Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Устинов, Об одном обобщении сумм Клостермана,
Матем. заметки, 2015, том 97, выпуск 1, 154–157

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10575>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.12

26 апреля 2023 г., 13:17:19

Об одном обобщении сумм Клостермана

А. В. Устинов

Для целых u, v и натурального q суммы Клостермана определяются равенством

$$K_q(u, v) = \sum_{z=1}^q{}^* e\left(\frac{uz + vz^{-1}}{q}\right),$$

где $e(x) = e^{2\pi i x}$, и знак звездочки означает, что суммирование проходит по приведенной системе вычетов по модулю q .

Используя оценку Вейля (см. [1])

$$|K_p(u, v)| \leq 2p^{1/2},$$

где p – простое число, $p \nmid (u, v)$, Эстерман доказал (см. [2]), что для произвольного натурального q

$$|K_q(u, v)| \leq \tau(q)(u, v, q)^{1/2} q^{1/2} \quad (1)$$

($\tau(q)$ – число делителей q). Эта оценка применяется во многих теоретико-числовых задачах, см. обзор [2]. В связи с изучением распределения решений уравнения $\det X = N$, где N – растущее натуральное число, а X – матрица 3×3 с целыми коэффициентами, возникает необходимость рассматривать суммы более общего вида (см. [1])

$$K_{q,d}(u, v; w) = \sum_{\substack{z=1 \\ z \equiv w \pmod{d}}}^q{}^* e\left(\frac{uz + vz^{-1}}{q}\right), \quad (2)$$

где d – натуральное число и $d \mid q$. Сумма $K_{q,d}(u, v; w)$ совпадает с суммой Клостермана $K_q(u, v)$ при $d = 1$.

Метод доказательства оценки (1), предложенный в статье [2], можно применить и для оценки сумм (2). Всегда будем предполагать, что $w \in \mathbb{Z}_d^*$, поскольку в противном случае сумма $K_{q,d}(u, v; w)$ пуста. Через $\delta_q(n)$ будем обозначать характеристическую функцию делимости на q :

$$\delta_q(n) = \begin{cases} 1, & \text{если } n \equiv 0 \pmod{q}, \\ 0, & \text{если } n \not\equiv 0 \pmod{q}. \end{cases}$$

ТЕОРЕМА 1. Пусть $D = (d, q/d)$ и $w \in \mathbb{Z}_d^*$. Тогда

$$|K_{q,d}(u, v; w)| \leq \delta_D(u - vw^{-2}) \tau(q)(u, v, q)^{1/2} q^{1/2}. \quad (3)$$

Доказательству теоремы предположим несколько вспомогательных утверждений.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Суммы Клостермана обладают свойством мультипликативности по q . Если $q = q_1 q_2$, $(q_1, q_2) = 1$, то с помощью замены $z = z_1 q_2 + z_2 q_1$, $1 \leq z_1 \leq q_1$, $1 \leq z_2 \leq q_2$, проверяется равенство

$$K_q(u, v) = K_{q_1}(u, v_1) K_{q_2}(u, v_2),$$

где $v = v_1 q_2^2 + v_2 q_1^2$ (см. [3; § 5.6]). Аналогично при тех же предположениях проверяется и мультипликативное свойство сумм (2):

$$K_{q,d}(u, v; w) = K_{q_1, d_1}(u, v_1; w_1) K_{q_2, d_2}(u, v_2; w_2), \quad (4)$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 14-01-900025 Бел_а) и фонда “Династия”.

DOI: 10.4213/mzm10575

где

$$d_1 = (d, q_1), \quad d_2 = (d, q_2), \quad w_1 \equiv wq_2^{-1} \pmod{d_1}, \quad w_2 \equiv wq_1^{-1} \pmod{d_2}.$$

Поскольку обе части неравенства (3) являются мультипликативными функциями от q , теорему 1 достаточно проверить в случае, когда q есть степень простого числа.

В частности, из равенства (4) следует, что

$$K_{q,d}(0, 0; w) = \begin{cases} \frac{\varphi(q)}{\varphi(d)}, & \text{если } (w, d) = 1; \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Если p – простое число, $q = p^m$, $d = p^\alpha$ ($\alpha \leq m$), то при $\alpha = 0$ оценка (3) совпадает с неравенством (1), поэтому достаточно ограничиться рассмотрением случая $1 \leq \alpha \leq m$.

ЛЕММА 1. Пусть p – простое число и $(w, p) = 1$. Тогда

$$(w + p^n t)^{-1} \equiv w^{-1} - p^n t w^{-2} \pmod{p^m}, \quad m \leq 2n, \quad (5)$$

$$(w + p^n t)^{-1} \equiv w^{-1} - p^n t w^{-2} + p^{2n} t^2 w^{-3} \pmod{p^m}, \quad m \leq 3n. \quad (6)$$

В лемме 1 и далее предполагается, что обратные элементы вычисляются по модулю, равному максимальной степени простого числа, входящей в сравнение.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. леммы 1 и 5 в [2].

ЛЕММА 2. Пусть $p > 2$ – простое число. Тогда

$$\left| \sum_{t=1}^{p^{n+1}} e\left(\frac{at^2}{p} + \frac{ht}{p^{n+1}}\right) \right| = \begin{cases} p^{n+1/2}, & \text{если } p^n \mid h, p \nmid a; \\ 0, & \text{если } p^n \nmid h. \end{cases}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. лемму 7 в [2].

ЛЕММА 3. Пусть p – простое число, $q = p^m$, $d = p^\alpha$, $(w, p) = 1$ и $1 \leq \alpha \leq m \leq 2\alpha$. Тогда

$$K_{q,d}(u, v; w) = e\left(\frac{uw + vw^{-1}}{p^m}\right) p^{m-\alpha} \delta_{p^{m-\alpha}}(u - vw^{-2}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для проверки утверждения леммы достаточно сделать замену переменной $z = w + p^\alpha z_1$ ($1 \leq z_1 \leq p^{m-\alpha}$) и воспользоваться сравнением (5):

$$K_{q,d}(u, v; w) = \sum_{z_1=1}^{p^{m-\alpha}} e\left(\frac{uw + vw^{-1}}{p^m} + \frac{z_1(u - vw^{-2})}{p^{m-\alpha}}\right) = e\left(\frac{uw + vz^{-1}}{p^m}\right) p^{m-\alpha} \delta_{p^{m-\alpha}}(u - vw^{-2}).$$

ЛЕММА 4. Если p – простое число, $q = p^m$, $d = p^\alpha$, $1 \leq \alpha \leq m - n$, $\alpha \leq m/2 \leq n \leq m$, $p \nmid (u, v)$, $(p, w) = 1$. Тогда

$$|K_{q,d}(u, v; w)| \leq Ap^n \delta_{p^\alpha}(u - vw^{-2}),$$

где $A = 4$, если $p = 2$, $m - n \geq \alpha + 2$ и $A = 2$ в остальных случаях.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сделаем замену переменной суммирования: $z = s + p^n t$, $1 \leq s \leq p^n$, $1 \leq t \leq p^{m-n}$, $s \equiv w \pmod{p^\alpha}$. Тогда

$$\begin{aligned} K_{q,d}(u, v; w) &= \sum_{\substack{s=1 \\ s \equiv w \pmod{p^\alpha}}}^{p^n} e\left(\frac{us + vs^{-1}}{p^m}\right) \sum_{t=1}^{p^{m-n}} \left(\frac{t(u - vs^{-2})}{p^{m-n}}\right) \\ &= p^{m-n} \sum_{\substack{s=1 \\ s \equiv w \pmod{p^\alpha}}}^{p^n} e\left(\frac{us + vs^{-1}}{p^m}\right) \delta_{p^{m-n}}(u - vs^{-2}). \end{aligned}$$

По условию $m - n \geq \alpha$. Поэтому сумма будет ненулевой только если $\delta_{p^\alpha}(u - vw^{-2}) = 1$. В этом случае при $p > 2$ решение сравнения $u - vs^{-2} \equiv 0 \pmod{p^\alpha}$ (относительно неизвест-

ной s) однозначно поднимается до решения по модулю p^{m-n} , т.е. сумма по переменной s состоит не более чем из p^{2n-m} слагаемых, и

$$|K_{q,d}(u, v; w)| \leq p^n \delta_{p^\alpha}(u - vw^{-2}).$$

Если же $p = 2$, то сравнение $u - vs^{-2} \equiv 0 \pmod{p^{m-n}}$ при $m - n = \alpha + 1$ имеет не более 2 решений, а при $m - n \geq \alpha + 2$ — не более 4 решений. Таким образом сумма по переменной s состоит не более чем из Ap^{2n-m} слагаемых, и

$$|K_{q,d}(u, v; w)| \leq Ap^n \delta_{p^\alpha}(u - vw^{-2}),$$

где $A = 4$, если $m - n \geq \alpha + 2$, $A = 2$, если $m - n = \alpha + 1$ и $A = 1$, если $m - n = \alpha$.

ЛЕММА 5. Пусть $d = 2^\alpha$, $\alpha \geq 1$, $m \geq 2\alpha$, $2 \nmid (u, v)$ и $(2, w) = 1$. Тогда

$$|K_{2^m,d}(u, v; w)| \leq \tau(2^m) 2^{m/2} \delta_{2^\alpha}(u - vw^{-2}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применим лемму 4 с $n = \lceil m/2 \rceil$. Тогда при четном $m = 2n$

$$|K_{2^m,d}(u, v; w)| \leq A 2^{m/2} \delta_{2^\alpha}(u - vw^{-2}) \leq \tau(2^m) 2^{m/2} \delta_{2^\alpha}(u - vw^{-2}),$$

где $A = 4$ при $n \geq \alpha + 2$ и $A = 2$ в остальных случаях. Если же m — нечетное, то $m = 2n - 1$ и

$$|K_{2^m,d}(u, v; w)| \leq A 2^{(m+1)/2} \delta_{2^\alpha}(u - vw^{-2}) \leq \tau(2^m) 2^{m/2} \delta_{2^\alpha}(u - vw^{-2}).$$

Чтобы убедиться в последнем неравенстве, достаточно проверить, что $\sqrt{2}A \leq \tau(2^m) = m + 1$. Если $A = 4$, то $m - n \geq 3$, $m \geq 7$, и неравенство выполняется, поскольку $4\sqrt{2} \leq 8$. Если же $A = 2$, то неравенство $\sqrt{2}A \leq m + 1$ выполняется для всех нечетных $m \geq 2\alpha \geq 2$.

ЛЕММА 6. Пусть $p > 2$ — простое число, $d = p^\alpha$, $p \nmid (u, v)$, $(p, w) = 1$ и $m \geq 2\alpha$. Тогда

$$|K_{p^m,d}(u, v; w)| \leq 2p^{m/2} \delta_{p^\alpha}(u - vw^{-2}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если m — четное число, то требуемая оценка следует из леммы 4 при $n = m/2$. При нечетном m положим $n = (m - 1)/2$, сделаем замену переменной $z = s + p^n t$, $1 \leq s \leq p^n$, $1 \leq t \leq p^{n+1}$, и применим формулу (6):

$$K_{p^m,d}(u, v; w) = \sum_{\substack{s=1 \\ s \equiv w \pmod{p^\alpha}}}^{p^n} e\left(\frac{us + vs^{-1}}{p^m}\right) \sum_{t=1}^{p^{n+1}} \left(\frac{t(u - vs^{-2})}{p^{n+1}} + \frac{vt^2 s^{-3}}{p}\right).$$

По лемме 2

$$|K_{p^m,d}(u, v; w)| \leq \sum_{\substack{s=1 \\ s \equiv w \pmod{p^\alpha}}}^{p^n} p^{n+1/2} \delta_{p^n}(u - vs^{-2}) = p^{m/2} \sum_{\substack{s=1 \\ s \equiv w \pmod{p^\alpha}}}^{p^n} \delta_{p^n}(u - vs^{-2}),$$

откуда и следует нужное неравенство, поскольку сумма по переменной s (когда она не пуста) не превосходит двух.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Согласно замечаниям 1–2 утверждение теоремы 1 достаточно проверить в случае, когда $q = p^m$, $d = p^\alpha$, где p простое и $1 \leq \alpha \leq m$. При $\alpha \leq m \leq 2\alpha$ оценка (3) следует из леммы 3. Поэтому можно предполагать, что $m > 2\alpha$. Если $(u, v, q) = 1$, то требуемая оценка следует из лемм 5 и 6. Таким образом, остается рассмотреть случай, когда $(u, v, q) = p^h$, $0 < h \leq m$. При $h = m$ доказываемая оценка хуже тривиальной, поэтому будем считать, что $h < m$. Если $m - h \leq 2\alpha$, то сумму достаточно оценить тривиально:

$$K_{q,d}(u, v; w) = \sum_{\substack{z=1 \\ z \equiv w \pmod{d}}}^{p^m} e\left(\frac{uz + vz^{-1}}{p^m}\right) = \sum_{\substack{z=1 \\ z \equiv w \pmod{d}}}^{p^m} e\left(\frac{up^{-h}z + vp^{-h}z^{-1}}{p^{m-h}}\right),$$

$$|K_{q,d}(u, v; w)| \leq p^{m-\alpha} \leq \delta_D(u - vw^{-2})(u, v, q)^{1/2} q^{1/2} = \delta_D(u - vw^{-2}) p^{(m+h)/2}.$$

Если же $m - h > 2\alpha$, то

$$K_{q,d}(u, v; w) = p^h \sum_{\substack{z=1 \\ z \equiv w \pmod{d}}}^{p^{m-h}} e\left(\frac{up^{-h}z + vp^{-h}z^{-1}}{p^{m-h}}\right) = p^h K_{qp^{-h},d}(up^{-h}, vp^{-h}; w).$$

Снова применяя леммы 5 и 6, приходим к утверждению теоремы:

$$\begin{aligned} |K_{q,d}(u, v; w)| &\leq p^h |K_{qp^{-h},d}(up^{-h}, vp^{-h}; w)| \\ &\leq \tau(qp^{-h}) p^h \delta_{p^\alpha}(up^{-h} - vp^{-h}w^{-2})(up^{-h}, vp^{-h}, qp^{-h})^{1/2} (qp^{-h})^{1/2} \\ &\leq \tau(q) \delta_{p^{\alpha+h}}(u - vw^{-2})(u, v, q)^{1/2} q^{1/2} \leq \tau(q) \delta_D(u - vw^{-2})(u, v, q)^{1/2} q^{1/2}. \end{aligned}$$

Суммы Рамануджана

$$c_q(u) = \sum_{z=1}^q e\left(\frac{uz}{q}\right)$$

являются частными случаями сумм Клостермана: $K_q(u, 0) = K_q(0, u) = c_q(u)$, и допускают более точную оценку (см. [3; теорема 272])

$$|c_q(n)| \leq (q, n) \quad (7)$$

Если один из аргументов u, v суммы $K_{q,d}(u, v; w)$ равен нулю, то оценку теоремы 1 также можно уточнить.

ТЕОРЕМА 2. *Справедливы неравенства*

$$|K_{q,d}(u, 0; w)| \leq \left(u, \frac{q}{d}\right), \quad |K_{q,d}(0, v; w)| \leq \left(v, \frac{q}{d}\right). \quad (8)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из равенства $K_{q,d}(u, v; w) = K_{q,d}(v, u; w^{-1})$ следует, что для доказательства теоремы достаточно проверить первое из неравенств (8). По свойству мультипликативности (см. замечание 1) неравенство (8) достаточно проверить для случая, когда q есть степень простого числа. Предположим, что $q = p^m$, $d = p^\alpha$, где p – простое число. Если $\alpha = 0$, то утверждение теоремы следует из оценки (7):

$$|K_{q,d}(u, 0; w)| = \left| \sum_{z=1}^q e\left(\frac{uz}{q}\right) \right| = |c_q(u)| \leq (u, q) = \left(u, \frac{q}{d}\right).$$

Если же $\alpha > 0$, то

$$\begin{aligned} K_{q,d}(u, 0; w) &= \sum_{\substack{z=1 \\ z \equiv w \pmod{d}}}^q e\left(\frac{uz}{q}\right) = \sum_{z_1=1}^{p^{m-\alpha}} e\left(\frac{u(w + p^\alpha z_1)}{q}\right), \\ |K_{q,d}(u, 0; w)| &= p^{m-\alpha} \delta_{p^{m-\alpha}}(u) \leq \left(u, \frac{q}{d}\right). \end{aligned}$$

Автор благодарит М. А. Королева за указания на недостатки в первоначальной версии статьи.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Ю. В. Линник, Б. Ф. Скубенко, *Вестн. ЛГУ. Сер. матем., мех., астрон.*, **3**:13 (1964), 25–36. [2] Т. Estermann, *Mathematika*, **8** (1961), 83–86. [3] G. H. Hardy, E. M. Write, *An Introduction to the Theory of Numbers*, Clarendon Press, Oxford, 1979. [4] I. E. Shparlinski, *Jpn. J. Math.*, **7**:2 (2012), 235–294. [5] A. Weil, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, **34**:5 (1948), 204–207.

А. В. Устинов

Хабаровское отделение

Института прикладной математики ДВО РАН

E-mail: ustinov.alexey@gmail.com

Поступило

24.02.2014

Исправленный вариант

14.05.2014