Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. А. Тайманов, Преобразование Мутара двумерных операторов Дирака и геометрия Мебиуса, *Матем. заметки*, 2015, том 97, выпуск 1, 129–141

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10572>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.85.209

26 апреля 2023 г., 11:15:16

Преобразование Мутара двумерных операторов Дирака и геометрия Мебиуса

И. А. Тайманов

В работе описано действие инверсии на данные представления Вейерштрасса поверхности и показано, что преобразование Мутара двумерных операторов Дирака отображает потенциал (представление Вейерштрасса) поверхности S в потенциал поверхности $\tilde{S}$, полученной из S инверсией.

Библиография: 14 названий.

DOI: 10.4213/mzm10572

1. Введение

В данной работе мы рассматриваем преобразование Мутара для двумерных операторов Дирака

$$\mathcal{D} = \begin{pmatrix} 0 & \partial \\ -\bar{\partial} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & U \end{pmatrix}, \quad (1)$$

где $\partial = (\partial/\partial x - i\partial/\partial y)/2$ и $\bar{\partial} = (\partial/\partial x + i\partial/\partial y)/2$, с вещественнозначными потенциалами U . Это преобразование и его расширение до преобразований решений модифицированного уравнения Веселова–Новикова были введены в [1].

Представление Вейерштрасса поверхностей сопоставляет решению

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}$$

уравнения Дирака

$$\mathcal{D}\psi = 0, \quad (2)$$

поверхность в $\mathbb{R}^3$, заданную классическими формулами Вейерштрасса для минимальных поверхностей в $\mathbb{R}^3$ [2] и, более того, каждая поверхность в $\mathbb{R}^3$ допускает такое представление даже глобально (при этом ψ является сечением спинорного расслоения над поверхностью) и важные геометрические свойства поверхности (в частности, значение функционала Уиллмора) содержатся в спектральных характеристиках оператора $\mathcal{D}$ [3], [4].

Тем самым каждой поверхности $S \subset \mathbb{R}^3$ с заданным конформным параметром $z = x + iy$ однозначно сопоставляется оператор Дирака $\mathcal{D}$, входящий в ее представление

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (грант № 14-11-00441).

Вейерштрасса, с потенциалом U (потенциалом поверхности с заданным конформным параметром).

В данной статье мы

- 1) описываем действие инверсии на данные представления Вейерштрасса, т.е. на U и ψ (теорема 1);
- 2) показываем, что преобразование Мутара двумерных операторов Дирака [1] имеет геометрический смысл: преобразование Мутара отображает потенциал U поверхности S в потенциал $\tilde{U}$ поверхности $\tilde{S}$, полученной из S инверсией (теорема 2).

2. Предварительные сведения

2.1. Представление Вейерштрасса поверхностей. Пусть

$$r: \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \mathcal{U} \subset \mathbb{C},$$

– конформное погружение области $\mathcal{U}$ в $\mathbb{R}^3$, т.е. такое погружение, что индуцированная метрика принимает вид

$$ds^2 = e^{2\alpha(z, \bar{z})} dz d\bar{z}. \quad (3)$$

Такой параметр $z = x + iy$ называется конформным параметром на поверхности. Условие конформности переписывается как

$$\left(\frac{\partial x^1}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial x^2}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial x^3}{\partial z} \right)^2 = 0,$$

где x^1, x^2, x^3 – евклидовы координаты в $\mathbb{R}^3$. Точки этой квадрики в $\mathbb{C}^2$ параметризуются парами точек вида $(\psi_1, \bar{\psi}_2) \in \mathbb{C}^2$ следующим образом:

$$\frac{\partial x^1}{\partial z} = \frac{i}{2}(\psi_1^2 + \bar{\psi}_2^2), \quad \frac{\partial x^2}{\partial z} = \frac{1}{2}(\bar{\psi}_2^2 - \psi_1^2), \quad \frac{\partial x^3}{\partial z} = \psi_1 \bar{\psi}_2.$$

Функция $\psi = (\psi_1)$ задает поверхность по этим формулам тогда и только тогда, когда она удовлетворяет уравнению Дирака (2) для оператора Дирака (1) с вещественным потенциалом U , что эквивалентно тому, что форма

$$\sum_{k=1}^3 \left(\frac{\partial x^k}{\partial z} dz + \frac{\overline{\partial x^k}}{\partial \bar{z}} d\bar{z} \right)$$

замкнута, а координаты x^1, x^2, x^3 принимают вещественные значения.

При этом для каждого решения ψ уравнения (2) поверхность $r: \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^3$ задается формулами

$$\begin{aligned} x^1(P) &= \frac{i}{2} \int_{P_0}^P ((\psi_1^2 + \bar{\psi}_2^2) dz - (\bar{\psi}_1^2 + \psi_2^2) d\bar{z}) + x^1(P_0), \\ x^2(P) &= \frac{1}{2} \int_{P_0}^P ((\bar{\psi}_2^2 - \psi_1^2) dz + (\psi_2^2 - \bar{\psi}_1^2) d\bar{z}) + x^2(P_0), \\ x^3(P) &= \int_{P_0}^P (\psi_1 \bar{\psi}_2 dz + \bar{\psi}_1 \psi_2 d\bar{z}) + x^3(P_0). \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь P_0 – заданная точка в $\mathcal{U}$ и интеграл взят по пути в $\mathcal{U}$, соединяющему P_0 и P . Если $\mathcal{U}$ односвязна, то значение интеграла не зависит от выбора пути. Индуцированная метрика (3) принимает вид

$$e^\alpha = |\psi_1|^2 + |\psi_2|^2$$

и, следовательно, формулы (4) задают погружение $\mathcal{U}$ в точности вне точек ветвления, в которых $|\psi_1|^2 = |\psi_2|^2 = 0$. Единичный вектор нормали $\mathbf{n}$ принимает вид

$$\mathbf{n} = e^{-\alpha}(i(\psi_1\psi_2 - \bar{\psi}_1\bar{\psi}_2), -(\psi_1\psi_2 + \bar{\psi}_1\bar{\psi}_2), (|\psi_2|^2 - |\psi_1|^2)), \quad (5)$$

и потенциал U оператора Дирака равен

$$U = \frac{e^\alpha H}{2}, \quad (6)$$

где H – средняя кривизна поверхности.

Поскольку (4) определяет поверхность с точностью до сдвигов, то U и ψ инвариантны относительно них. Вращения пространства $\mathbb{R}^3$ сохраняют U и индуцируют спинорные действия на ψ [5].

2.2. Инверсия. Геометрия Мебиуса изучает геометрические фигуры в евклидовых пространствах, пополненных бесконечно удаленными точками, т.е. в сферах $S^n = \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$, и их свойства, инвариантные относительно конформных преобразований.

При $n \geq 3$ группа, образованная всеми сохраняющими ориентацию конформными преобразованиями, порождается сдвигами и вращениями $\mathbb{R}^n$ и инверсией и изоморфна компоненте единицы группы $SO(n+1, 1)$.

Инверсия трехмерного пространства имеет вид

$$T: \mathbf{x} \rightarrow -\frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^2}, \quad \mathbf{x} = (x^1, x^2, x^3) \in \mathbb{R}^3.$$

Она конформно отображает $\mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$ на себя.

Пусть u – вектор, касательный к $\mathbb{R}^3$ в точке $\mathbf{x}$: $u \in T_{\mathbf{x}}\mathbb{R}^3$, и пусть $\mathbf{x} \neq 0$. Тогда легко вычислить, что

$$T^*u = -\frac{u}{|\mathbf{x}|^2} + 2\mathbf{x}\frac{\langle \mathbf{x}, u \rangle}{|\mathbf{x}|^4}, \quad (7)$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – евклидово скалярное произведение. Отсюда следует, что

$$\langle T^*u, T^*v \rangle = \frac{\langle u, v \rangle}{|\mathbf{x}|^4}, \quad u, v \in T_{\mathbf{x}}\mathbb{R}^3. \quad (8)$$

Пусть

$$r: \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^3$$

– поверхность с конформным параметром z . Инверсия отображает ее в поверхность

$$\tilde{r} = T \cdot r: \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^3.$$

Согласно (8) z является конформным параметром на $\tilde{r}$ и конформные факторы связаны соотношениями

$$e^{\tilde{\alpha}(z, \bar{z})} = \frac{e^{\alpha(z, \bar{z})}}{|r(z, \bar{z})|^2}, \quad e^{\tilde{\alpha}} = \frac{1}{2} \langle \tilde{r}_z, \tilde{r}_{\bar{z}} \rangle, \quad e^{\alpha} = \frac{1}{2} \langle r_z, r_{\bar{z}} \rangle. \quad (9)$$

Напомним формулу

$$\Delta r = 4e^{-2\alpha} \partial \bar{\partial} r = 2H \mathbf{n},$$

которая переписывается как

$$r_{z\bar{z}} = e^{\alpha} U \mathbf{n}, \quad (10)$$

где $\mathbf{n}$ – единичный вектор нормали к поверхности и U – потенциал представления Вейерштрасса поверхности r . Из последней формулы вытекает, что

$$U = e^{-\alpha} \langle r_{z\bar{z}}, \mathbf{n} \rangle.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Потенциал $\tilde{U}$ представления Вейерштрасса поверхности $\tilde{r}$ с заданным конформным параметром z равен

$$\tilde{U} = U + e^{\alpha} \frac{\langle r, \mathbf{n} \rangle}{|r|^2}. \quad (11)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно (7) и (8) имеем

$$\tilde{r}_z = -\frac{r_z}{|r|^2} + \frac{2r \langle r, r_z \rangle}{|r|^4}, \quad \tilde{\mathbf{n}} = -\mathbf{n} + \frac{2r \langle r, \mathbf{n} \rangle}{|r|^2}.$$

Прямыми вычислениями выводится, что

$$\begin{aligned} \tilde{r}_{z\bar{z}} &= -\frac{r_{z\bar{z}}}{|r|^2} - \frac{8r \langle r, r_z \rangle \langle r, r_{\bar{z}} \rangle}{|r|^6} + \frac{2}{|r|^4} (r_z \langle r, r_{\bar{z}} \rangle + r_{\bar{z}} \langle r, r_z \rangle + r \langle r_z, r_{\bar{z}} \rangle + r \langle r, r_{z\bar{z}} \rangle), \\ \langle \tilde{r}_{z\bar{z}}, \tilde{\mathbf{n}} \rangle &= \frac{\langle r_{z\bar{z}}, \mathbf{n} \rangle}{|r|^2} + 2 \frac{\langle r, \mathbf{n} \rangle \langle r_z, r_{\bar{z}} \rangle}{|r|^4}. \end{aligned}$$

С помощью (10) перепишем последнее уравнение в следующем виде:

$$e^{\tilde{\alpha}} \tilde{U} = \frac{e^{\alpha} U}{|r|^2} + \frac{\langle r, \mathbf{n} \rangle e^{2\alpha}}{|r|^4},$$

и после деления обеих частей на $e^{\tilde{\alpha}} = e^{\alpha}/|r|^2$ (см. (9)) мы получаем (11). Предложение доказано.

2.3. Модифицированное уравнение Веселова–Новикова. Модифицированное уравнение Веселова–Новикова (уравнение мВН)

$$U_t = \left(U_{zzz} + 3U_z V + \frac{3}{2} U V_z \right) + \left(U_{\bar{z}\bar{z}\bar{z}} + 3U_{\bar{z}} \bar{V} + \frac{3}{2} U \bar{V}_{\bar{z}} \right),$$

где

$$V_{\bar{z}} = (U^2)_z,$$

было введено в [6].

Это уравнение имеет представление в виде тройки Манакова:

$$\mathcal{D}_t + [\mathcal{D}, \mathcal{A}] - \mathcal{B}\mathcal{D} = 0,$$

где $\mathcal{D}$ – двумерный оператор Дирака (1). Обычно представление Манакова для уравнения мВН

$$L_t + [L, A] - BL = 0$$

записывалось в терминах оператора L вида

$$L = \begin{pmatrix} \partial & -U \\ U & \bar{\partial} \end{pmatrix}$$

(см. [1], [3]). Поскольку

$$\mathcal{D} = L\Gamma,$$

где

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (12)$$

эти представления связаны соотношениями

$$\mathcal{A} = -\Gamma A \Gamma, \quad \mathcal{B} = \Gamma A \Gamma + A + B,$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \partial^3 + \bar{\partial}^3 + 3 \begin{pmatrix} V & 0 \\ U_z & 0 \end{pmatrix} \partial + 3 \begin{pmatrix} 0 & -U_{\bar{z}} \\ 0 & \bar{V} \end{pmatrix} \bar{\partial} + \frac{3}{2} \begin{pmatrix} V_z & 2U\bar{V} \\ -2UV & \bar{V}_{\bar{z}} \end{pmatrix}, \\ \mathcal{B} &= 3 \begin{pmatrix} -V & 0 \\ -2U_z & V \end{pmatrix} \partial + 3 \begin{pmatrix} \bar{V} & 2U_{\bar{z}} \\ 0 & -\bar{V} \end{pmatrix} \bar{\partial} + \frac{3}{2} \begin{pmatrix} \bar{V}_{\bar{z}} - V_z & 2U_{\bar{z}\bar{z}} \\ -2U_{zz} & V_z - \bar{V}_{\bar{z}} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (13)$$

2.4. Матричная алгебра H . Заметим, что

$$\Gamma = i\sigma_2,$$

где σ_2 – одна из матриц Паули:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Матрицы Паули удовлетворяют соотношениям

$$\sigma_a \sigma_b = i\varepsilon_{abc} \sigma_c + \delta_{ab} \sigma_0,$$

где σ_0 – единичная матрица, и $i\sigma_1, i\sigma_2, i\sigma_3$ образуют базис алгебры Ли $su(2)$, образованной всеми матрицами вида $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}$, $\text{Tr } A = 0$.

Четырехмерное пространство H , образованное всеми матрицами вида

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}, \quad a, b \in \mathbb{C},$$

является линейной оболочкой $\sigma_0, i\sigma_1, i\sigma_2, i\sigma_3$ над $\mathbb{R}$ и изоморфно алгебре кватернионов. В частности, H замкнуто по отношению к произведению.

3. Преобразование Мутара

В этом разделе мы изложим преобразование типа Мутара для двумерных операторов Дирака и решений уравнения мВН, введенное в [1]. Однако мы изменили изначальное изложение, чтобы продемонстрировать геометрию, которая скрыта в аналитических формулах и не была замечена до настоящего времени.

3.1. Преобразование Мутара операторов. Если спинор $\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}$ удовлетворяет уравнению Дирака (2), то легко заметить, что

$$\psi^* = \begin{pmatrix} -\bar{\psi}_2 \\ \bar{\psi}_1 \end{pmatrix}$$

также удовлетворяет этому уравнению. Образует из ψ и ψ^* матричнозначное решение

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi_1 & -\bar{\psi}_2 \\ \psi_2 & \bar{\psi}_1 \end{pmatrix} \quad (14)$$

уравнение Дирака (2). Заметим, что функция Ψ принимает значения в H .

Каждой паре Ψ и Φ H -значных функций сопоставим матричную 1-форму ω :

$$\omega(\Phi, \Psi) = \Phi^\top \Psi dy - i\Phi^\top \sigma_3 \Psi dx = -\frac{i}{2}(\Phi^\top \sigma_3 \Psi + \Phi^\top \Psi) dz - \frac{i}{2}(\Phi^\top \sigma_3 \Psi - \Phi^\top \Psi) d\bar{z}, \quad (15)$$

и матричнозначную функцию

$$S(\Phi, \Psi)(z, \bar{z}, t) = \Gamma \int_0^z \omega(\Phi, \Psi), \quad (16)$$

определенную с точностью до постоянных матриц из $su(2)$, образованных из постоянных интегрирования.

Здесь и в дальнейшем мы обозначаем транспонирование матрицы X через $X^\top$.

Каждой H -значной функции Ψ сопоставим матричнозначную функцию

$$K(\Psi) = \Psi S^{-1}(\Psi, \Psi) \Gamma \Psi^\top \Gamma^{-1}. \quad (17)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2 [1]. Для решения Ψ_0 уравнения Дирака (14) для оператора $\mathcal{D}$ с вещественным потенциалом U , матрица $K(\Psi_0)$ принимает вид

$$K(\Psi_0) = \begin{pmatrix} iW & a \\ -\bar{a} & -iW \end{pmatrix},$$

где функция W является вещественной, и для каждого решения Ψ вида (14) уравнения Дирака (2) функция $\tilde{\Psi}$ вида

$$\tilde{\Psi} = \Psi - \Psi_0 S^{-1}(\Psi_0, \Psi_0) S(\Psi_0, \Psi) \quad (18)$$

удовлетворяет уравнению

$$\tilde{\mathcal{D}}\tilde{\Psi} = 0$$

для оператора Дирака $\tilde{\mathcal{D}}$ с потенциалом

$$\tilde{U} = U + W.$$

3.2. Преобразование Дирака решений уравнения мВН. Для каждой пары H -значных функций Φ и Ψ , зависящих от x , y , и t , определим матричнозначную 1-форму

$$\begin{aligned}\tilde{\omega}(\Phi, \Psi) &= \Phi^\top \Psi dy - i\Phi^\top \sigma_3 \Psi dx \\ &+ \left[i(\Phi_{yy}^\top \sigma_3 \Psi + \Phi^\top \sigma_3 \Psi_{yy} - \Phi_y^\top \sigma_3 \Psi_y) + 2iU(\Phi_y^\top \sigma_2 \Psi - \Phi^\top \sigma_2 \Psi_y) \right. \\ &\quad \left. + \Phi^\top \begin{pmatrix} iU^2 - 3iV & -iU_x \\ -iU_x & -iU^2 + 3i\bar{V} \end{pmatrix} \Psi \right] dt \\ &= \omega(\Phi, \Psi) + \left[-i((\Phi_{zz}^\top + \Phi_{\bar{z}\bar{z}}^\top - 2\Phi_{z\bar{z}}^\top) \sigma_3 \Psi + \Phi^\top \sigma_3 (\Psi_{zz} + \Psi_{\bar{z}\bar{z}} - 2\Psi_{z\bar{z}}) \right. \\ &\quad \left. - (\Phi_z^\top - \Phi_{\bar{z}}^\top) \sigma_3 (\Psi_z - \Psi_{\bar{z}})) \right. \\ &\quad \left. - 2U((\Phi_z^\top - \Phi_{\bar{z}}^\top) \sigma_2 \Psi - \Phi^\top \sigma_2 (\Psi_z - \Psi_{\bar{z}})) \right. \\ &\quad \left. + \Phi^\top \begin{pmatrix} iU^2 - 3iV & -i(U_z + U_{\bar{z}}) \\ -i(U_z + U_{\bar{z}}) & -iU^2 + 3i\bar{V} \end{pmatrix} \Psi \right] dt, \quad (19)\end{aligned}$$

и матричнозначные функции

$$\tilde{S}(\Phi, \Psi)(z, \bar{z}, t) = \Gamma \int_0^z \tilde{\omega}(\Phi, \Psi),$$

$$K(\Psi) = \Psi \tilde{S}^{-1}(\Psi, \Psi) \Gamma \Psi^\top \Gamma^{-1}, \quad M(\Psi) = \Gamma \Psi_y \Psi^{-1} \Gamma^{-1} = i\Gamma(\Psi_z - \Psi_{\bar{z}}) \Psi^{-1} \Gamma^{-1}.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3 [1]. Пусть $U(z, \bar{z}, t)$ и $V(z, \bar{z}, t)$ удовлетворяют уравнению мВН и $\Psi_0(z, \bar{z}, t)$ удовлетворяет системе уравнений

$$\mathcal{D}\Psi_0 = 0, \quad \frac{\partial \Psi_0}{\partial t} = \mathcal{A}\Psi_0.$$

Тогда

1) матрицы $K(\Psi_0)$ и $M(\Psi_0)$ имеют вид

$$K = \begin{pmatrix} iW & a \\ -\bar{a} & -iW \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} b & c \\ -\bar{c} & \bar{b} \end{pmatrix},$$

где функция W принимает вещественные значения;

2) для каждого решения Ψ (14) уравнения Дирака (2) и уравнения

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = \mathcal{A}\Psi$$

функция $\tilde{\Psi}$ вида

$$\tilde{\Psi} = \Psi - \Psi_0 \tilde{S}^{-1}(\Psi_0, \Psi_0) \tilde{S}(\Psi_0, \Psi)$$

удовлетворяет уравнению

$$\tilde{\mathcal{D}}\tilde{\Psi} = 0$$

для оператора Дирака $\tilde{\mathcal{D}}$ с потенциалом

$$\tilde{U} = U + W$$

и уравнению

$$\frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial t} = \tilde{\mathcal{A}}\tilde{\Psi},$$

где $\tilde{\mathcal{A}}$ имеет вид (13) с заменой U на $\tilde{U}$ и V на $\tilde{V}$:

$$\tilde{V} = V + 2UW + a^2 + 2(a\bar{b} - i\bar{c}W);$$

3) функция $\tilde{U}$ является вещественной и $\tilde{U}$ и $\tilde{V}$ удовлетворяют уравнению мВН

$$\tilde{U}_t = \left(\tilde{U}_{zzz} + 3\tilde{U}_z\tilde{V} + \frac{3}{2}\tilde{U}\tilde{V}_z \right) + \left(\tilde{U}_{\bar{z}\bar{z}\bar{z}} + 3\tilde{U}_{\bar{z}}\bar{\tilde{V}} + \frac{3}{2}\tilde{U}\bar{\tilde{V}}_{\bar{z}} \right), \quad \tilde{V}_{\bar{z}} = (\tilde{U}^2)_z.$$

4. Действие инверсии на данные представления Вейерштрасса

Пусть $\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}$ задает поверхность $r: \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^3$, полученную посредством представления Вейерштрасса.

Отождествим $\mathbb{R}^3$ с алгеброй Ли $su(2)$ с помощью отображения

$$\mathbf{x} = (x^1, x^2, x^3) \rightarrow \mathbf{X} = \begin{pmatrix} ix^3 & -x^1 - ix^2 \\ x^1 - ix^2 & -ix^3 \end{pmatrix}.$$

В данном представлении инверсия принимает очень простой вид:

$$T(\mathbf{X}) = \mathbf{X}^{-1}.$$

Построим матричнозначную функцию

$$\Psi_0 = \begin{pmatrix} \psi_1 & -\bar{\psi}_2 \\ \psi_2 & \bar{\psi}_1 \end{pmatrix}.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Формула (16) задает погружение в $su(2) = \mathbb{R}^3$ поверхности, определенной спинором ψ посредством представления Вейерштрасса.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно (4) и (15) имеем

$$\begin{aligned} S(\Psi_0, \Psi_0)(P) &= \Gamma \int_{P_0}^P -\frac{i}{2} (\Psi_0^\top (\sigma_3 + 1) \Psi_0 dz + \Psi_0^\top (\sigma_3 - 1) \Psi_0 d\bar{z}) \\ &= i \int_0^P \begin{pmatrix} \psi_1 \bar{\psi}_2 & -\bar{\psi}_2^2 \\ \psi_1^2 & -\psi_1 \bar{\psi}_2 \end{pmatrix} dz + \begin{pmatrix} \bar{\psi}_1 \psi_2 & \bar{\psi}_1^2 \\ -\psi_2^2 & -\bar{\psi}_1 \psi_2 \end{pmatrix} d\bar{z} \\ &= \int_0^P d \begin{pmatrix} ix^3 & -x^1 - ix^2 \\ x^1 - ix^2 & -ix^3 \end{pmatrix} \in su(2), \end{aligned} \quad (20)$$

т.е. S задает поверхность, определенную спинором ψ с помощью представления Вейерштрасса. Предложение доказано.

Зафиксируем постоянные интегрирования так, чтобы получить

$$S(\Psi_0, \Psi_0)(P) = r(P).$$

Рассмотрим инверсию $\tilde{r} = T \cdot r: \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^3$ поверхности r . Она задается формулой

$$P \in \mathcal{U} \rightarrow \tilde{S}(P) = S^{-1}(P).$$

Мы имеем $\tilde{S}(P) = S(\tilde{\Psi}_0, \tilde{\Psi}_0)(P) = S^{-1}(\Psi_0, \Psi_0)(P)$, и согласно (15) и (16)

$$\tilde{S}_z = -\frac{i}{2} \Gamma \tilde{\Psi}_0^\top (1 + \sigma_3) \tilde{\Psi}_0.$$

Так как $\tilde{S}S = S^{-1}S = 1$, мы имеем $(\tilde{S}S)_z = \tilde{S}_z S + \tilde{S}S_z = 0$ и, следовательно,

$$\tilde{S}_z = -S^{-1}S_zS^{-1}.$$

Отсюда вытекает равенство

$$-\frac{i}{2} \Gamma \tilde{\Psi}_0^\top (1 + \sigma_3) \tilde{\Psi}_0 = \frac{i}{2} S^{-1} \Gamma \Psi_0^\top (1 + \sigma_3) \Psi_0 S^{-1},$$

которое после простых сокращений принимает вид

$$\tilde{\Psi}_0^\top (1 + \sigma_3) \tilde{\Psi}_0 = -\Gamma^{-1} S^{-1} \Gamma \Psi_0^\top (1 + \sigma_3) \Psi_0 S^{-1}.$$

Поскольку

$$S^{-1} = \frac{1}{\det S} \begin{pmatrix} -ix^3 & x^1 + ix^2 \\ -x^1 + ix^2 & ix^3 \end{pmatrix},$$

то

$$-\Gamma^{-1} S^{-1} \Gamma = \Gamma S^{-1} \Gamma = (S^{-1})^\top,$$

что влечет равенство

$$C^\top (1 + \sigma_3) C = (1 + \sigma_3) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \Psi_0 S^{-1} \tilde{\Psi}_0^{-1}. \quad (21)$$

Аналогично, рассматривая $\tilde{S}_{\bar{z}}$ и $S_{\bar{z}}$, выводим, что

$$C^\top (\sigma_3 - 1) C = (\sigma_3 - 1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Из последнего равенства и (21) следует, что матрица C диагональна и $C^\top = C^{-1}$. Так как $\Psi_0, S^{-1}, \tilde{\Psi}_0 \in H$, то $C \in H$, откуда следует, что $C = \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, и, тем самым, $\tilde{\Psi}_0 = \pm \Psi_0 S^{-1}$. Поскольку оба спинора $\pm \Psi_0 S^{-1}$ задают одну и ту же поверхность, без ограничения общности полагаем

$$\tilde{\Psi}_0 = \Psi_0 S^{-1}.$$

Спинор $\tilde{\Psi}_0$ удовлетворяет уравнению Дирака

$$\tilde{D} \tilde{\Psi}_0 = (\mathcal{D}_0 + \tilde{U}) \tilde{\Psi}_0 = 0,$$

где

$$\mathcal{D}_0 = \begin{pmatrix} 0 & \partial \\ -\bar{\partial} & 0 \end{pmatrix}.$$

Легко проверить “правило Лейбница”:

$$\mathcal{D}_0(A \cdot B) = (\mathcal{D}_0 A) \cdot B + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} A \cdot \partial B + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} A \cdot \bar{\partial} B, \quad (22)$$

и применить его следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_0(\Psi_0 S^{-1}) &= (\mathcal{D}_0 \Psi_0) S^{-1} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Psi_0 S_z^{-1} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \Psi_0 S_{\bar{z}}^{-1} \\ &= -U \Psi_0 S^{-1} + i \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Psi_0 S^{-1} \Gamma \Psi_0^\top \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Psi_0 S^{-1} \\ &\quad + i \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \Psi_0 S^{-1} \Gamma \Psi_0^\top \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Psi_0 S^{-1}. \end{aligned}$$

После деления обеих частей на $\Psi_0 S^{-1}$ получаем

$$\tilde{U} = U - i \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} G \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} G \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right), \quad G = \Psi_0 S^{-1} \Gamma \Psi_0^\top. \quad (23)$$

Окончательно мы приходим к следующему заключению.

ТЕОРЕМА 1. Пусть Ψ_0 определяет поверхность S вида (20) посредством представления Вейерштрасса и удовлетворяет уравнению Дирака с потенциалом U . Пусть $\tilde{S}$ – поверхность, полученная из S инверсией. Тогда $\tilde{S}$ задается спинором

$$\tilde{\Psi}_0 = \Psi_0 S^{-1}$$

с помощью представления Вейерштрасса и $\tilde{\Psi}_0$ удовлетворяет уравнению Дирака с потенциалом $\tilde{U}$ вида (23).

5. Геометрия преобразования Мутара

ТЕОРЕМА 2. Преобразование Мутара оператора Дирака $\mathcal{D}$, заданное предложением 2, отображает потенциал представления Вейерштрасса поверхности S (20) в потенциал ее инверсии $\tilde{S}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вычислим функцию $W = -iK_{11}$, заданную формулой (17). Имеем

$$\begin{aligned} K &= \Psi_0 S^{-1} \Gamma \Psi_0^\top \Gamma^{-1} = \Psi_0 S^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 & \psi_2 \\ -\bar{\psi}_2 & \bar{\psi}_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{|r|^2} \begin{pmatrix} \psi_1 & -\bar{\psi}_2 \\ \psi_2 & \bar{\psi}_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -ix^3 & x^1 + ix^2 \\ -x^1 + ix^2 & ix^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\psi}_1 & \bar{\psi}_2 \\ -\psi_2 & \psi_1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

где $|r|^2 = \sum_{k=1}^3 (x^k)^2$, и мы заключаем, что согласно (5)

$$K_{11} = \frac{1}{|r|^2} (x^1(\psi_1\psi_2 - \bar{\psi}_1\bar{\psi}_2) - ix^2(\psi_1\psi_2 + \bar{\psi}_1\bar{\psi}_2) + ix^3(|\psi_2|^2 - |\psi_1|^2)) = \frac{i}{|r|^2} e^\alpha \langle r, \mathbf{n} \rangle.$$

Из (11) следует, что $\tilde{U} = U + W$ – потенциал поверхности $\tilde{S}$. Теорема доказана.

Более громоздкие вычисления позволяют доказать теорему 2 сопоставлением (17) и (23).

Для полноты изложения выведем (18) в духе § 4 (в [1] этот вывод был опущен).

Пусть

$$\mathcal{D}\Psi = \mathcal{D}\Psi_0 = 0, \quad \tilde{D}\tilde{\Psi}_0 = 0,$$

и будем искать такую деформацию $\tilde{\Psi}$ спинора Ψ , чтобы она имела вид

$$\tilde{\Psi} = \Psi + \tilde{\Psi}_0 N$$

и удовлетворяла уравнению $\tilde{D}\tilde{\Psi} = 0$. Согласно (22), мы имеем

$$\begin{aligned} 0 &= \tilde{D}\tilde{\Psi} = (\mathcal{D} + W)(\Psi + \tilde{\Psi}_0 N) \\ &= \mathcal{D}\Psi + W\Psi + (\tilde{D}\tilde{\Psi}_0) \cdot N + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tilde{\Psi}_0 \partial N + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \tilde{\Psi}_0 \bar{\partial} N, \end{aligned}$$

где $W = \tilde{U} - U$, и так как $\tilde{D}\tilde{\Psi} = \mathcal{D}\Psi = 0$, то мы будем искать такое N , что

$$W\Psi = - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tilde{\Psi}_0 \partial N - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \tilde{\Psi}_0 \bar{\partial} N.$$

Напомним, что согласно (6)

$$W = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tilde{\Psi}_0 S_z(\Psi_0, \Psi) \Psi^{-1} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \tilde{\Psi}_0 S_{\bar{z}}(\Psi_0, \Psi) \Psi^{-1}$$

и выведем следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5 [1]. *Если Ψ удовлетворяет уравнению $\mathcal{D}\Psi = 0$, то функция*

$$\tilde{\Psi} = \Psi - \tilde{\Psi}_0 S(\Psi_0, \Psi) \quad (24)$$

удовлетворяет уравнению $\tilde{D}\tilde{\Psi} = 0$. Функция $\tilde{\Psi}$ определена с точностью до слагаемых вида $\tilde{\Psi}_0 \cdot A$, где A – матрица из H с постоянными коэффициентами.

Пусть потенциал U является двояко-периодическим:

$$U(z + \lambda) = U(z), \quad \lambda \in \Lambda \approx \mathbb{Z}^2 \subset \mathbb{C}.$$

Решение ψ уравнения Дирака (2) называется функцией Флоке (на нулевом уровне энергии) оператора $\mathcal{D}$, если существуют такие постоянные μ_1 и μ_2 (мультипликаторы Флоке), что

$$\psi(z + \lambda_k) = \mu_k \psi(z), \quad k = 1, 2,$$

где λ_1 и λ_2 порождают решетку Λ . Функции Флоке параметризуются спектральной кривой оператора $\mathcal{D}$ [7], которая впервые была введена в [8] для двумерного оператора Шрёдингера.

Мы высказали гипотезу, что спектральная кривая сохраняется конформными преобразованиями. Поскольку сдвиги и вращения не изменяют потенциал, то ее достаточно проверить для инверсии. В [9] эта гипотеза была подтверждена доказательством того, что для торов в $\mathbb{R}^3$ мультипликаторы Флоке сохраняются инверсией. В [10] это же было установлено для торов в $\mathbb{R}^4$, однако при этом было показано, что

спектральная кривая может изменяться за счет появления и распада кратных точек. Оба доказательства основывались на инфинитезимальных конформных преобразованиях.

Предложение 5 прямо указывает на то, что мультипликаторы Флоке сохраняются при инверсии.

СЛЕДСТВИЕ 1. Если Ψ – функция Флоке оператора $\mathcal{D}$, то существует единственный выбор функции $\tilde{\Psi}$ вида (24) такой, что $\tilde{\Psi}$ – функция Флоке оператора $\tilde{\mathcal{D}}$. Более того $\tilde{\Psi}$ имеет те же мультипликаторы Флоке μ_1, μ_2 , что и Ψ .

6. Заключительные замечания

1) Теорема о перестановочности (Бьянки) для преобразования Мутара кратко упоминается в [1]. Она утверждает, в частности, что существуют такие представители $\tilde{\Psi}_1$ и $\tilde{\Psi}_2$, что $\hat{U} = U_{12} = U_{21}$, т.е. диаграмма

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{\Psi_1} & U_1 \\ \Psi_2 \downarrow & & \downarrow \tilde{\Psi}_2 \\ U_2 & \xrightarrow{\tilde{\Psi}_1} & \hat{U} \end{array}$$

коммутативна. Здесь стрелки обозначают деформации, определенные их метками и $\tilde{\Psi}_2$ и $\tilde{\Psi}_1$ – образы Ψ_2 и Ψ_1 при этих преобразованиях. Существует ли геометрическая интерпретация перестановочности в духе теоремы 2?

2) В [11] итерации преобразования Мутара использовались для получения примеров операторов Шрёдингера с интересными спектральными свойствами. Было бы интересно сделать то же самое для оператора Дирака, в частности, с использованием геометрической интерпретации (теоремы 2).

3) Предложение 3 предлагает путь для поиска разрушений решений уравнения мВН. Пусть изначальная поверхность S не проходит через $\mathbf{x} = 0$. Формулы (19) и (20) задают деформацию поверхности, и, как только $\tilde{S}$ проходит через $\mathbf{x} = 0$, ее потенциал $\tilde{U}$ становится сингулярным. Хорошо изученные случаи минимальных поверхностей и солитонных сфер [5], [12] могут дать такие примеры.

4) Должно существовать аналогичное преобразование Мутара, отвечающее инверсиям поверхностей в $\mathbb{R}^4$ [13], [14]. Заметим, что в этом случае оператор Дирака имеет вид $\mathcal{D}_0 + \text{diag}(U, \bar{U})$ и связан с уравнениями Дэви–Стюартсона.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] D. Yu, Q. P. Liu, Sh. Wang, “Darboux transformation for the modified Veselov–Novikov equation”, *J. Phys. A*, **35**:16 (2002), 3779–3785.
- [2] B. G. Konopelchenko, “Induced surfaces and their integrable dynamics”, *Stud. Appl. Math.*, **96** (1996), 9–51.
- [3] I. A. Taimanov, “Modified Novikov–Veselov equation and differential geometry of surfaces”, *Solitons, Geometry, and Topology: on the Crossroad*, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, **179**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997, 133–151.
- [4] И. А. Тайманов, “Двумерный оператор Дирака и теория поверхностей”, *УМН*, **61**:1 (2006), 85–164.

- [5] И. А. Тайманов, “Представление Вейерштрасса сфер в $\mathbb{R}^3$, числа Уиллмора и солитонные сферы”, *Солитоны, геометрия, топология — на перекрестках*, Тр. МИАН, **225**, Наука, М., 1999, 339–361.
- [6] Л. В. Богданов, “Уравнение Веселова–Новикова как естественное двумерное обобщение уравнения Кортевега–де Фриза”, *ТМФ*, **70**:2 (1987), 309–314.
- [7] И. А. Тайманов, “Представление Вейерштрасса замкнутых поверхностей в $\mathbb{R}^3$ ”, *Функц. анализ и его прил.*, **32**:4 (1998), 49–62.
- [8] Б. А. Дубровин, И. М. Кричевер, С. П. Новиков, “Уравнение Шрёдингера в периодическом поле и римановы поверхности”, *Докл. АН СССР*, **229**:1 (1976), 15–18.
- [9] P. G. Grinevich, M. U. Schmidt, “Conformal invariant functionals of immersions of tori into $\mathbb{R}^3$ ”, *J. Geom. Phys.*, **26**:1-2 (1997), 51–78.
- [10] P. G. Grinevich, I. A. Taimanov, “Infinitesimal Darboux transformations of the spectral curves of tori in the four-space”, *Int. Math. Res. Not. IMRN*, 2007, №2, Art. ID rnm005.
- [11] И. А. Тайманов, С. П. Царев, “Двумерные рациональные солитоны, построенные с помощью преобразований Мутара, и их распад”, *ТМФ*, **157**:2 (2008), 188–207.
- [12] C. Bohle, G. P. Peters, “Soliton spheres”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **363**:10 (2011), 5419–5463.
- [13] B. G. Konopelchenko, “Weierstrass representations for surfaces in 4D spaces and their integrable deformations via DS hierarchy”, *Ann. Global Anal. Geom.*, **18**:1 (2000), 61–74.
- [14] I. A. Taimanov, “Surfaces in the four-space and the Davey–Stewartson equations”, *J. Geom. Phys.*, **56**:8 (2006), 1235–1256.

И. А. Тайманов

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
г. Новосибирск
Новосибирский государственный университет
E-mail: taimanov@math.nsc.ru

Поступило

06.08.2014