Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. А. Шейпак, Об асимптотике спектра дифференциального оператора с весом, порожденным функцией Минковского, *Матем. заметки*, 2015, том 97, выпуск 2, 302–308

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10576>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.172.240.79

26 апреля 2023 г., 17:04:42

Об асимптотике спектра дифференциального оператора с весом, порожденным функцией Минковского

И. А. Шейпак

В статье изучается вопрос об асимптотике спектра граничной задачи

$$\begin{aligned} -y'' - \lambda \rho y &= 0, \\ y(0) &= y(1) = 0, \end{aligned}$$

где ρ есть обобщенная производная функции Минковского, т.е. $\rho = ?'(x)$ ($?(x)$ – функция “знак вопроса”, впервые определена Г. Минковским, им же предложено обозначение). Для собственных значений задачи получены асимптотические двусторонние оценки степенного характера. Порядок степени определяется хаусдорфовой размерностью носителя меры Минковского $d?$.

Библиография: 14 названий.

DOI: 10.4213/mzm10576

1. Введение. В статье изучается вопрос об асимптотике спектра граничной задачи

$$-y'' - \lambda \rho y = 0, \tag{1.1}$$

$$y(0) = y(1) = 0, \tag{1.2}$$

где ρ есть обобщенная производная функции Минковского, т.е. $\rho = ?'(x)$ ($?(x)$ – функция “знак вопроса”, впервые определена Г. Минковским, им же предложено обозначение). Известно (см. [1]), что если вес ρ является производной абсолютно непрерывной неубывающей функции P , то асимптотика собственных значений определяется формулой

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{\lambda_n}} = \int_0^1 \sqrt{P'(t)} dt. \tag{1.3}$$

Для неубывающей сингулярной функции P эта формула также верна, но она не дает информацию о главном члене асимптотического поведения собственных значений, так как правая часть (1.3) обращается в нуль. В работе [2] в качестве веса ρ была рассмотрена обобщенная производная функции Кантора и получены асимптотические оценки на рост собственных значений

$$c_1 n^{\log_2 6} \leq \lambda_n \leq c_2 n^{\log_2 6}$$

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (грант № 14-11-00754).

где $c_1 < c_2$ – некоторые положительные константы. В [3] результаты статьи [2] были обобщены на класс аффинно-самоподобных вероятностных мер без атомов. Иногда поведение собственных значений удобнее описывать в терминах считающей функции $N(\lambda) := \#\{0 < \lambda_n < \lambda\}$. Основной результат работы [3] заключается в установлении асимптотической формулы

$$N(\lambda) = \lambda^D (s(\ln(\lambda)) + o(1)),$$

где s – положительная полунепрерывная периодическая функция, которая в случаях арифметического самоподобия может вырождаться в константу. Постоянная D вычисляется по параметрам самоподобия меры и всегда принадлежит промежутку $(0, 1/2)$.

В серии работ [4]–[6] изучение вопроса о спектральных асимптотиках граничной задачи (1.1), (1.2) было распространено на класс весов ρ , имеющих аффинно-самоподобную квадратично суммируемую первообразную P . В этом случае задача (1.1), (1.2) может иметь как отрицательные, так и положительные собственные значения. Соответственно необходимо рассматривать две считающих функции, для которых получена асимптотика

$$N_{\pm}(|\lambda|) = |\lambda|^D (s_{\pm}(\ln(|\lambda|)) + o(1)).$$

В этих работах показано, что параметр D может принимать любые значения из промежутка $(0; 1)$ (при этом так же, как и в случае аффинно-самоподобных мер, он вычисляется через параметры самоподобия функции P), а также доказано, что функции $s_{\pm}$ непрерывны.

Таким образом, судя по всему, все известные результаты по асимптотике собственных значений задачи (1.1), (1.2) в классе сингулярных весов получены для аффинно-самоподобных весов.

Цель настоящей статьи состоит в рассмотрении других классов самоподобных весов – не аффинно-самоподобных. Одним из примеров таких весов является мера, порожденная функцией Минковского, известной также как функция “знак вопроса” и часто обозначаемой $?(x)$. Ввиду необычности такого обозначения, на протяжении данной статьи мы будем, как правило, обозначать функцию Минковского через P_M , а ассоциированную с ней меру – через ρ_M (т.е. $\rho_M([\alpha, \beta)) = P_M(\beta) - P_M(\alpha)$).

Статья имеет следующую структуру. В п. 2 дается описание функции Минковского и выводятся ее свойства, необходимые для рассмотрения спектральной задачи (1.1), (1.2) с весом $\rho = \rho_M$. В п. 3 рассматривается задача (1.1), (1.2) и выводится асимптотическая формула поведения собственных значений для $\rho = \rho_M$. В п. 4 устанавливаются асимптотические оценки собственных значений для задачи (1.1), (1.2) с весом, порожденным обобщенной функцией Минковского.

2. Функция Минковского. Функции “вопросительный знак”, введенной Минковским [7], посвящена обширная литература. Одно из первых детальных исследований сингулярности функции Минковского проведено в [8] и [9]. Показатель гёльдеровости и хаусдорфова размерность множества точек роста функции вычислены в [10]. Обобщения функции Минковского можно найти в [11]. Привести полный список литературы, посвященной изучению функции Минковского, не представляется возможным.

Функцию Минковского обычно задают в рациональных точках отрезка $[0, 1]$ с помощью дерева Штерна–Броко с последующим продолжением по непрерывности в иррациональных точках. Подробно о таком задании функции можно посмотреть в обзоре [12]. Мы же зададим ее с помощью сжимающих отображений. Рассмотрим полное метрическое пространство непрерывных функций с фиксированными значениями в концевых точках отрезка:

$$\tilde{C}[0, 1] := \{f \in C[0, 1] : f(0) = 0, f(1) = 1\}$$

с метрикой $\rho(f, g) = \max_{[0, 1]} |f(x) - g(x)|$. Введем отображения S_1 и S_2 отрезка $[0, 1]$ на отрезки $[0, 1/2]$ и $[1/2, 1]$ соответственно:

$$S_1(x) = \frac{x}{x+1}, \quad S_2(x) = \frac{1}{2-x}$$

и определим отображение S на пространстве $\tilde{C}[0, 1]$:

$$[S(f)](x) := \frac{1}{2} f(S_1^{-1}(x)) \chi_{[0, 0.5]}(x) + \left(\frac{1}{2} f(S_2^{-1}(x)) + \frac{1}{2} \right) \chi_{[0.5, 1]}(x).$$

Здесь $\chi_{[\alpha, \beta]}$ обозначает характеристическую функцию отрезка $[\alpha, \beta]$.

ТЕОРЕМА 2.1. *Отображение S является сжимающим в $\tilde{C}[0, 1]$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что для функции $f \in C[0, 1]$ функции $f(S_1^{-1}(x))$ и $f(S_2^{-1}(x))$ являются непрерывными на промежутках $(0, 1/2)$ и $(1/2, 1)$ соответственно. Если дополнительно положить $f \in \tilde{C}[0, 1]$, то

$$f(S_1^{-1}(0)) = f(0) = 0, \quad f(S_2^{-1}(1)) = f(1) = 1.$$

Значение $[S(f)](1/2)$ можно получить двумя способами:

$$\frac{1}{2} f\left(S_1^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right) \chi_{[0, 0.5]}\left(\frac{1}{2}\right) \quad \text{и} \quad \left(\frac{1}{2} f\left(S_2^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right) + \frac{1}{2}\right) \chi_{[0.5, 1]}\left(\frac{1}{2}\right).$$

Так как

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} f\left(S_1^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right) \chi_{[0, 0.5]}\left(\frac{1}{2}\right) &= \frac{1}{2} f(1) = \frac{1}{2}, \\ \left(\frac{1}{2} f\left(S_2^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right) + \frac{1}{2}\right) \chi_{[0.5, 1]}\left(\frac{1}{2}\right) &= \frac{1}{2} f(0) + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

то функция $[S(f)]$ непрерывна и в точке $1/2$. Таким образом, оператор S отображает $\tilde{C}[0, 1]$ в себя.

Сжимаемость отображения S проверяется непосредственно:

$$\begin{aligned} \rho([S(f)], [S(g)]) &= \max_{[0, 1]} |[S(f)](x) - [S(g)](x)| \\ &= \max \left\{ \max_{[0, 0.5]} |[S(f)](x) - [S(g)](x)|, \max_{[0.5, 1]} |[S(f)](x) - [S(g)](x)| \right\} \\ &= \max \left\{ \max_{[0, 0.5]} \left| \frac{1}{2} (f(S_1^{-1}(x)) - g(S_1^{-1}(x))) \right|, \max_{[0.5, 1]} \left| \frac{1}{2} (f(S_2^{-1}(x)) - g(S_2^{-1}(x))) \right| \right\} \\ &= \frac{1}{2} \max_{[0, 1]} |f(t) - g(t)| = \frac{1}{2} \rho(f, g). \end{aligned}$$

В силу принципа сжимающих отображений существует и единственная функция $P_M \in \tilde{C}[0, 1]$, являющаяся неподвижной точкой отображения S . Совпадение функции P_M с функцией Минковского следует из задания функции $\varphi(x)$ с помощью цепных дробей и действий отображений S_1 и S_2 на цепную дробь (см. [8], [9], а также [12]).

Аналогично, с помощью сжимающего отображения можно задать обобщения функции Минковского (см. [11]). А именно, зафиксируем произвольное число $\theta \in (0, 1)$ и определим отображение $S_\theta : \tilde{C}[0, 1] \rightarrow \tilde{C}[0, 1]$:

$$[S_\theta(f)](x) := \theta f(S_1^{-1}(x))\chi_{[0, 0.5]}(x) + ((1 - \theta)f(S_2^{-1}(x)) + \theta)\chi_{[0.5, 1]}(x).$$

Так же, как и при доказательстве теоремы 2.1, устанавливается сжимаемость отображения S_θ в пространстве $\tilde{C}[0, 1]$. Его неподвижная точка P_θ является однопараметрическим обобщением функции Минковского, причем $P_{1/2} = P_M$.

Отображения S_1 и S_2 не являются аффинными, поэтому функции семейства P_θ не аффинно-самоподобны.

3. Спектральная задача для меры Минковского. В дальнейшем через $\mathcal{H}$ будет обозначаться пространство $\dot{W}_2^1[0, 1]$, снабженное нормой

$$\|y\|_{\mathcal{H}} := \int_0^1 |y'(x)|^2 dx,$$

через $\mathcal{H}' = \dot{W}_2^{-1}[0, 1]$ будет обозначаться пространство, дуальное к $\mathcal{H}$ относительно $L_2[0, 1]$, т.е. пополнение пространства $L_2[0, 1]$ по норме

$$\|y\|_{\mathcal{H}'} := \sup_{\|z\|_{\mathcal{H}}=1} \left| \int_0^1 y(x)\overline{z(x)} dx \right|, \quad y \in L_2[0, 1].$$

Как и в серии работ [4]–[6], в качестве операторной модели для задачи (1.1), (1.2) с весом $\rho \in \mathcal{H}'$ выберем линейный пучок ограниченных операторов $T_\rho : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}'$, квадратичная форма которых задается тождеством

$$\langle T_\rho y, y \rangle = \int_0^1 |y'(x)|^2 dx + \lambda \int_0^1 P(y(x)\overline{y'(x)} + y'(x)\overline{y(x)}) dx,$$

где P – обобщенная первообразная веса ρ .

Справедливо следующее утверждение [4; теорема 4.1].

ТЕОРЕМА 3.1. *Спектр пучка T_ρ чисто дискретен, и все его собственные значения являются простыми.*

Кроме того, из теоремы 4.2 той же работы, следует, что если вес ρ является обобщенной производной неубывающей функции $P \in L_2[0, 1]$, то спектр задачи (1.1), (1.2) положителен. В частности, этот факт верен и для $\rho = \rho_M$.

Теперь рассмотрим задачу (1.1), (1.2) в предположении, что $\rho = \rho_M$.

ТЕОРЕМА 3.2. *Существуют положительные числа c_1, c_2 такие, что для собственных значений $\{\lambda_n\}_{n=1}^\infty$ задачи (1.1), (1.2) с весом $\rho = \rho_M$ справедлива асимптотика*

$$c_1 n^{(d_{H,M}+1)/d_{H,M}} \leq \lambda_n \leq c_2 n^{(d_{H,M}+1)/d_{H,M}},$$

где $d_{H,M}$ – хаусдорфова размерность носителя меры Минковского, определяемая формулой

$$d_{H,M} = \left(2 \int_0^1 \log_2(1+x) dP_M \right)^{-1}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) В соответствии с основной теоремой работы [10] существует множество $A \in [0, 1]$ такое, что $P_M(A) = P_M([0, 1])$ и для каждой точки $x \in A$ выполнено условие липшицевости: для любого ε существует $h(\varepsilon)$ такое, что для любого $h < h(\varepsilon)$ выполнены неравенства

$$(2h)^{\alpha+\varepsilon} < |P_M(x+h) - P_M(x-h)| < (2h)^{\alpha-\varepsilon}, \quad (3.1)$$

где показатель гёльдеровости определяется формулой

$$\alpha = \left(2 \int_0^1 \log_2(1+x) dP_M \right)^{-1}.$$

2) Неравенства (3.1) показывают, что указанное множество A является d -множеством (см. подробнее [13]). Действительно, множество $\Gamma \in \mathbb{R}^n$ называется d -множеством, $0 \leq d \leq n$, если существует борелевская мера μ , удовлетворяющая свойствам

- $\text{supp } \mu = \Gamma$;
- существуют две положительные постоянные c_1 и c_2 такие, что для всех точек $\gamma \in \Gamma$ и для произвольного числа $r \in (0, 1)$ выполнено

$$c_1 r^d \leq \mu(B(\gamma, r) \cap \Gamma) \leq c_2 r^d.$$

где $B(\gamma, r)$ – шар с центром в точке γ и радиусом r .

То, что множество A есть носитель меры ρ_M , показано в работе [10]. В силу произвольности ε неравенства (3.1) в точности означают, что множество A есть d -множество с $d = \alpha$. Мету μ можно определить как $\mu := dP_M$.

Заметим, что из следствия 3.6 работы [13] следует, что хаусдорфова размерность $\dim_{H,M}$ множества A совпадает с показателем гёльдеровости функции Минковского: $d_{H,M} = \alpha$.

3) К задаче (1.1), (1.2) с мерой, носитель которой является d -множеством, применима теорема 30.2 работы [13], откуда и получается требуемая асимптотика.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. Для аффинно-самоподобных мер двусторонние оценки собственных значений действительно возникают по существу, так как функция s может быть нетривиальной (т.е. не вырождаться в постоянную функцию). Для мер канторовского типа этот факт установлен в [14]. Методы работы [13] не позволяют различить типы асимптотик $\lambda_n \asymp n^D$ (существуют положительные постоянные $c_1 < c_2$, для которых справедливы двусторонние оценки $c_1 n^D \leq \lambda_n \leq c_2 n^D$) и $\lambda_n \sim cn^D$, т.е. существует $\lim_{n \rightarrow \infty} (n/\lambda_n^D)$, где $D = d_{H,M}/d_{H,M} + 1$. Это связано с тем, что мера, существование которой требуется в определении d -множества, единственна с точностью до умножения на положительную константу (см. также замечание 3.5 [13]).

4. Спектральная задача для обобщенной меры Минковского. Формула для хаусдорфовой размерности носителя обобщенной меры Минковского $\rho_\theta = dP_\theta$ в явном виде получена в [11]. Там же доказана и липшицевость обобщенной функции Минковского в точках носителя соответствующей меры. К сожалению, полученная формула достаточно громоздка, показатель гёльдеровости α_θ вычисляется в терминах предельного перехода по специально выбранной подпоследовательности рациональных чисел, принадлежащих дереву Штерна–Броко. Определим рекуррентно последовательности целых чисел $p(n, i)$, $q(n, i)$:

$$\begin{aligned} p(0, 0) &= 0, & p(0, 1) &= q(0, 0) = q(0, 1) = 1, \\ p(n+1, 2i) &= p(n, i), & p(n+1, 2i+1) &= p(n, i) + p(n, i+1), \\ q(n+1, 2i) &= q(n, i), & q(n+1, 2i+1) &= q(n, i) + q(n, i+1). \end{aligned}$$

Последовательность рациональных чисел $p(n, i)/q(n, i)$, $i = 0, 1, \dots, 2^{n-1}$, является n -м уровнем дерева Штерна–Броко.

Введем булев вектор $y = (y_1, \dots, y_n)$, $y_i \in \{0, 1\}$, и определим рекуррентно последовательность индексов j_n : $j_1 = 1$,

$$\begin{aligned} j_n &= j_{n-1}(1 - 2y_n) + y_n 2^{n+1}, & \text{если } \frac{j_{n-1} - 1}{2} & \text{четно,} \\ j_n &= j_{n-1}(2y_n - 1) + (1 - y_n) 2^{n+1}, & \text{если } \frac{j_{n-1} - 1}{2} & \text{нечетно.} \end{aligned}$$

Тогда показатель гёльдеровости $\alpha(\theta)$ функции P_θ определяется из соотношения (см. теорему 2 [11])

$$\frac{1}{2\alpha(\theta)} = - \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{2^n-1} \log_{\theta^\theta(1-\theta)^{1-\theta}} \left(1 + \frac{p(n, j_n)}{q(n, j_n)} \right) (\theta_{y_1} \theta_{y_2} \dots \theta_{y_n} + \theta_{1-y_1} \theta_{1-y_2} \dots \theta_{1-y_n}), \quad (4.1)$$

где $\theta_0 := \theta$, $\theta_1 := 1 - \theta$.

Проведя доказательство, аналогичное приведенному в теореме (3.2), получим утверждение

ТЕОРЕМА 4.1. *Существуют положительные числа $c_1 < c_2$ такие, что для собственных значений $\{\lambda_n\}_{n=1}^\infty$ задачи (1.1), (1.2) с весом $\rho = \rho_\theta$ справедлива асимптотика*

$$c_1 n^{(d_{H,\theta}+1)/d_{H,\theta}} \leq \lambda_n \leq c_2 n^{(d_{H,\theta}+1)/d_{H,\theta}},$$

где $d_{H,\theta} = \alpha_\theta$ – хаусдорфова размерность носителя обобщенной меры Минковского ρ_θ , определяемая формулой (4.1).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] И. С. Кац, М. Г. Крейн, “О спектральных функциях струны”: Ф. Аткинсон, *Дискретные и непрерывные граничные задачи*, Мир, М., 1968, 648–733.
- [2] T. Uno, I. Hong, “Some consideration of asymptotic distribution of eigenvalues for the equation $d^2u/dx^2 + \lambda\rho(x)u = 0$ ”, *Japan. J. Math.*, **29** (1959), 152–164.
- [3] M. Solomyak, E. Verbitsky, “On a spectral problem related to self-similar measures”, *Bull. London Math. Soc.*, **27**:3 (1995), 242–248.

- [4] А. А. Владимиров, И. А. Шейпак, “Самоподобные функции в пространстве $L_2[0, 1]$ и задача Штурма–Лиувилля с сингулярным индефинитным весом”, *Матем. сб.*, **197**:11 (2006), 13–30.
- [5] А. А. Владимиров, И. А. Шейпак, “Индефинитная задача Штурма–Лиувилля для некоторых классов самоподобных сингулярных весов”, *Функциональные пространства, теория приближений, нелинейный анализ*, Сборник статей, Тр. МИАН, **255**, Наука, М., 2006, 88–98.
- [6] А. А. Владимиров, И. А. Шейпак, “Асимптотика собственных значений задачи Штурма–Лиувилля с дискретным самоподобным весом”, *Матем. заметки*, **88**:5 (2010), 662–672.
- [7] H. Minkowski, “Zur Geometrie der Zahlen”, *Verhandlungen des III Internationalen Mathematiker-Kongresses in Heidelberg*, Berlin, 1904, 104–173.
- [8] A. Denjoy, “Sur une fonction réelle de Minkowski”, *J. Math. Pures Appl.*, **17** (1938), 105–151.
- [9] R. Salem, “On some singular monotonic functions which are strictly increasing”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **53**:3 (1943), 427–439.
- [10] J. R. Kinney, “Note on a singular function of Minkowski”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **11**:5 (1960), 788–794.
- [11] R. F. Tichy, J. Uitz, “An Extension of Minkowski’s Singular Function”, *Appl. Math. Lett.*, **8**:5 (1995), 39–46.
- [12] R. M. Conley, *A Survey of the Minkowski $\varphi(x)$ Function*, Thesis Master of Science in Mathematics, Morgantown, WV, 2003.
- [13] H. Triebel, *Fractals and Spectra. Related to Fourier Analysis and Function Spaces*, Monogr. Math., **91**, Birkhäuser Verlag, Basel, 1997.
- [14] А. А. Владимиров, И. А. Шейпак, “О задаче Неймана для уравнения Штурма–Лиувилля с самоподобным весом канторовского типа”, *Функц. анализ и его прил.*, **47**:4 (2013), 18–29.

И. А. Шейпак

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
E-mail: iasheip@mech.math.msu.su

Поступило
22.09.2014