{1/2}} \left(A_0 + \frac{A_1}{\ln x} + \frac{A_2}{(\ln x)^2} + \cdots + \frac{A_N}{(\ln x)^N} + \frac{\theta C_1}{(\ln x)^{N+1}} \right),$$

$$A_0 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \prod_p \sqrt{p \cdot (p-1)} \ln \frac{p}{p-1}, \quad h = x^{319/524} e^{(\ln x)^{0,1}}.$$

Ниже приведены приближенные значения A_0 для $2 \leq k \leq 20$.

k	$A_0(k)$	k	$A_0(k)$
2	0.54685596	12	0.08509329
3	0.35826739	13	0.07842606
4	0.26479654	14	0.07272702
5	0.20970166	15	0.06779967
6	0.17349745	16	0.06349728
7	0.14792124	17	0.05970809
8	0.12890238	18	0.05634549
9	0.11420968	19	0.05334130
10	0.10251963	20	0.05064114
11	0.09299805		

ТЕОРЕМА 2. Пусть $x \geq x_0 > 0$, $\alpha = \alpha_2 = 319/524$, $h = x^\alpha e^{(\ln x)^{0,1}}$. Тогда при любом фиксированном $N \geq 0$ имеет место равенство

$$\sum_{x < n \leq x+h} \frac{\sigma(n)}{\tau(n)} = \frac{hx}{(\ln x)^{1/2}} \left(A_0 + \frac{A_1}{\ln x} + \frac{A_2}{(\ln x)^2} + \cdots + \frac{A_N}{(\ln x)^N} + \frac{\theta C_2}{(\ln x)^{N+1}} \right),$$

где $|\theta| \leq 1$, $C_2 = C_2(N)$, а коэффициенты A_j зависят только от j .

ТЕОРЕМА 3. Пусть $x \geq x_0 > 0$, $\alpha = \alpha_2 = 319/524$, $h = x^\alpha e^{(\ln x)^{0,1}}$. Тогда при любом фиксированном $N \geq 0$ имеет место равенство

$$\sum_{x < n \leq x+h} \frac{1}{r(n)} = \frac{h}{(\ln x)^{3/4}} \left(A_0 + \frac{A_1}{\ln x} + \frac{A_2}{(\ln x)^2} + \cdots + \frac{A_N}{(\ln x)^N} + \frac{\theta C_3}{(\ln x)^{N+1}} \right),$$

где $|\theta| \leq 1$, $C_3 = C_3(N)$, а коэффициенты A_j зависят только от j .

Для доказательства теорем 1–3 потребуются следующие вспомогательные утверждения.

ЛЕММА 1 (Формула Перрона). Пусть ряд $f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$ сходится абсолютно при $\sigma > 1$, причем

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \cdot n^{-\sigma} = O((\sigma - 1)^{-\alpha})$$

при $\sigma \rightarrow 1 + 0$ и некотором $\alpha \geq 0$. Пусть также $|a_n| \leq A(n)$, где $A(x) > 0$ – неубывающая функция. Тогда при любых $l > 1$, $T \geq 2$ и любом полуцелом $x \geq 2$ имеет место формула

$$\sum_{n \leq x} a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{l-iT}^{l+iT} f(s) \frac{x^s}{s} ds + O\left(\frac{x^l}{T(l-1)^\alpha}\right) + O\left(\frac{x A(2x) \ln x}{T}\right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО см. в [5; с. 334–336].

ЛЕММА 2. Найдется абсолютная постоянная $a > 0$ такая, что при $t \geq t_0(a) > 0$ справедлива оценка

$$\left| \zeta\left(\frac{1}{2} + it\right) \right| \ll t^c (\ln t)^a, \quad c = \frac{32}{205}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО см. в работе Хаксли [6].

Оценка в лемме 2 также верна для функции $L(s, \chi_4)$, где χ_4 – неглавный характер по модулю 4.

ЛЕММА 3. Пусть $f(s)$ регулярна в полосе $\sigma_1 \leq \sigma \leq \sigma_2$ и при любом фиксированном $\varepsilon > 0$ удовлетворяет там условию $f(s) = O(e^{\varepsilon|t|})$. Если

$$f(\sigma_1 + it) = O(|t|^{\theta_1}), \quad f(\sigma_2 + it) = O(|t|^{\theta_2}),$$

то равномерно при $\sigma_1 \leq \sigma \leq \sigma_2$

$$f(\sigma + it) = O(|t|^{\Theta(\sigma)}),$$

где $\Theta(\sigma)$ – линейная функция от σ , причем

$$\Theta(\sigma_1) = \theta_1, \quad \Theta(\sigma_2) = \theta_2.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО см. [7; гл. VI].

ЛЕММА 4. *Найдется абсолютная постоянная $b > 0$ такая, что при $t \geq t_0(b) > 0$ справедлива оценка*

$$|\zeta(\sigma + it)| \ll t^{2c(1-\sigma)} (\ln t)^b,$$

где c – постоянная леммы 2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим функцию

$$\varphi(s) = \frac{(1-s)\zeta(s)}{(\ln(s+1))^m}, \quad m = [a] + 1,$$

которая аналитична в полосе $1/2 = \sigma_1 \leq \sigma \leq 1 = \sigma_2$ и удовлетворяет там неравенствам

$$\begin{aligned} \varphi\left(\frac{1}{2} + it\right) &\ll \left| t \cdot \zeta\left(\frac{1}{2} + it\right) \right| (\ln(|t| + 2))^{-m} \ll |t|^{1+c}, \\ \varphi(1 + it) &\ll |t \cdot \zeta(1 + it)| (\ln(|t| + 2))^{-m} \ll |t|. \end{aligned}$$

Применяя лемму 3, при $1 \leq \sigma \leq 1 + (\ln t)^{-1}$ получаем

$$|\varphi(\sigma + it)| \ll t^{\Theta(\sigma)},$$

где $\Theta(1/2) = 1 + c$, $\Theta(1) = 1$. Так как Θ – линейная функция, то заключаем, что

$$|\varphi(\sigma + it)| \ll t^{2c(1-\sigma)} \ln t.$$

ЛЕММА 5. *При $\operatorname{Re} s > 0$ имеет место равенство*

$$\zeta(s) = \frac{1}{2} + \frac{1}{s-1} + s \int_1^\infty \frac{\rho(u) du}{u^{s+1}},$$

где $\rho(x) = 1/2 - \{x\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО см. в [5; с. 24–25].

ЛЕММА 6. *При $T \geq T_0$ имеет место оценка*

$$\int_0^T \left| \zeta\left(\frac{1}{2} + it\right) \right|^2 dt \ll T \ln T.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Это есть следствие теоремы Харди и Литтлвуда (см., например, [8; с. 140–142]).

Пусть $N(\sigma, T)$ обозначает число нулей дзета-функции Римана, лежащих в прямоугольнике $\operatorname{Re} s \geq \sigma$, $|\operatorname{Im} s| \leq T$.

ЛЕММА 7. *При любом σ , $1/2 \leq \sigma \leq 1$ имеет место оценка*

$$N(\sigma, T) \ll T^{(12/5)(1-\sigma)} (\ln T)^{44}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО можно найти в работе Хаксли [9].

ЛЕММА 8. *Найдется абсолютная постоянная $C > 0$ такая, что в области вида*

$$t \geq 10, \quad \sigma \geq 1 - C(\ln \ln t)^{-1/3} (\ln t)^{-2/3} = 1 - \varrho(t),$$

функции $\zeta(s)$ и $L(s, \chi_4)$ не имеют нулей.

Доказательство этого утверждения для функции $\zeta(s)$ см. в [5; с. 116–117]. Доказательство для функции $L(s, \chi_4)$ проводится аналогично.

Доказательство теоремы 1. Пусть $\sigma = \operatorname{Re} s > 1$. Положим

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\tau_k(n)} \cdot n^{-s}.$$

Этот ряд сходится абсолютно, поскольку

$$|F(s)| \leq \frac{1}{k} \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\sigma} \leq \frac{1}{k} \left(1 + \int_1^{\infty} \frac{du}{u^{\sigma}} \right) = \frac{1}{k} \left(1 + \frac{1}{\sigma - 1} \right).$$

Полагая $a_n = 1/\tau_k(n)$, $A(n) \equiv 1$, $l = 1 + 1/\ln x$, $\alpha = 1$ в лемме 1, получим

$$S_1 = S(x, h; f_1) = I + O(R),$$

где

$$I = \frac{1}{2\pi i} \int_{l-iT}^{l+iT} F(s) \frac{(x+h)^s - x^s}{s} ds, \quad R = \frac{x^l}{T(l-1)} + \frac{x A(2x) \ln x}{T} \ll \frac{x \ln x}{T}.$$

Пусть, далее, $F(s) = \prod_p F_p(s)$, где

$$F_p(s) = 1 + \frac{1}{\tau_k(p)p^s} + \frac{1}{\tau_k(p^2)p^{2s}} + \dots = 1 + \frac{1!}{kp^s} + \frac{2!}{k(k+1)p^{2s}} + \dots.$$

Представим $F_p(s)$ в виде

$$F_p(s) = \left(1 - \frac{1}{p^s} \right)^{-1/k} \left(1 - \frac{1}{p^{2s}} \right)^{m_k} G_p(s), \quad m_k = \frac{(k-1)^2}{2k^2(k+1)}.$$

Тогда

$$F(s) = \frac{(\zeta(s))^{1/k}}{(\zeta(2s))^{m_k}} G(s),$$

где

$$\begin{aligned} G(s) &= \prod_p G_p(s) = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s} \right)^{1/k} \left(1 - \frac{1}{p^{2s}} \right)^{-m_k} (1 + u_p(s) + v_p(s)), \\ u_p(s) &= \frac{1}{kp^s} + \frac{2}{k(k+1)p^{2s}}, \\ v_p(s) &= \frac{3!}{k(k+1)(k+2)p^{3s}} + \frac{4!}{k(k+1)(k+2)(k+3)p^{4s}} + \dots \end{aligned}$$

Продолжим функцию $F(s)$ в область левее единичной прямой.

Пусть $1/2 \leq \sigma \leq 1$. Тогда имеют место оценки

$$\begin{aligned} |u_p(s)| &\leq \frac{1}{kp^{\sigma}} \left(1 + \frac{2}{k+1} \frac{1}{p^{\sigma}} \right) \leq \left(1 + \frac{2}{3\sqrt{2}} \right) \frac{1}{kp^{\sigma}} < \frac{3}{2} \frac{1}{kp^{\sigma}}, \\ |v_p(s)| &\leq \frac{1}{3kp^{\sigma}} \left(\frac{2 \cdot 3}{3 \cdot 4} + \frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{3 \cdot 4 \cdot 5} \frac{1}{p^{\sigma}} + \dots \right) \leq \frac{1}{2kp^{3\sigma}} \left(1 + \frac{1}{p^{\sigma}} + \dots \right) \leq \frac{7}{4} \frac{1}{kp^{\sigma}}, \end{aligned}$$

$$|u_p(s) + v_p(s)| \leq \frac{3}{2k} \frac{1}{kp^\sigma} + \frac{7}{4k} \frac{1}{p^{3\sigma}} < \frac{5}{2} \frac{1}{kp^\sigma},$$

$$|u_p(s) \cdot v_p(s)| \leq \frac{3}{2k} \frac{7}{4k} \frac{1}{p^{4\sigma}} = \frac{21}{8k^2} \frac{1}{p^{4\sigma}} \leq \frac{21}{16\sqrt{2}} \frac{1}{kp^{3\sigma}} < \frac{1}{kp^{3\sigma}}.$$

Рассмотрим выражение

$$\ln(1 + u_p(s) + v_p(s)) = (u_p + v_p) - \frac{1}{2}(u_p + v_p)^2 + \frac{1}{3}(u_p + v_p)^3 - \dots.$$

Прежде всего,

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{3}(u_p + v_p)^3 - \frac{1}{4}(u_p + v_p)^4 + \dots \right| &\leq \left(\frac{5}{2} \frac{1}{kp^\sigma} \right)^3 + \frac{1}{4} \left(\frac{5}{2} \frac{1}{kp^\sigma} \right)^4 + \dots \\ &\leq \frac{1}{3} \left(\frac{5}{2} \frac{1}{kp^\sigma} \right)^3 \frac{1}{1 - 5/(2kp^\sigma)} \\ &\leq \frac{1}{3} \left(\frac{5}{2} \right)^3 \frac{1}{2^2} \left(1 - \frac{5}{4\sqrt{2}} \right)^{-1} \frac{1}{kp^{3\sigma}} < \frac{45}{4} \frac{1}{kp^{3\sigma}}. \end{aligned}$$

Далее,

$$(u_p + v_p) - \frac{1}{2}(u_p + v_p)^2 = \left(u_p - \frac{u_p^2}{2} \right) + \left(v_p - \frac{v_p^2}{2} - u_p v_p \right). \quad (6)$$

Второе слагаемое в правой части (6) по модулю не превосходит

$$\frac{7}{4k} \frac{1}{p^{3\sigma}} + \frac{1}{2} \left(\frac{7}{4k} \right)^2 \frac{1}{p^{6\sigma}} + \frac{1}{kp^{3\sigma}} < \frac{3}{kp^{3\sigma}}.$$

Кроме того,

$$u_p - \frac{u_p^2}{2} = \frac{1}{kp^s} + \frac{2}{k(k+1)} \frac{1}{p^{2s}} - \frac{1}{2k^2 p^{2s}} + \frac{3\theta}{4} \frac{1}{kp^{3\sigma}} = \frac{1}{kp^s} + \frac{3k-1}{2k^2(k+1)} \frac{1}{p^{2s}} + \frac{3\theta}{4} \frac{1}{kp^{3\sigma}}.$$

Значит,

$$\ln(1 + u_p(s) + v_p(s)) = \frac{1}{kp^s} + \frac{3k-1}{2k^2(k+1)} \frac{1}{p^{2s}} + \frac{15\theta_1}{kp^{3\sigma}}.$$

Имеем

$$\begin{aligned} \ln\left(1 - \frac{1}{p^s}\right) &= -\frac{1}{p^s} - \frac{1}{2p^{2s}} - \dots = -\frac{1}{p^s} - \frac{1}{2p^{2s}} + \frac{7\theta_2}{6} \frac{1}{p^{3\sigma}}, \\ \ln\left(1 - \frac{1}{2p^{2s}}\right) &= -\frac{1}{p^{2s}} - \dots = -\frac{1}{p^{2s}} + \frac{5\theta_3}{4} \frac{1}{p^{3\sigma}}. \end{aligned}$$

Тогда выражение $\ln G_p(s)$ принимает вид

$$\begin{aligned} \ln G_p(s) &= \ln(1 + u_p(s) + v_p(s)) + \frac{1}{k} \ln\left(1 - \frac{1}{p^s}\right) - m_k \ln\left(1 - \frac{1}{p^{2s}}\right) \\ &= \frac{1}{kp^s} + \frac{3k-1}{2k^2(k+1)} \frac{1}{p^{2s}} + \frac{3\theta_1}{4} \frac{19}{kp^{3\sigma}} - \frac{1}{kp^s} - \frac{1}{2kp^{2s}} + \frac{7\theta_2}{6} \frac{1}{kp^{3\sigma}} + \frac{m_k}{p^{2s}} + \frac{5\theta_3}{4} \frac{m_k}{p^{3\sigma}} \\ &= \frac{16\theta}{p^{3\sigma}}. \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned}
 |j_1| &= \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{l+iT}^{1/2+iT} F(s) \frac{(x+h)^s - x^s}{s} ds \right| \\
 &\ll \frac{1}{T} \int_{1/2}^l T^{(2c)/k(1-\sigma)} \cdot (\ln x)^{0.6(b+1)} x^\sigma d\sigma \\
 &= \frac{x}{T} \int_{1/2}^l \frac{x^{\sigma-1}}{T^{(2c)/k(\sigma-1)}} (\ln x)^{0.6(b+1)} d\sigma = \frac{x}{T} \int_{1/2}^l \left(\frac{x}{T^{(2c)/k}} \right)^{\sigma-1} (\ln x)^{0.6(b+1)} d\sigma \\
 &\ll \frac{x}{T} (\ln x)^{0.6(b+1)}.
 \end{aligned}$$

Аналогичная оценка верна и для j_8 .

Перейдем к интегралам j_3 и j_6 .

Рис. 2

Согласно лемме 5 на дугах Γ_1 , Γ_2 имеем оценки

$$\begin{aligned}
 |\zeta(s)| &= \left| 0.5 + \frac{1}{s-1} + s \int_1^\infty \frac{\rho(u)}{u^{s+1}} du \right| \leq 0.5 + 2 + 0.1 + 0.6 \cdot 0.5 \int_1^\infty \frac{du}{u^{3/2}} \leq 3.2, \\
 |\zeta(2s)| &\geq \frac{1}{|2s-1|} - 1.1 \geq 0.5 \ln x - 1.1 > 0.4 \ln x.
 \end{aligned}$$

Тогда функция $F(s)$ по абсолютной величине не превзойдет

$$|G(s)| \frac{3.2^{1/k}}{(0.4 \cdot \ln x)^{m_k}} < 10.$$

Так для интегралов j_3 и j_6 получаем следующую оценку:

$$|j_3 + j_6| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2} |F(s)| \left| \frac{(x+h)^s - x^s}{s} \right| ds \leq \frac{10}{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{2 \cdot (2x)^{1/2+1/\ln x}}{1/2} \cdot \frac{d\varphi}{\ln x} \ll \frac{\sqrt{x}}{\ln x}.$$

Так как

$$|F(s)| \leq |\zeta(s)|^{1/k} (\ln x)^{m_k} |G(s)| \ll (\ln x)^{m_k} |\zeta(\sigma + it)|^{1/k},$$

то

$$|j_2| = \left| v.p. \frac{1}{2\pi i} \int_{1/2+iT}^{1/2+i/\ln x} F(s) \cdot \frac{(x+h)^s - x^s}{s} ds \right|$$

$$\begin{aligned}
&\ll \int_{1/\ln x}^T (\ln x)^{m_k} \cdot \left| \zeta\left(\frac{1}{2} + it\right) \right|^{1/k} \sqrt{x} \frac{dt}{t+1} \ll (\ln x)^{m_k} \sqrt{x} \int_0^T \left| \zeta\left(\frac{1}{2} + it\right) \right|^{1/k} \frac{dt}{t+1} \\
&= (\ln x)^{m_k} \sqrt{x} \sum_{\nu \geq 0} \int_{T/2^\nu}^{T/2^{\nu+1}} \frac{|\zeta(1/2 + it)|^{1/k}}{t+1} dt.
\end{aligned}$$

Обозначив слагаемые в последней сумме через j_ν и положив $X = T \cdot 2^{-\nu}$, согласно неравенству Гёльдера и оценке леммы 6 получим

$$\begin{aligned}
j_\nu &\ll \frac{1}{X} \left(\int_X^{2X} \left| \zeta\left(\frac{1}{2} + it\right) \right|^2 dt \right)^{1/(2k)} X^{1-1/(2k)} \\
&\ll \frac{1}{X} (X \ln X)^{1/(2k)} X^{1-1/(2k)} \ll (\ln X)^{1/(2k)} \ll (\ln T)^{1/(2k)}.
\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\sum_{\nu \geq 0} j_\nu \ll (\ln T)^{1+1/(2k)} \ll (\ln T)^{5/4}.$$

Тогда верхняя граница для j_2 имеет вид

$$|j_2| \ll (\ln x)^{m_k} \sqrt{x} (\ln x)^{5/4} = \sqrt{x} (\ln x)^{m_k+5/4}.$$

Интеграл j_7 оценивается аналогично.

Перейдем к вычислению главного члена, т.е. к j_4 и j_5 . Для этого изучим поведение функции $F(s)$ вблизи точки $s = 1$. Представим дзета-функцию в виде

$$\zeta(s) = \frac{w(s)}{s-1},$$

где $w(s)$ – целая функция. Пусть $s = 1 - u + i \cdot 0$, где $0 \leq u \leq 1/2$. Тогда

$$\sqrt[k]{\zeta(s)} = \frac{\sqrt[k]{w(s)}}{\sqrt[k]{-u + i \cdot 0}}.$$

Следовательно,

$$\sqrt[k]{-u + i \cdot 0} = \sqrt[k]{u} e^{(\pi i)/k}, \quad \sqrt[k]{\zeta(s)} = \frac{\sqrt[k]{w(s)}}{\sqrt[k]{u}} e^{-(\pi i)/k}.$$

На верхнем крае разреза выполнено равенство

$$F(s) = \frac{\sqrt[k]{w(1-u)}}{(\zeta(2-2u))^{m_k}} G(1-u) \frac{e^{-(\pi i)/k}}{\sqrt[k]{u}} = \frac{\Pi(u) e^{-(\pi i)/k}}{\sqrt[k]{u}},$$

где

$$\Pi(u) = G(1-u) \frac{\sqrt[k]{w(1-u)}}{(\zeta(2-2u))^{m_k}}.$$

Тогда для j_4 получаем

$$j_4 = \frac{1}{2\pi i} \int_{1/2+1/\ln x+i \cdot 0}^{1+i \cdot 0} F(\sigma + i \cdot 0) \frac{(x+h)^s - x^s}{s} ds$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{1/2+1/\ln x+i\cdot 0}^{1+i\cdot 0} F(\sigma+i\cdot 0) \int_0^h (x+u)^{s-1} du ds \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_x^{x+h} \int_{1/2+1/\ln x}^1 F(\sigma+i\cdot 0) y^{\sigma-1} d\sigma dy \\
&= \frac{e^{-(\pi i)/k}}{2\pi i} \int_x^{x+h} \int_0^{1/2-1/\ln x} \frac{\Pi(u)y^{-u}}{\sqrt[k]{u}} du dy.
\end{aligned}$$

При любом фиксированном $N \geq 0$ для функции $\Pi(u)$ имеет место разложение в ряд по степеням u :

$$\Pi(u) = \Pi_0 + \Pi_1 u + \Pi_2 u^2 + \dots + \Pi_N u^N + O_N(u^{N+1}).$$

В частности,

$$\begin{aligned}
\Pi_0 = \Pi(0) &= \frac{\sqrt[k]{w(1)}}{(\zeta(2))^{m_k}} G(1) = \frac{\prod_p (1-1/p)^{1/k} (1-1/p^2)^{m_k} (1+1/kp + \dots)}{(\zeta(2))^{m_k}} \\
&= \prod_p \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{1/k} \left(1 + \frac{1}{kp} + \dots\right).
\end{aligned}$$

Тогда

$$j_4 = \frac{e^{-(\pi i)/k}}{2\pi i} \int_x^{x+h} \left(\sum_{0 \leq n \leq N} \Pi_n \int_0^{1/2-1/\ln x} \frac{u^n y^{-u}}{\sqrt[k]{u}} du + O(J) \right) dy,$$

где

$$J = \int_0^{1/2-1/\ln x} \frac{u^{N+1} y^{-u}}{\sqrt[k]{u}} du \leq \frac{\Gamma(N+2-1/k)}{(\ln y)^{N+2-1/k}}.$$

Так как при любых $\lambda, k, \gamma, \lambda > 1, 0 < \gamma < 1, k \geq 1$ имеет место оценка

$$\int_\lambda^\infty w^{k-\gamma} e^{-w} dw < ek! \lambda^{k-\gamma} e^{-\lambda},$$

то вклад в сумму от n -ого слагаемого составляет

$$\begin{aligned}
\int_0^{1/2-1/\ln x} \frac{u^n y^{-u}}{\sqrt[k]{u}} du &= \frac{1}{(\ln y)^{n+1-1/k}} \int_0^{\ln y(1/2-1/\ln x)} e^{-w} w^{n-1/k} dw \\
&= \frac{1}{(\ln y)^{n+1-1/k}} \left(\int_0^\infty e^{-w} w^{n-1/k} dw + \frac{\theta en! (\ln y)^{n-1/k}}{\sqrt{y}} \right) \\
&= \frac{\Gamma(n+1-1/k)}{(\ln y)^{n+1-1/k}} + \frac{\theta en!}{\sqrt{y} \ln y}.
\end{aligned}$$

Суммируя, в конечном итоге найдем

$$j_4 = \frac{e^{-(\pi i)/k}}{2\pi i} \int_0^h \sum_{0 \leq n \leq N} \frac{\Pi_n \Gamma(n+1-1/k)}{(\ln(x+u))^{n+1-1/k}} du + O\left(\frac{h}{(\ln x)^{N+2-1/k}}\right).$$

Если

$$\varphi(x) = \frac{1}{(\ln x)^{n+1-1/k}},$$

то, применяя теорему Лагранжа, получаем

$$\varphi(x+u) = \varphi(x) + u\varphi'(x + \theta_1 u) = \frac{1}{(\ln x)^{n+1-1/k}} + \frac{\theta_2 h(n+1-1/k)}{x(\ln x)^{n+2-1/k}}.$$

Интегрируя по $0 \leq u \leq h$ и проводя аналогичные рассуждения для интеграла j_5 , найдем

$$j_4 = \frac{he^{-(\pi i)/k}}{2\pi i} \sum_{0 \leq n \leq N} \frac{\Pi_n \Gamma(n+1-1/k)}{(\ln x)^{n+1-1/k}} + O\left(\frac{h}{(\ln x)^{N+2-1/k}}\right) + O\left(\frac{h^2}{x} \frac{1}{(\ln x)^{N+2-1/k}}\right),$$

$$j_5 = -\frac{he^{(\pi i)/k}}{2\pi i} \sum_{0 \leq n \leq N} \frac{\Pi_n \Gamma(n+1-1/k)}{(\ln x)^{n+1-1/k}} + O\left(\frac{h}{(\ln x)^{N+2-1/k}}\right) + O\left(\frac{h^2}{x} \frac{1}{(\ln x)^{N+2-1/k}}\right).$$

В силу формулы дополнения для гамма-функции получаем

$$j_4 + j_5 = \frac{h}{(\ln x)^{1-1/k}} \left(\sum_{0 \leq n \leq N} \frac{(-1)^n \Pi_n}{\Gamma(1/k - n)(\ln x)^n} + O\left(\frac{1}{(\ln x)^{N+1}}\right) + O\left(\frac{h}{x(\ln x)^{N+1}}\right) \right).$$

Осталось оценить сумму

$$\sum_{|\gamma| < T} j_\rho, \quad \rho = \beta + i\gamma, \quad j_\rho = I_1(\rho) + I_2(\rho).$$

Рис. 3

Имеем

$$\left| \frac{(x+h)^s - x^s}{s} \right| = \left| \int_0^h (x+u)^{s-1} du \right| \ll \int_0^h (x+u)^{\sigma-1} du \ll hx^{\sigma-1}.$$

Тогда I_1 не превзойдет

$$I_1(\rho) \ll \int_{1/2}^{\beta} (\ln x)^{m_k} |\zeta(\sigma + i\gamma)|^{1/k} h x^{\sigma-1} d\sigma \ll \frac{h}{x} (\ln x)^{m_k} \int_{1/2}^{\beta} x^{\sigma} |\zeta(\sigma + i\gamma)|^{1/k} d\sigma.$$

Значит,

$$|j_\rho| \ll \int_{1/2}^{\beta} h x^{\sigma-1} (\ln x)^{m_k} T^{(2c)/k(1-\sigma)} (\ln x)^{b/k} d\sigma \ll h (\ln x)^{m_k+b/k} \int_{1/2}^{\beta} \left(\frac{T^{(2c)/k}}{x} \right)^{1-\sigma} d\sigma$$

$$\ll h (\ln x)^{m_k+b/k} \int_{1/2}^1 g(\rho, \sigma) \left(\frac{T^{(2c)/k}}{x} \right)^{1-\sigma} d\sigma,$$

где

$$g(\rho, \sigma) = \begin{cases} 1, & \sigma \leq \beta, \\ 0, & \sigma > \beta. \end{cases}$$

Применяя лемму 7, получаем

$$\begin{aligned} \sum_{|\gamma| < T} j_\rho &\ll h(\ln x)^{m_k+b/k} \int_{1/2}^{1-\varrho(T)} \left(\sum_{|\gamma| < T} g(\rho; \gamma) \right) \left(\frac{T^{(2c)/k}}{x} \right)^{1-\sigma} d\sigma \\ &\ll h(\ln x)^{m_k+b/k} \int_{1/2}^{1-\varrho(T)} N(\sigma; T) \left(\frac{T^{(2c)/k}}{x} \right)^{1-\sigma} d\sigma \\ &\ll h(\ln x)^{m_k+44+b/k} \int_{1/2}^{1-\varrho(T)} \left(\frac{T^{(2c)/k}}{x} \right)^{1-\sigma} T^{12/5(1-\sigma)} d\sigma \\ &\ll h(\ln x)^{45+b/2} \int_{1/2}^{1-\varrho(T)} \left(\frac{T^{12/5+(2c)/k}}{x} \right)^{1-\sigma} d\sigma \\ &\ll h(\ln x)^{45+b/2} \left(\frac{T^{12/5+(2c)/k}}{x} \right)^{1-\varrho(T)}. \end{aligned}$$

Выберем T из соотношения

$$T^{12/5+(2c)/k} = xD^{-1}(x), \quad D(x) = e^{C_1(\ln x)^{0.8}}.$$

Тогда

$$T = x^{((2c)/k+12/5)^{-1}} D(x)^{-((2c)/k+12/5)^{-1}}.$$

Несложно заметить, что формула

$$j_0 = \frac{h}{(\ln x)^{1-1/k}} \left(\sum_{0 \leq n \leq N} \frac{(-1)^n \Pi_n}{\Gamma(1/k - n)(\ln x)^n} \right) + O(J),$$

где

$$\begin{aligned} J &= \frac{x}{T} (\ln x)^{0.6(b+1)} + \frac{\sqrt{x}}{\ln x} + \sqrt{x} (\ln x)^{m_k+5/4} \\ &\quad + \frac{h}{(\ln x)^{N+2-1/k}} + \frac{h^2}{x(\ln x)^{N+2-1/k}} + h(\ln x)^{45+b/2} \left(\frac{x^{(2c)/k}}{D^{1+(2c)/k}} \right)^{1-\varrho(T)} \\ &\ll \frac{x}{T} (\ln T)^{17/20+(3/5)b} + \frac{h}{(\ln x)^{N+2-1/k}} + \frac{h^2}{x(\ln x)^{N+2-1/k}} \\ &\quad + h(\ln x)^{45+b/2} \left(\frac{x^{(2c)/k}}{D^{1+(2c)/k}} \right)^{1-\varrho(T)} \end{aligned}$$

будет асимптотической, если

$$h \gg \frac{x}{T} (\ln x)^2 = x^{\alpha_k} e^{C_2(\ln x)^{0.8}},$$

где

$$\alpha_k = 1 - \left(\frac{64}{205k} + \frac{12}{5} \right)^{-1} = \frac{287k+64}{492k+64}.$$

Доказательства теорем 2 и 3 проводятся аналогично. В случае $f(n) = f_3(n)$ выражение для производящей функции $F(s)$ будет содержать, помимо $\zeta(s)$, и функцию $L(s, \chi_4)$:

$$F(s) = (\zeta(s)L(s, \chi_4))^{1/4}(\zeta(2s))^{17/48}(L(2s, \chi_4))^{-19/48}H(s),$$

где

$$H(s) = \left(1 - \frac{1}{2^s}\right)^{-3/4} \left(1 - \frac{1}{2^{2s}}\right)^{17/48} \prod_{p \equiv 3 \pmod{4}} \left(1 - \frac{1}{p^{4s}}\right)^{-19/48} G(s),$$

$$G(s) = \prod_{p \equiv 1 \pmod{4}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{1/2} \left(1 - \frac{1}{p^{2s}}\right)^{-1/24} \left(1 + \frac{1}{2p^s} + \frac{1}{3p^{2s}} + \dots\right).$$

Поэтому при выводе формулы теоремы 3 необходимо в соответствующих местах использовать оценку $L(s, \chi_4)$ на критической прямой, которая получается применением методов работы Хаксли [6], плотностную теорему для нулей $L(s, \chi_4)$ (см. [10]), а также границу нулей для $L(s, \chi_4)$ виноградовского типа.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] S. Ramanujan, "Some formulae in the analytic theory of numbers", *Mess. Math.*, **45** (1916), 81–84.
- [2] B. M. Wilson, "Proofs of some formulae enunciated by Ramanujan", *Proc. London Math. Soc.* (2), **21** (1922), 235–255.
- [3] А. Е. Муканова, "Асимптотическая формула для среднего значения функции В. И. Арнольда", *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 2008, № 2, 51–53.
- [4] P. T. Bateman, P. Erdős, C. Pomerance, E. G. Straus, "The arithmetic mean of the divisors of an integer", *Analytic Number Theory*, Lecture Notes in Math., **899**, Springer, New York, 1981, 197–220.
- [5] С. М. Воронин, А. А. Карацуба, *Дзета-функция Римана*, Физматлит, М., 1994.
- [6] M. N. Huxley, "Exponential sums and the Riemann Zeta Function V", *Proc. London Math. Soc.* (3), **90** (2005), 1–41.
- [7] Е. Титчмарш, *Теория функций*, Наука, М., 1980.
- [8] Е. К. Титчмарш, *Теория дзета-функции Римана*, ИЛ, М., 1953.
- [9] M. N. Huxley, "On the difference between consecutive primes", *Invent. Math.*, **15**:2 (1972), 164–170.
- [10] K. Ramachandra, "On the number of Goldbach numbers in small intervals", *J. Indian Math. Soc. (N.S.)*, **37** (1973), 157–170.

А. А. Седунова

Московский физико-технический институт
(государственный университет),
г. Долгопрудный Московской обл.
E-mail: alisa.sedunova@phystech.edu

Поступило

27.05.2013

Исправленный вариант

07.04.2014