Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Женгху Гао, n -Кочистые проективные модули, *Матем. заметки*, 2015, том 97, выпуск 1, 58–66

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10573>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.89.56.158

26 апреля 2023 г., 06:27:12

n -Кочистые проективные модули

Женгху Гао

Пусть R – кольцо, n – фиксированное неотрицательное целое число, а $\mathcal{F}_n$ – класс всех левых R -модулей плоской размерности, не большей n . Левый R -модуль M называется n -кочистым проективным, если $\text{Ext}_R^1(M, F) = 0$ для любого $F \in \mathcal{F}_n$. Приводится несколько примеров, показывающих, что n -кочистые проективные модули не обязательно являются m -кочистыми проективными при $m > n$. Далее дается характеристика хорошо известных QF колец и IF колец в терминах n -кочистых проективных модулей. Наконец, доказывается, что кольцо R будет относительным левым наследственным, если и только если каждый подмодуль проективных (или свободных) левых R -модулей является n -кочистым проективным, и если и только если $\text{id}_R(N) \leq 1$ для каждого левого R -модуля N с $N \in \mathcal{F}_n$.

Библиография: 21 название.

DOI: 10.4213/mzm10573

1. Введение. Как хорошо известно, Енохс и Дженда ввели понятия кочистых инъективных и кочистых плоских модулей в статьях [1], [2], когда изучали инъективные преднакрытия и плоские предоболочки. Напомним, что левый R -модуль M называется *кочистым инъективным* [1], если $\text{Ext}_R^1(E, M) = 0$ для всех инъективных левых R -модулей E , и M называется *сильно кочистым инъективным* [1], если $\text{Ext}_R^i(E, M) = 0$ для всех инъективных левых R -модулей E и всех $i \geq 1$. Правый R -модуль N называется *кочистым плоским* [2], если $\text{Tor}_1^R(N, E) = 0$ для всех инъективных левых R -модулей E , и говорят, что N является *сильно кочистым плоским* [2], если $\text{Tor}_i^R(N, E) = 0$ для всех инъективных левых R -модулей E и всех $i \geq 1$. Многие свойства этих модулей были описаны в работах Енохса, Дженды, Сазиди, Динга и Мао, и т.д. [1]–[6]. В статье [2] кочистые инъективные и кочистые плоские модули сыграли важную роль в характеристизации n -мерных колец Горенштейна (т.е. R – левое и правое нетерово с $\text{id}({}_R R) \leq n$ и $\text{id}(R_R) \leq n$ для целого $n \geq 0$).

Правый ортогональный класс класса плоских модулей – это класс модулей кокручения. Модули кокручения оказались очень полезными для характеристики колец (см. [7], [8]). Естественным кажется рассмотреть роль левого ортогонального класса плоских модулей. В недавно опубликованной статье [9] Фу, Жу и Динг ввели понятие n -кочистых проективных модулей для фиксированного неотрицательно-го целого n . Левый R -модуль M называется n -кочистым проективным [9], если

Работа выполнена при поддержке NSFC (гранты №№ 11301042 и 11171240) и Научного исследовательского фонда Университета информационных технологий г. Чэнду (грант № J201217), а также NSFC (Tianyuan Fund for Mathematics) (грант № 11226057).

$\text{Ext}_R^1(M, F) = 0$ для любого левого R -модуля F с $\text{fd}_R(F) \leq n$, и говорят, что M является *сильно кочистым проективным* [9], если $\text{Ext}_R^i(M, F) = 0$ для всех плоских левых R -модулей F и всех $i \geq 1$. 0-Кочистые проективные модули называются *кочистыми проективными*. В [9; предложение 3.6] было доказано, что левый R -модуль M является n -кочистым проективным, если и только если M – коядро $\mathcal{F}_n$ -предоболочки $A \rightarrow B$ с проективным B . Статья также содержит некоторую характеристику совершенных колец и QF колец в терминах кочистых проективных модулей [9; теорема 3.11 и предложение 3.12].

Цель данной статьи – продолжить изучение n -кочистых проективных модулей. В разделе 2 даны несколько примеров, показывающих, что n -кочистые проективные модули лежат строго между проективными модулями и $(n - i)$ -кочистыми проективными модулями при $2 \leq i \leq n$. Далее мы характеризуем хорошо известные QF кольца и IF кольца в терминах n -кочистых проективных модулей. Показано, что R является QF кольцом, если и только если каждый (конечно порожденный) левый R -модуль является n -кочистым проективным, и если и только если каждый левый R -модуль N с $N \in \mathcal{F}_n$ является инъективным (теорема 2.11), а также, что левое когерентное кольцо R является правым IF кольцом, если и только если каждый конечно представленный левый R -модуль является n -кочистым проективным (теорема 2.13). И наконец, мы вводим понятие относительных левых наследственных колец и даем некоторую характеристику таких колец. А именно, мы показываем, что кольцо R является относительным левым наследственным, если и только если каждый подмодуль n -кочистого проективного левого R -модуля является n -кочистым проективным, а также если и только если каждый подмодуль проективного (или свободного) левого R -модуля является n -кочистым проективным, и если и только если $\text{id}_R(N) \leq 1$ для каждого левого R -модуля N с $N \in \mathcal{F}_n$ (теорема 2.14). Мы также обсуждаем отношения между относительными наследственными кольцами и хорошо изученными наследственными кольцами (предложение 2.16).

Сначала напомним несколько определений. Левый R -модуль M называется *FP-инъективным* (или *абсолютно чистым*) [10], [11], если $\text{Ext}_R^1(F, M) = 0$ для каждого конечно представленного левого R -модуля F . *FP-инъективная размерность*, $\text{FP-id}_R(M)$, левого R -модуля M – это наименьшее $n \geq 0$, для которого выполняется $\text{Ext}_R^{n+1}(F, M) = 0$ для всех конечно представленных левых R -модулей F . Если такого n не существует, положим $\text{FP-id}_R(M) = \infty$. $\text{FP-id}_R(R)$ ($\text{FP-id}(R_R)$) называется *левой (правой) само-FP-инъективной размерностью* R .

Пусть $\mathcal{F}$ – класс левых R -модулей. Обозначим

$${}^\perp \mathcal{F} = \{C \mid \text{Ext}_R^1(C, F) = 0 \text{ для всех } F \in \mathcal{F}\}$$

левый ортогональный класс $\mathcal{F}$. Следуя [4], будем говорить, что гомоморфизм $f: M \rightarrow F$ является *$\mathcal{F}$ -предоболочкой* левого R -модуля M , если $F \in \mathcal{F}$ и гомоморфизм абелевых групп $\text{Hom}_R(f, F'): \text{Hom}_R(F, F') \rightarrow \text{Hom}_R(M, F')$ является сюръективным для каждого $F' \in \mathcal{F}$. Говорят, что $\mathcal{F}$ -предоболочка $f: M \rightarrow F$ является *$\mathcal{F}$ -оболочкой*, если каждый эндоморфизм $g: F \rightarrow F$, для которого $gf = f$, является изоморфизмом. Двойственное рассуждение дает нам определения $\mathcal{F}$ -преднакрытия и $\mathcal{F}$ -накрытия. В общем случае $\mathcal{F}$ -оболочки ($\mathcal{F}$ -накрытия) могут не существовать, но если они существуют, то являются единственными с точностью до изоморфизма. Мао и Динг в [12; предложение 3.7] доказали, что если R является правым

когерентным, то $\text{FP-id}(R_R) \leq n$, если и только если каждый левый R -модуль имеет моническую $\mathcal{F}_n$ -предоболочку.

Везде в этой статье R обозначает ассоциативное кольцо с единицей и все модули являются унитарными. Для левого R -модуля M выражения $\text{fd}_R(M)$ и $\text{id}_R(M)$ обозначают плоскую и инъективную размерности соответственно. Мы используем сокращения $l.D(R)$ (соответственно, $wD(R)$) для обозначения левой глобальной размерности (соответственно, слабой глобальной размерности) кольца R . Не объясненные здесь понятия и обозначения читатель сможет найти в [4], [13], [14].

2. n -Кочистые проективные модули. В этом разделе мы рассмотрим n -кочистые проективные модули и опишем некоторые их свойства и приложения. Далее мы введем и изучим относительные наследственные кольца и установим связь между ними и хорошо изученными наследственными кольцами.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1 [9]. Пусть R – кольцо, а n – фиксированное неотрицательное целое число. Левый R -модуль M называется *n -кочистым проективным*, если $\text{Ext}_R^1(M, F) = 0$ для всех левых R -модулей F с $\text{fd}_R(F) \leq n$. Если $n = 0$, M называется *кочистым проективным*.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.2. (1) Из [9; замечание 3.3] следует, что все m -кочистые проективные модули являются n -кочистыми проективными, если $m \geq n$. Легко видеть, что n -кочистые проективные модули лежат строго между проективными модулями и $(n - i)$ -кочистыми проективными модулями при $2 \leq i \leq n$; см. примеры 2.3 и 2.4.

(2) Сю в [8; теорема 2.5.3] показал, что если R – коммутативное когерентное кольцо и $wD(R) \leq 2$, то каждый R -модуль имеет плоскую оболочку. Важное свойство плоских оболочек: их коядра являются кочистыми проективными согласно лемме Вакамуцу [8; лемма 2.1.1].

(3) Пусть R – коммутативное когерентное кольцо. В [12; следствие 3.8] было доказано, что $\text{FP-id}(R) \leq n$, если и только если $({}^\perp \mathcal{F}_n, \mathcal{F}_n)$ является полной наследственной теорией с кокручением. Таким образом, над коммутативным когерентным кольцом R с $\text{FP-id}(R) \leq n$ каждый R -модуль имеет специальную $\mathcal{F}_n$ -предоболочку, и все их коядра являются n -кочистыми проективными модулями.

Следующий пример показывает, что существуют кочистые проективные модули, не являющиеся проективными. Но сначала напомним, что кольцо R называется *квази-фробениусовым* (QF *кольцом* для краткости), если R является левым нетеровым и ${}_R R$ инъективно.

ПРИМЕР 2.3. Рассмотрим локальное QF кольцо $R = k[X]/(X^2)$, где k – некоторое поле, а $\bar{X}$ обозначает класс вычетов X в R . Тогда идеал $(\bar{X})$ является кочистым проективным модулем, но не является проективным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В случае коммутативных колец заметим, что 0-горенштейновы кольца совпадают с хорошо известными QF кольцами. Используя [15; пример 2.5] и [9; замечание 3.3(2)], легко увидеть, что $(\bar{X})$ является кочистым проективным, но не является проективным.

В общем случае $(n - i)$ -кочистые проективные модули не обязательно будут n -кочистыми проективными при $2 \leq i \leq n$.

ПРИМЕР 2.4. Выберем поле F и положим $F_i = F$ при $i = 1, 2, \dots$, $S = \prod_{i=1}^{\infty} F_i$. Тогда S – коммутативное регулярное кольцо фон Неймана. Пусть $R = S[X_1, X_2, \dots]$,

$X_n]$, где $n \geq 2$, – кольцо полиномов от n переменных над S . Тогда R является когерентным кольцом с $wD(R) = n \geq 2$ (см. [16; теорема 7.3.1]) и согласно [11; теорема 3.3], класс всех левых R -модулей $= \mathcal{F}_n \neq \mathcal{F}_{n-j}$ для любого $1 \leq j \leq n$. Поэтому класс n -кочистых проективных левых R -модулей совпадает с классом проективных левых R -модулей. Мы утверждаем, что все $(n-1)$ -кочистые проективные левые R -модули также являются проективными. Действительно, пусть M – $(n-1)$ -кочистый проективный левый R -модуль. Тогда существует точная последовательность $0 \rightarrow K \rightarrow P \rightarrow M \rightarrow 0$, в которой P проективен. Отсюда следует, что $\text{fd}_R(K) \leq n-1$. Таким образом, $\text{Ext}_R^1(M, K) = 0$, поскольку M является $(n-1)$ -кочистым проективным. Отсюда имеем, что последовательность $0 \rightarrow K \rightarrow P \rightarrow M \rightarrow 0$ расщепляется, и поэтому M проективен. Далее, $\text{FP-id}(R) \leq n$, согласно [11; предложение 3.5]. Тогда $({}^\perp \mathcal{F}_n, \mathcal{F}_n)$ оказывается полной наследственной теорией с кокручением, что следует из [12; следствие 3.8], и поэтому существует $(n-i)$ -кочистый проективный левый R -модуль ($2 \leq i \leq n$), не являющийся n -кочистым проективным.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.5. Пусть R – кольцо с $wD(R) \leq n+1$. Тогда класс n -кочистых проективных левых R -модулей совпадает с классом проективных левых R -модулей.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Простое следствие из [9; предложение 3.4].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.6. Пусть I – произвольный набор индексов, а $(M_i)_{i \in I}$ – семейство левых R -модулей. Тогда $\bigoplus_{i \in I} M_i$ является n -кочистым проективным, если и только если каждый M_i n -кочистый проективный.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Результат следует из изоморфизма

$$\text{Ext}_R^1\left(\bigoplus_{i \in I} M_i, F\right) \cong \prod_{i \in I} \text{Ext}_R^1(M_i, F)$$

для любого $F \in \mathcal{F}_n$ согласно [14; теорема 7.13].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.7. В точной последовательности левых R -модулей $0 \rightarrow A_1 \rightarrow A_2 \rightarrow A_3 \rightarrow 0$, если A_1 и A_3 являются n -кочистыми проективными, то и A_2 тоже n -кочистый проективный.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любого $F \in \mathcal{F}_n$ результат получается немедленно, если использовать функтор $\text{Ext}_R^1(-, F)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.8. Пусть R – коммутативное кольцо, а P – конечно порожденный проективный R -модуль. Если M – n -кочистый проективный R -модуль, то $\text{Hom}_R(P, M)$ и $P \otimes_R M$ являются n -кочистыми проективными.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть M – n -кочистый проективный R -модуль, а P – конечно порожденный проективный R -модуль. Рассмотрим следующий изоморфизм:

$$P \otimes_R \text{Ext}_R^1(M, N) \cong \text{Ext}_R^1(\text{Hom}_R(P, M), N).$$

Тогда для любого $N \in \mathcal{F}_n$ получаем $\text{Ext}_R^1(M, N) = 0$, поскольку M является n -кочистым проективным. Отсюда следует, что $\text{Ext}_R^1(\text{Hom}_R(P, M), N) = 0$, и поэтому $\text{Hom}_R(P, M)$ является n -кочистым проективным.

Теперь рассмотрим следующий изоморфизм:

$$\text{Ext}_R^1(P \otimes_R M, N) \cong \text{Hom}_R(P, \text{Ext}_R^1(M, N)).$$

Тогда $\text{Ext}_R^1(P \otimes_R M, N) = 0$; следовательно, $P \otimes_R M$ является n -кочистым проективным, что и требовалось.

Легко проверить следующий результат, который понадобится нам для доказательства предложения 2.10.

ЛЕММА 2.9. Пусть R – произвольное кольцо и $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ – короткая точная последовательность левых R -модулей. Тогда

- (1) если любые два из модулей A , B , или C имеют конечную плоскую размерность, то и третий тоже;
- (2) $\text{fd}_R(A) \leq \max\{\text{fd}_R(B), \text{fd}_R(C) - 1\}$;
- (3) $\text{fd}_R(B) \leq \max\{\text{fd}_R(A), \text{fd}_R(C)\}$;
- (4) $\text{fd}_R(C) \leq \max\{\text{fd}_R(B), \text{fd}_R(A) + 1\}$.

Аналогично [9; предложение 5.1] имеем

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.10. Пусть R – правое когерентное кольцо с $\text{FP-id}(R_R) \leq n$ и $n \geq 1$. Если M является n -кочистым проективным левым R -модулем, то существует точная последовательность $0 \rightarrow K \rightarrow P \rightarrow M \rightarrow 0$, где P проективен, а K является $(n - 1)$ -кочистым проективным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть M – n -кочистый проективный левый R -модуль, и $0 \rightarrow K \rightarrow P \rightarrow M \rightarrow 0$ – точная последовательность левых R -модулей с проективным P . Для любого $F \in \mathcal{F}_{n-1}$ имеем следующую точную последовательность:

$$0 = \text{Ext}_R^1(P, F) \rightarrow \text{Ext}_R^1(K, F) \rightarrow \text{Ext}_R^2(M, F) \rightarrow \text{Ext}_R^2(P, F) = 0.$$

Пусть $0 \rightarrow F \rightarrow E \rightarrow L_1 \rightarrow 0$ точна, а E инъективен. Тогда $\text{fd}_R(E) \leq n$ согласно [17; теоремы 3.5, 3.8], а отсюда $\text{fd}_R(L_1) \leq n$ по лемме 2.9. Следовательно, $\text{Ext}_R^2(M, F) \cong \text{Ext}_R^1(M, L_1) = 0$. Поэтому $\text{Ext}_R^1(K, F) = 0$, откуда получаем, что K – $(n - 1)$ -кочистый проективный.

В [9; предложение 3.12] было показано, что R является QF кольцом, если и только если каждый правый R -модуль кочистый проективный. В следующей теореме мы даем новую характеристику QF колец с помощью n -кочистых проективных модулей.

ТЕОРЕМА 2.11. Следующие утверждения эквивалентны для кольца R и фиксированного неотрицательного целого n :

- (1) R – QF кольцо;
- (2) каждый левый R -модуль N с $N \in \mathcal{F}_n$ является инъективным;
- (3) каждый левый R -модуль является n -кочистым проективным;
- (4) каждый конечно порожденный левый R -модуль является n -кочистым проективным;
- (5) каждый циклический левый R -модуль является n -кочистым проективным;
- (6) каждый фактормодуль инъективного левого R -модуля является n -кочистым проективным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. $(1) \Rightarrow (2)$ очевидно следует из [17; теорема 3.8], $(3) \Rightarrow (4) \Rightarrow (5)$ и $(3) \Rightarrow (6)$ тривиальны. Теперь покажем, что $(2) \Rightarrow (1)$, $(2) \Rightarrow (3)$, $(5) \Rightarrow (2)$ и $(6) \Rightarrow (2)$, и таким образом получим, что утверждения (1)–(6) взаимно эквивалентны.

$(2) \Rightarrow (1)$ Пусть P – проективный левый R -модуль. Очевидно, что $P \in \mathcal{F}_n$, и поэтому P инъективен. Отсюда немедленно следует (1), согласно [13; теорема 31.9].

$(2) \Rightarrow (3)$ Пусть M – левый R -модуль. Для любого $N \in \mathcal{F}_n$ получаем, что N инъективен согласно (2). Тогда $\text{Ext}_R^1(M, N) = 0$, и поэтому M является n -кочистым проективным.

$(5) \Rightarrow (2)$ Предположим, что N – левый R -модуль с $N \in \mathcal{F}_n$ и I – произвольный левый идеал R . Тогда $\text{Ext}_R^1(R/I, N) = 0$ согласно (5). Отсюда N инъективен, и выполняется утверждение (2).

$(6) \Rightarrow (2)$ Для любого $F \in \mathcal{F}_n$ существует точная последовательность $0 \rightarrow F \rightarrow E \rightarrow L \rightarrow 0$ с инъективным E . Тогда L является n -кочистым проективным согласно (6), а отсюда следует $\text{Ext}_R^1(L, F) = 0$. Поэтому последовательность $0 \rightarrow F \rightarrow E \rightarrow L \rightarrow 0$ расщепляется, и мы получаем, что F инъективен, что и требовалось.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.12. Из теоремы 2.11 легко увидеть, что существует много n -кочистых проективных модулей, не являющихся проективными. Действительно, пусть R – не полупростое QF кольцо. Тогда существует R -модуль, не являющийся проективным. С другой стороны, по теореме 2.11 каждый R -модуль является n -кочистым проективным.

Напомним, что в [18] кольцо R называется *правым IF*, если каждый инъективный правый R -модуль является плоским. Хорошо известно, что если R является левым когерентным кольцом, то R будет правым IF, если и только если R левое FP-инъективное (см. [19; теорема 3.10]). В следующей теореме дается характеристизация таких колец.

ТЕОРЕМА 2.13. *Пусть R – левое когерентное кольцо. Тогда R является правым IF кольцом, если и только если каждый конечно представленный левый R -модуль является n -кочистым проективным.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. *Достаточность.* Пусть P – произвольный конечно представленный левый R -модуль. Тогда P – n -кочистый проективный по предположению теоремы. Для любого $N \in \mathcal{F}_n$ имеем $\text{Ext}_R^1(P, N) = 0$. Отсюда следует, что N является FP-инъективным, и поэтому R правое IF, согласно [17; теорема 3.8], так как R является левым когерентным.

Необходимость. Предположим, что R – правое IF кольцо, а P – конечно представленный левый R -модуль. Для любого $N \in \mathcal{F}_n$ модуль N FP-инъективен по [17; теорема 3.8]. Отсюда $\text{Ext}_R^1(P, N) = 0$, и поэтому P n -кочистый проективный, что и требовалось.

Далее мы дадим определение и будем изучать относительные наследственные кольца. Но сначала напомним, что кольцо R называется *левым наследственным* [14], если каждый левый идеал является проективным. Известно, что кольцо R является левым наследственным, если и только если каждый подмодуль проективного левого R -модуля проективен (см. [14; теорема 4.23]). Будем говорить, что кольцо R является *относительным левым наследственным*, если каждый левый идеал R является n -кочистым проективным. Следующая теорема дает характеристизацию таких колец.

ТЕОРЕМА 2.14. Следующие утверждения для кольца R эквивалентны:

- (1) каждый подмодуль произвольного n -кочистого проективного левого R -модуля n -кочистый проективный;
- (2) каждый подмодуль произвольного проективного левого R -модуля n -кочистый проективный;
- (3) каждый подмодуль произвольного свободного левого R -модуля n -кочистый проективный;
- (4) $\text{id}_R(N) \leq 1$ для каждого левого R -модуля N с $N \in \mathcal{F}_n$;
- (5) R относительно левое наследственное.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) тривиальны.

(3) $\Rightarrow$ (1) Пусть N – подмодуль n -кочистого проективного левого R -модуля M . Тогда существует точная последовательность $0 \rightarrow N \rightarrow M \xrightarrow{g} M/N \rightarrow 0$. Предположим, что P – свободный левый R -модуль и $\alpha: P \rightarrow M$ – сюръекция. Тогда $f = g\alpha$ сюръективно. Положим $K = \ker(f)$. Тогда получится следующая коммутативная диаграмма, строки которой – точные последовательности:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & K & \longrightarrow & P & \xrightarrow{f} & M/N & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow \alpha & & \parallel & & \\ 0 & \longrightarrow & N & \longrightarrow & M & \xrightarrow{g} & M/N & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Обратите внимание, что первый квадрат в диаграмме отображает спуск, откуда $0 \rightarrow K \rightarrow P \oplus N \rightarrow M \rightarrow 0$ – точная последовательность. Так как K – n -кочистый проективный согласно (3), получаем, что $P \oplus N$ является n -кочистым проективным, как следует из предложения 2.7. Отсюда N – n -кочистый проективный согласно предложению 2.6, и утверждение (1) выполняется.

(2) $\Rightarrow$ (4) Пусть X – произвольный левый R -модуль. Существует точная последовательность $0 \rightarrow N \rightarrow P \rightarrow X \rightarrow 0$ с проективным P . Тогда N является n -кочистым проективным согласно (2). Для любого $F \in \mathcal{F}_n$, применив $\text{Hom}_R(-, F)$ к $0 \rightarrow N \rightarrow P \rightarrow X \rightarrow 0$, получим точность последовательности

$$0 = \text{Ext}_R^1(N, F) \rightarrow \text{Ext}_R^2(X, F) \rightarrow \text{Ext}_R^2(P, F) = 0.$$

Таким образом, $\text{Ext}_R^2(X, F) = 0$, и поэтому $\text{id}_R(F) \leq 1$, что и требовалось.

(4) $\Rightarrow$ (2) Пусть $0 \rightarrow A \rightarrow P \rightarrow C \rightarrow 0$ – точная последовательность левых R -модулей, где P проективен. Для любого $F \in \mathcal{F}_n$ имеем следующую точную последовательность:

$$0 = \text{Ext}_R^1(P, F) \rightarrow \text{Ext}_R^1(A, F) \rightarrow \text{Ext}_R^2(C, F) = 0,$$

как следует из (4). Поэтому $\text{Ext}_R^1(A, F) = 0$, и отсюда A – n -кочистый проективный. Поэтому (2) верно.

(3) $\Rightarrow$ (5) Верно, поскольку каждый идеал R является подмодулем R .

(5) $\Rightarrow$ (4) Предположим, что I – левый идеал R , а $F \in \mathcal{F}_n$. Тогда $0 \rightarrow I \rightarrow R \rightarrow R/I \rightarrow 0$ – точная последовательность. Так как I – n -кочистый проективный, как следует из (5), имеем $\text{Ext}_R^2(R/I, F) \cong \text{Ext}_R^1(I, F) = 0$. Отсюда $\text{id}_R(F) \leq 1$, и (4) выполняется.

Очевидно, что каждое левое наследственное кольцо является относительным левым наследственным, но обратное в общем случае неверно, как показывает следующий пример.

ПРИМЕР 2.15. Рассмотрим не полупростое QF кольцо R ; например, пусть $R = k[X]/(X^2)$, где k – произвольное поле. Если A – подмодуль проективного левого R -модуля P , то последовательность $0 \rightarrow A \rightarrow P$ точна. Поскольку каждый левый R -модуль является n -кочистым проективным над QF кольцом R по теореме 2.11, A тоже n -кочистый проективный. Таким образом, R – относительное левое наследственное по теореме 2.14. Однако кольцо R не является левым наследственным. Действительно, существует левый R -модуль, не являющийся проективным, иначе кольцо R было бы полупростым, что невозможно по условию. С другой стороны, согласно [20; предложение 2.6] каждый R -модуль является проективным модулем Горенштейна. Пусть M – левый R -модуль, не являющийся проективным. Существует короткая точная последовательность $0 \rightarrow K \rightarrow P' \rightarrow M \rightarrow 0$, где P' проективен. Если R левое наследственное, то K проективен. Из [21; предложение 2.3] следует, что $\text{Ext}_R^1(M, K) = 0$, поскольку M – проективный модуль Горенштейна. Тогда последовательность $0 \rightarrow K \rightarrow P' \rightarrow M \rightarrow 0$ расщепляется, и поэтому M проективен; получаем противоречие.

Рассмотрим теперь отношения между классом относительных левых наследственных колец и хорошо изученным классом левых наследственных колец.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.16. Пусть R – произвольное кольцо, Тогда следующие утверждения эквивалентны:

- (1) R – относительное левое наследственное и $wD(R) \leq 1$;
- (2) R – относительное левое наследственное и $wD(R) \leq n + 1$;
- (3) R – относительное левое наследственное и каждый n -кочистый проективный левый R -модуль является проективным;
- (4) R – левое наследственное.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) $\Rightarrow$ (2) тривиально.

(2) $\Rightarrow$ (3) Пусть M – произвольный n -кочистый проективный левый R -модуль. Тогда существует точная последовательность $0 \rightarrow K \rightarrow P \rightarrow M \rightarrow 0$ с проективным P . Обратите внимание, что согласно (2) $wD(R) \leq n + 1$, откуда следует $\text{fd}_R(K) \leq n$. Поэтому последовательность $0 \rightarrow K \rightarrow P \rightarrow M \rightarrow 0$ расщепляется, поскольку $\text{Ext}_R^1(M, K) = 0$. Отсюда получаем, что M проективный, и выполняется (3).

(3) $\Rightarrow$ (4) Пусть A – произвольный левый R -модуль. Тогда существует точная последовательность $0 \rightarrow K \rightarrow P \rightarrow A \rightarrow 0$ с проективным P . Поскольку кольцо R – относительное левое наследственное, K будет n -кочистым проективным согласно теореме 2.14. Поэтому из (3) следует, что K проективен. Отсюда $D(R) \leq 1$, и поэтому кольцо R левое наследственное.

(4) $\Rightarrow$ (1) Предположим, что кольцо R левое наследственное. Тогда $D(R) \leq 1$ и R будет относительным левым наследственным по определению. Так как $wD(R) \leq D(R) \leq 1$, должно выполняться (1).

ЗАМЕЧАНИЕ 2.17. Подчеркнем, что если каждый n -кочистый проективный левый R -модуль является проективным, то R не обязательно должно быть относительным левым наследственным. Например, пусть R – полунаследственное, но не

наследственное кольцо; тогда $wD(R) \leq 1$. Следовательно, согласно предложению 2.5 все $(n-)$ кочистые проективные левые R -модули являются проективными. Из предложения 2.16 следует, что в этом случае R не является относительным левым наследственным.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] E. E. Enochs, O. M. G. Jenda, “Copure injective modules”, *Quaestiones Math.*, **14**:4 (1991), 401–409.
- [2] E. E. Enochs, O. M. G. Jenda, “Copure injective resolutions, flat resolvents and dimensions”, *Comment. Math. Univ. Carolin.*, **34**:2 (1993), 203–211.
- [3] N. Q. Ding, J. L. Chen, “On copure flat modules and flat resolvents”, *Comm. Algebra*, **24**:3 (1996), 1071–1081.
- [4] E. E. Enochs, O. M. G. Jenda, *Relative Homological Algebra*, de Gruyter Exp. Math., **30**, Walter de Gruyter, Berlin, 2000.
- [5] L. X. Mao, N. Q. Ding, “Relative copure injective and copure flat modules”, *J. Pure Appl. Algebra*, **208**:2 (2007), 635–646.
- [6] R. Sazeedeh, “Strongly torsion free, copure flat and Matlis reflexive modules”, *J. Pure Appl. Algebra*, **192**:1-3 (2004), 265–274.
- [7] L. X. Mao, N. Q. Ding, “Cotorsion modules and relative pure-injectivity”, *J. Aust. Math. Soc.*, **81**:2 (2006), 225–243.
- [8] J. Z. Xu, *Flat Covers of Modules*, Lecture Notes in Math., **1634**, Springer-Verlag, Berlin, 1996.
- [9] X. H. Fu, H. Y. Zhu, N. Q. Ding, “On copure projective modules and copure projective dimensions”, *Comm. Algebra*, **40**:1 (2012), 343–359.
- [10] B. H. Maddox, “Absolutely pure modules”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **18** (1967), 155–158.
- [11] B. Stenström, “Coherent rings and FP-injective modules”, *J. London Math. Soc.* (2), **2** (1970), 323–329.
- [12] L. X. Mao, N. Q. Ding, “Envelopes and covers by modules of finite FP-injective and flat dimensions”, *Comm. Algebra*, **35**:3 (2007), 833–849.
- [13] F. W. Anderson, K. R. Fuller, *Rings and Categories of Modules*, Grad. Texts in Math., **13**, Springer, New York, 1992.
- [14] J. J. Rotman, *An Introduction to Homological Algebra*, Pure Appl. Math., **85**, Academic Press, New York, 1979.
- [15] D. Bennis, N. Mahdou, “Strongly Gorenstein projective, injective, and flat modules”, *J. Pure Appl. Algebra*, **210**:2 (2007), 437–445.
- [16] S. Glaz, “Commutative Coherent Rings”, Lecture Notes in Math., **1371**, Springer-Verlag, Berlin, 1989.
- [17] N. Q. Ding, J. L. Chen, “The flat dimensions of injective modules”, *Manuscripta Math.*, **78**:2 (1993), 165–177.
- [18] R. R. Colby, “Rings which have flat injective modules”, *J. Algebra*, **35** (1975), 239–252.
- [19] S. Jain, “Flat and FP-injectivity”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **41** (1973), 437–442.
- [20] D. Bennis, N. Mahdou, “Global Gorenstein dimensions”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **138**:2 (2010), 461–465.
- [21] H. Holm, “Gorenstein homological dimensions”, *J. Pure Appl. Algebra*, **189**:1-3 (2004), 167–193.

Женгху Гао

Chengdu University of Information Technology, China

E-mail: gaozenghui@cuit.edu.cn

Поступило

15.12.2012

Исправленный вариант

14.05.2014