Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. З. Гринес, Ю. А. Левченко, О. В. Починка, О топологической классификации структурно устойчивых 3-диффеоморфизмов с двумерными базисными множествами, *Матем. заметки*, 2015, том 97, выпуск 2, 318–320

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10574>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.135.184

26 апреля 2023 г., 12:39:01

О топологической классификации структурно устойчивых 3-диффеоморфизмов с двумерными базисными множествами

В. З. Гринес, Ю. А. Левченко, О. В. Починка

В работе рассматриваются диффеоморфизмы, заданные на гладком замкнутом ориентируемом 3-многообразии M^3 и удовлетворяющие аксиоме А Смейла (А-диффеоморфизмы). Согласно спектральной теореме Смейла [1], неблуждающее множество $NW(f)$ А-диффеоморфизма f представляется в виде объединения конечного числа попарно непересекающихся замкнутых инвариантных множеств, называемых *базисными*, каждое из которых содержит всюду плотную траекторию. Условие нульмерности или одномерности базисного множества А-диффеоморфизма $f: M^3 \rightarrow M^3$ не накладывает ограничений на топологию объемлющего многообразия. В случае, когда $NW(f)$ содержит базисное множество $\mathcal{B}$ размерности больше единицы, это не так. Если $\dim \mathcal{B} = 3$, то f является диффеоморфизмом Аносова, многообразие M^3 диффеоморфно трехмерному тору $\mathbb{T}^3$, и топологическая классификация таких диффеоморфизмов была получена Фрэнксом и Ньюхаусом в [2], [3]. Если $\dim \mathcal{B} = 2$, то, согласно [4], $\mathcal{B}$ является либо аттрактором, либо репеллером. В этом случае топология объемлющего многообразия зависит от топологической структуры множества $\mathcal{B}$.

Напомним, что базисное множество $\mathcal{B}$ диффеоморфизма f называется *аттрактором*, если существует замкнутая окрестность U множества $\mathcal{B}$ такая, что

$$f(U) \subset \text{int } U, \quad \bigcap_{j \geq 0} f^j(U) = \mathcal{B}.$$

Аттрактор для диффеоморфизма f^{-1} называется *репеллером* диффеоморфизма f . Согласно [5] аттрактор $\mathcal{B}$ диффеоморфизма f называется *растягивающимся*, если топологическая размерность $\dim \mathcal{B}$ равна размерности неустойчивого многообразия W_x^u для любой точки $x \in \mathcal{B}$. *Сжимающийся репеллер* диффеоморфизма f определяется как растягивающийся аттрактор для f^{-1} . Согласно [6] базисное множество $\mathcal{B}$ диффеоморфизма $f: M^3 \rightarrow M^3$ называется *поверхностным*, если оно принадлежит f -инвариантной замкнутой поверхности $M_{\mathcal{B}}^2$ (не обязательно связной), топологически вложенной в многообразие M^3 и называемой *носителем* множества $\mathcal{B}$.

Из работы [7] следует, что любой двумерный аттрактор (репеллер) А-диффеоморфизма $f: M^3 \rightarrow M^3$ является либо растягивающимся аттрактором (сжимающимся репеллером), либо поверхностным аттрактором (поверхностным репеллером). Из [8] и [9] следует, что любое многообразие M^3 , допускающее структурно устойчивый диффеоморфизм $f: M^3 \rightarrow M^3$ с двумерным растягивающимся аттрактором (сжимающимся репеллером), диффеоморфно трехмерному тору $\mathbb{T}^3$, и, более того, f топологически сопряжен с диффеоморфизмом, полученным из диффеоморфизма Аносова с помощью обобщенной хирургической операции Смейла.

В настоящей работе рассматривается класс G , состоящий из сохраняющих ориентацию А-диффеоморфизмов $f: M^3 \rightarrow M^3$, неблуждающее множество которых состоит только из двумерных поверхностных базисных множеств и для любого базисного множества $\mathcal{B}$ периода k ограничение диффеоморфизма f^k на его периодическую компоненту сохраняет ее ориентацию. Напомним, что базисное множество $\mathcal{B}$ представляется в виде объединения $\mathcal{B}_1 \cup \dots \cup \mathcal{B}_k$, $k \geq 1$ замкнутых подмножеств таких, что

$$f^k(\mathcal{B}_i) = \mathcal{B}_i, \quad f(\mathcal{B}_i) = \mathcal{B}_{i+1}$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты №№ 12-01-00672, 13-01-12452-офи-м, 15-01-03687-а) и Российского научного фонда (грант № 14-41-00044).

DOI: 10.4213/mzm10574

© В. З. Гринес, Ю. А. Левченко, О. В. Починка, 2015

$(\mathcal{B}_{k+1} = \mathcal{B}_1)$. Множества $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_k$ называются *периодическими компонентами*, а число k – *периодом* базисного множества $\mathcal{B}$.

Обозначим через $\mathcal{A}(\mathcal{R})$ объединение всех аттракторов (репеллеров), принадлежащих $NW(f)$. В силу [10] для любого диффеоморфизма $f \in G$ имеют место следующие утверждения:

- 1) множества $\mathcal{A}, \mathcal{R}$ не пусты и состоят из одинакового числа $n_f \geq 1$ базисных множеств;
- 2) все периодические компоненты базисных множеств имеют один и тот же период $k_f \geq 1$;
- 3) множество $M^3 \setminus (\mathcal{A} \cup \mathcal{R})$ состоит из $2n_f k_f$ компонент связности, граница каждой из которых состоит в точности из одной периодической компоненты аттрактора и одной периодической компоненты репеллера, а ее замыкание гомеоморфно многообразию $\mathbb{T}^2 \times [0, 1]$.

Из утверждения 3) следует, что многообразие M^3 гомеоморфно фактор-пространству M_τ , полученному из $\mathbb{T}^2 \times [0, 1]$ отождествлением точек $(z, 1)$ и $(\tau(z), 0)$, где $\tau: \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ – некоторый гомеоморфизм.

ТЕОРЕМА 1. Пусть многообразие M^3 допускает диффеоморфизм f из класса G . Тогда M^3 диффеоморфно многообразию $M_{\hat{J}}$, где $\hat{J}$ алгебраический автоморфизм тора, заданный матрицей J , которая либо является гиперболической, либо совпадает с единичной матрицей

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

либо совпадает с матрицей

$$-I = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Представим многообразие $M_{\hat{J}}$ как пространство орбит $M_{\hat{J}} = (\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R})/\Gamma$, где $\Gamma = \{\gamma^k, k \in \mathbb{Z}\}$ – группа степеней диффеоморфизма $\gamma: \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}$, заданного формулой

$$\gamma(z, r) = (\hat{J}(z), r - 1).$$

Обозначим через $p_{\hat{J}}: \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow M_{\hat{J}}$ естественную проекцию.

Введем класс $\Phi \subset G$ модельных диффеоморфизмов. Напомним, что $SL(2, \mathbb{Z})$ является подмножеством множества $GL(2, \mathbb{Z})$, состоящим из гиперболических матриц с определителем 1. Пусть $C \in SL(2, \mathbb{Z})$ – гиперболическая матрица такая, что $CJ = JC$. Для $n, k \in \mathbb{N}$ обозначим через $\psi_{n,k}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ диффеоморфизм, являющийся сдвигом на единицу времени потока $\dot{r} = \sin 2\pi nkr$. Для $k = 1$ положим $l = 0$ и для $k > 1$ пусть $l \in \{1, \dots, k-1\}$ – натуральное число, взаимно простое с k . Обозначим через $\chi_{k,l}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ диффеоморфизм, заданный формулой

$$\chi_{k,l}(r) = r - \frac{l}{k}.$$

Положим $\varphi_{n,k,l} = \psi_{n,k}\chi_{k,l}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Обозначим через $\tilde{\phi}_{C,n,k,l}: \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}$ диффеоморфизм, заданный формулой

$$\tilde{\phi}_{C,n,k,l}(z, r) = (\hat{C}(z), \varphi_{n,k,l}(r)).$$

Непосредственно проверяется, что $\tilde{\phi}_{C,n,k,l}\gamma = \gamma\tilde{\phi}_{C,n,k,l}$, откуда следует, что отображение $\phi_{C,n,k,l}: M_{\hat{J}} \rightarrow M_{\hat{J}}$, заданное формулой

$$\phi_{C,n,k,l} = p_{\hat{J}}\tilde{\phi}_{C,n,k,l}p_{\hat{J}}^{-1},$$

где $p_{\hat{J}}^{-1}(x)$ полный прообраз точки x , является диффеоморфизмом. Обозначим через Φ множество таких диффеоморфизмов. Из конструкции следует, что любой диффеоморфизм из класса Φ является структурно устойчивым.

ТЕОРЕМА 2. Два диффеоморфизма $\phi_{C,n,k,l}: M_{\widehat{J}} \rightarrow M_{\widehat{J}}$, $\phi_{C',n',k',l'}: M_{\widehat{J}'} \rightarrow M_{\widehat{J}'}$ из класса Φ топологически сопряжены тогда и только тогда, когда

- 1) существует матрица $H \in \text{GL}(2, \mathbb{Z})$ такая, что $CH = HC'$,
- 2) $k = k'$, $n = n'$ и выполнено хотя бы одно из следующих условий:
 - $JH = HJ'$ и $l = l'$,
 - $J^{-1}H = HJ'$ и $k - l = l'$,
 - $J^{-1}H = HJ'$ и $l = l' = 0$.

Напомним, что два диффеоморфизма $f: M^n \rightarrow M^n$, $f': M'^n \rightarrow M'^n$ называются Ω -сопряженными, если существует гомеоморфизм $h: M^n \rightarrow M'^n$ такой, что

$$h(NW(f)) = NW(f'), \quad hf|_{NW(f)} = f'h|_{NW(f)}.$$

ТЕОРЕМА 3. Любой диффеоморфизм из класса G является Ω -сопряженным некоторому диффеоморфизму из класса Φ .

ТЕОРЕМА 4. Любой структурно-устойчивый диффеоморфизм из класса G топологически сопряжен некоторому диффеоморфизму из класса Φ .

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] С. Смейл, *УМН*, **25:1** (1970), 113–185. [2] J. Franks, *Global Analysis*, Proc. Symp. in Pure Math., **14**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1970, 61–93. [3] S. E. Newhouse, *Amer. J. Math.*, **92:3** (1970), 761–770. [4] Р. В. Плыкин, *Матем. сб.*, **84:2** (1971), 301–312. [5] R. F. Williams, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, **43** (1974), 169–203. [6] В. З. Гринес, В. С. Медведев, Е. В. Жужома, *Матем. заметки*, **78:6** (2005), 813–826. [7] A. W. Brown, *J. Mod. Dyn.*, **4:3** (2010), 517–548. [8] V. Grines, E. Zhuzhoma, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **357:2** (2005), 617–667. [9] V. Medvedev, E. Zhuzhoma, *J. Dyn. Control Syst.*, **11:3** (2005), 405–411. [10] В. З. Гринес, В. С. Медведев, Ю. А. Левченко, *Журнал СВМО*, **12:2** (2010), 7–13.

В. З. Гринес

Нижегородский государственный
университет им. Н. И. Лобачевского
E-mail: vgrines@yandex.ru

Поступило

10.01.2014

Исправленный вариант

27.05.2014

Ю. А. Левченко

Нижегородский государственный
университет им. Н. И. Лобачевского
E-mail: ulev4enko@gmail.com

О. В. Починка

Национальный исследовательский
университет “Высшая школа экономики”
E-mail: olga-pochinka@yandex.ru