Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Атанов, А. В. Лобода, Аффинно-однородные поверхности типа $(0, 0)$ в пространстве $\mathbb{C}^3$, *Матем. заметки*, 2015, том 97, выпуск 2, 309–313

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10577>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 13:57:12

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

Аффинно-однородные поверхности типа $(0, 0)$ в пространстве $\mathbb{C}^3$

А. В. Атанов, А. В. Лобода

В работе [1] была поставлена задача описания аффинно-однородных вещественных гиперповерхностей комплексного пространства $\mathbb{C}^3$. Такая аффинная постановка тесно связана с проблемой классификации голоморфно-однородных подмногообразий многомерных комплексных пространств (см. [2]–[4]).

В [5]–[7] предложена схема изучения свойства аффинной однородности на основе использования канонических уравнений изучаемых многообразий. Схема подразумевает раздельное рассмотрение нескольких (например, семи) типов строго псевдо-выпуклых (СПВ) гиперповерхностей в зависимости от тейлоровских коэффициентов второго порядка их канонических уравнений. На такой основе в [6]–[8] полностью описаны два из семи упомянутых случаев. Ниже приводится описание еще одного из семи типов.

1. Необходимые обозначения и формулировка основного результата. Согласно [1] уравнение вещественно-аналитической СПВ-гиперповерхности M пространства $\mathbb{C}^3$ можно (локально) привести аффинным преобразованием к виду

$$v = |z_1|^2 + |z_2|^2 + \varepsilon_1(z_1^2 + \bar{z}_1^2) + \varepsilon_2(z_2^2 + \bar{z}_2^2) + \sum_{k+l+2m \geq 3} F_{k\bar{l}m}(z, \bar{z})u^m. \quad (1)$$

Здесь z_1, z_2, w – комплексные координаты в $\mathbb{C}^3$, $u = \operatorname{Re} w$, $v = \operatorname{Im} w$; $F_{k\bar{l}m}$ – многочлен степени k по переменным $z = (z_1, z_2)$, степени l – по $\bar{z} = (\bar{z}_1, \bar{z}_2)$, $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ – вещественные неотрицательные числа.

Мы рассматриваем ниже лишь поверхности типа $(0, 0)$, в уравнениях (1) которых $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$. В этом случае слагаемые $(F_{1\bar{0}1} + F_{0\bar{1}1})u = 2\operatorname{Re}(\mu_1 z_1 + \mu_2 z_2)u$, входящие в (1), можно удалить из этого уравнения (за счет замены $z_k \rightarrow z_k - \bar{\mu}_k w$, $k = 1, 2$).

В отличие от уже описанных типов $(1/2, 0)$ и $(1/2, 1/2)$, содержащих большое количество аффинно различных однородных многообразий, здесь итоговый результат имеет следующую краткую формулировку.

ТЕОРЕМА 1. *С точностью до аффинной эквивалентности существуют лишь три аффинно-однородных вещественных СПВ-гиперповерхности типа $(0, 0)$ в 3-мерном комплексном пространстве:*

- 1) $v = |z_1|^2 + |z_2|^2$ – “сфера” Мозера,
- 2) $|z_1|^2 + |z_2|^2 + |w|^2 = 1$ – обычная сфера,
- 3) $|z_1|^2 + |z_2|^2 - |w|^2 = -1$ – гиперболоид.

Работа второго автора выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 14-01-00709).

DOI: 10.4213/mzm10577

Для доказательства этого утверждения мы используем подобно [6] весовые компоненты тождества

$$\operatorname{Re}\{Z(\Phi)|_M\} \equiv 0, \quad (2)$$

означающего факт касания аффинным векторным полем Z однородной гиперповерхности M с определяющей функцией Φ . Напомним, что *весом* монома $z_1^\alpha z_2^\beta \bar{z}_1^\gamma \bar{z}_2^\delta u^m$ от переменных $z, \bar{z}, u$ мы называем сумму $\alpha + \beta + \gamma + \delta + 2m$.

Представляя произвольное аффинное векторное поле в пространстве $\mathbb{C}^3$ в виде

$$Z = (A_1 z_1 + A_2 z_2 + A_3 w + p_1) \frac{\partial}{\partial z_1} + (B_1 z_1 + B_2 z_2 + B_3 w + p_2) \frac{\partial}{\partial z_2} + (a z_1 + b z_2 + c w + q) \frac{\partial}{\partial w}, \quad (3)$$

можно записать компоненты весов 1 и 2 тождества (2) в следующей форме:

$$\begin{aligned} \text{вес 1: } \operatorname{Re} \left\{ p_1 \frac{\partial F_2}{\partial z_1} + p_2 \frac{\partial F_2}{\partial z_2} + (a z_1 + b z_2) \frac{i}{2} + \frac{q}{2} \frac{\partial F_3}{\partial u} \right\} &\equiv 0; \\ \text{вес 2: } \operatorname{Re} \left\{ p_1 \frac{\partial F_3}{\partial z_1} + p_2 \frac{\partial F_3}{\partial z_2} + (A_1 z_1 + A_2 z_2) \frac{\partial F_2}{\partial z_1} + (B_1 z_1 + B_2 z_2) \frac{\partial F_2}{\partial z_2} \right. \\ &\quad \left. + (a z_1 + b z_2) \frac{1}{2} \frac{\partial F_3}{\partial u} + \frac{c}{2} (u i - F_2) + \frac{q}{2} \frac{\partial F_4}{\partial u} \right\} \equiv 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Отметим, что в каждую компоненту тождества (2) входят неизвестные двух типов:

- коэффициенты многочленов $F_s(z, \bar{z}, u) = \sum_{k+l+2m=s} F_{klm} u^m$, $s = 2, 3, \dots$, из уравнения (1) неизвестной заранее однородной поверхности;
- параметры (коэффициенты) векторного поля Z .

При этом равенство (2) выполняется *тождественно по переменным* $z, \bar{z}, u$ для *каждого* поля Z , касательного к поверхности M .

В однородном случае размерность семейства (алгебры Ли) таких полей не может быть меньше размерности самой поверхности. Более того, в этой алгебре обязаны быть *свободными* (см. [1]) параметры $p = (p_1, p_2) \in \mathbb{C}^2$ и $q \in \mathbb{R}$ из (3). В отличие от них из (4) выводятся следующие ограничения для параметров a, b : $a = 2i\bar{p}_1$, $b = 2i\bar{p}_2$.

Для многочлена $F_s(z, \bar{z}, u)$ веса s введем следующие обозначения:

$$F_s(z, \bar{z}, u) = \sum_{0 \leq m \leq [s/2]} F_s^{(m)}(z, \bar{z}) u^m, \quad \widehat{F}_s(z, \bar{z}, u) = \sum_{1 \leq m \leq [s/2]} F_s^{(m)}(z, \bar{z}) u^m.$$

Например, для вещественного многочлена $F_4(z, \bar{z}, u)$ из (1) имеется разложение $F_4 = F_4^{(0)} + u F_4^{(1)} + u^2 F_4^{(2)}$, где $\lambda = F_4^{(2)}$ – некоторая вещественная константа.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Можно считать, что $\lambda = F_4^{(2)} = F_{0\bar{0}2} \in \{-1, 0, 1\}$. При $\lambda \neq 0$ это требование выполняется после растяжения $z \rightarrow tz$, $w \rightarrow t^2 w$ с $t = |\lambda|^{-1/2}$.

2. Изучение младших компонент тождества (2).

ТЕОРЕМА 2. *Набор многочленов $(F_3, F_4, F_5, \widehat{F}_6)$ из уравнения аффинно-однородной поверхности M типа $(0, 0)$ однозначно определяется коэффициентом λ .*

Для доказательства теоремы 2 нам придется детально изучить компоненты тождества (2) весов 2, 3 и 4 (компонента веса 0 тривиальна).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Из 2-компоненты тождества (2) выводятся следующие формулы:*

- $F_3(z, \bar{z}) = 0$,
- $\operatorname{Re} A_1 = \frac{1}{2} \operatorname{Re} c - q\alpha, \quad \operatorname{Re} B_2 = \frac{1}{2} \operatorname{Re} c - q\beta, \quad B_1 = -\bar{A}_2$,

где α, β – некоторые константы, линейно зависящие от многочлена $F_{1\bar{1}1}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. а) Из 3-компоненты тождества (2) выводятся следующие формулы:

$$F_{4\bar{0}0} = 0, \quad F_{3\bar{1}0} = 0, \quad F_{3\bar{0}1} = 0, \quad F_{1\bar{1}1} = 0, \quad F_{2\bar{1}1} = -2iF_2F_{1\bar{0}2}, \quad F_{2\bar{2}0} = \lambda F_2^2; \quad (5)$$

б) для параметров A_3, B_3 выполняется условие

$$\frac{\partial F_2}{\partial z_1} A_3 + \frac{\partial F_2}{\partial z_2} B_3 = \frac{\partial F_{1\bar{1}1}}{\partial z_1} p_1 + \frac{\partial F_{1\bar{1}1}}{\partial z_2} p_2 + 2qF_{0\bar{1}2} + \lambda(\overline{az_1 + bz_2}). \quad (6)$$

СЛЕДСТВИЕ 1. “Вращательная” часть $L(z)$ касательного к M векторного поля, т.е.

$$\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ B_1 & B_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

имеет матрицу вида

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \operatorname{Re} c + i \operatorname{Im} A_1 & A_2 \\ -\bar{A}_2 & \frac{1}{2} \operatorname{Re} c + i \operatorname{Im} B_2 \end{pmatrix}.$$

Доказательство этих утверждений получается из последовательного рассмотрения отдельных $(k, \bar{\ell}, m)$ -тождеств, входящих в компоненты весов 2 и 3. Три таких тождества $(2, \bar{0}, 0)$, $(1, \bar{1}, 0)$, $(0, \bar{0}, 1)$ относятся к весу 2, и еще три $(3, \bar{0}, 0)$, $(2, \bar{1}, 0)$, $(1, \bar{0}, 1)$ – к весу 3.

Например, из $(2, \bar{0}, 0)$ - и $(3, \bar{0}, 0)$ -тождеств вытекает обращение в нуль многочленов $F_{3\bar{0}0}$, $F_{2\bar{1}0}$, $F_{2\bar{0}1}$ и $F_{4\bar{0}0}$, $F_{3\bar{1}0}$, $F_{3\bar{0}1}$. При этом используется следующее важное утверждение.

ЛЕММА 1 (о единственности). Пусть k – натуральное число, $k \geq 2$, а $G_1 = G_1(z, \bar{z})$, $G_2 = G_2(z, \bar{z}, u)$ – два однородных многочлена весов $k+1$ и $k+2$ соответственно, причем $G_{2|u=0} = 0$. Если

$$\operatorname{Re} \left(\frac{\partial G_1}{\partial z_1} p_1 + \frac{\partial G_1}{\partial z_2} p_2 + \frac{1}{2} \frac{\partial G_2}{\partial u} q \right) \equiv 0,$$

то $G_1 \equiv 0$, $G_2 \equiv 0$.

Компонента веса 4 тождества (2) распадается на 6 отдельных тождеств.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Из $(4, \bar{0}, 0)$ -, $(3, \bar{1}, 0)$ -, $(2, \bar{0}, 1)$ -, $(1, \bar{1}, 1)$ -компонент веса 4 тождества (2) следует, что

$$F_5(z, \bar{z}, u) = 0, \quad \widehat{F}_6 = F_{2\bar{2}1}u + 2\lambda^2 F_2 u^2 + F_{0\bar{0}3} u^3.$$

Наиболее идейно важными являются две оставшиеся “симметричные” (по z и $\bar{z}$) компоненты веса 4, т.е. $(0, \bar{0}, 2)$ и $(2, \bar{2}, 0)$ -тождества. С учетом сказанного они имеют вид

$$3\mu q + \lambda \operatorname{Re} c \equiv 0, \quad \text{где } \mu = F_{0\bar{0}3} \in \mathbb{R}, \quad (7)$$

$$\operatorname{Re} \left(\frac{\partial F_{2\bar{2}0}}{\partial z_1} (A_1 z_1 + A_2 z_2) + \frac{\partial F_{2\bar{2}0}}{\partial z_2} (B_1 z_1 + B_2 z_2) + \frac{1}{2} q F_{2\bar{2}1} - \frac{1}{2} \operatorname{Re} c F_{2\bar{2}0} \right) \equiv 0. \quad (8)$$

Если, например, $\lambda = 0$, то из (7) следует, что $\mu = 0$. С учетом последней формулы из (5) получаем, что $F_{2\bar{2}1} = 0$, и весь набор $(F_3, F_4, F_5, \widehat{F}_6)$ нулевой.

Если же $\lambda \neq 0$, то (в силу замечания 1) $\lambda = \pm 1$, и тогда тождество (7) можно переписать в виде $\operatorname{Re} c = -3\lambda\mu q$.

С учетом равенства $F_{2\bar{2}0} = \lambda F_2^2$ тождество (8) превращается тогда в

$$-3\lambda^2 \mu q F_2^2 + q F_{2\bar{2}1} \equiv 0 \quad \text{или} \quad F_{2\bar{2}1} = 3\mu F_2^2.$$

Это означает, что при $\lambda = \pm 1$ набор $(F_3, F_4, F_5, \widehat{F}_6)$ определяется парой чисел (λ, μ) .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. При $\lambda = \pm 1$ коэффициент $\mu = F_{0\bar{0}3}$ из уравнения аффинно-однородной поверхности M типа $(0, 0)$ может быть только нулевым.

Доказательство этого утверждения следует из рассмотрения, например, $(1, \bar{0}, 2)$ -компоненты тождества (2). С учетом уже рассмотренных весов и полученных формул

$$F_2 = |z_1|^2 + |z_2|^2, \quad F_4 = \lambda(F_2^2 + u^2), \quad \widehat{F}_6 = 2F_2u^2 + \mu u^3, \quad F_3 = 0, \quad F_5 = 0,$$

p -часть $(1, \bar{0}, 2)$ -тождества имеет вид

$$u^2 \left(\left(2p_1 + i\lambda A_3 - 2i\frac{3}{2}\mu p_1 \right) \frac{\partial F_2}{\partial z_1} + \left(2p_2 + i\lambda B_3 - 2i\frac{3}{2}\mu p_2 \right) \frac{\partial F_2}{\partial z_2} \right) \equiv 0.$$

Из этого тождества коэффициент μ однозначно выражается через λ , и с учетом формул $A_3 = 2i\lambda p_1$, $B_3 = 2i\lambda p_2$, вытекающих из (6), приходим к желаемому выводу $\mu = 0$. Предложение 4 доказано. Вместе с ним доказана и теорема 2.

СЛЕДСТВИЕ 2. При $\lambda \neq 0$ параметр $\text{Re } c$ равен нулю для любого векторного поля, касательного к однородной поверхности M типа $(0, 0)$.

3. Доказательство основного утверждения. Введем обозначение $H_j = (F_j^{(0)}, \widehat{F}_{j+1})$ для пары многочленов из уравнения (1) произвольной обсуждаемой поверхности. В случае ее однородности компонента веса $s > 4$ тождества (2) может быть представлена в форме

$$\begin{aligned} \text{Re} \left(p_1 \frac{\partial F_{k+1}^{(0)}}{\partial z_1} + p_2 \frac{\partial F_{k+1}^{(0)}}{\partial z_2} + \frac{q}{2} \frac{\partial \widehat{F}_{k+2}}{\partial u} + (A_1 z_1 + A_2 z_2) \frac{\partial F_k}{\partial z_1} + (B_1 z_1 + B_2 z_2) \frac{\partial F_k}{\partial z_2} \right) \\ = \Phi_k(H_1, \dots, H_k; p, \bar{p}, q, \text{Re } c), \end{aligned} \quad (9)$$

где Φ_k – некоторый многочлен от своих аргументов, линейный по второй их группе.

При $s = 5$ слагаемое

$$(A_1 z_1 + A_2 z_2) \frac{\partial F_k}{\partial z_1} + (B_1 z_1 + B_2 z_2) \frac{\partial F_k}{\partial z_2} \quad (10)$$

в левой части (9) отсутствует. По использовавшейся уже лемме о единственности пара $H_5 = (F_5^{(0)}, \widehat{F}_6)$ однозначно определяется по правой части тождества (9). В силу теоремы 2 эта пара определяется лишь коэффициентом λ , как и все H_s при $s < 5$.

По индукции такое утверждение переносится и на все последующие пары H_s . При этом в случае $\lambda = 0$ все эти пары нулевые.

При $\lambda = \pm 1$ каждый вновь получаемый многочлен F_s нечетного веса равен нулю, а четного – зависит лишь от u и от $F_2 = |z_1|^2 + |z_2|^2$. Именно такое устройство F_s при четных s позволяет освободить левую часть тождества (9) от слагаемого (10) и воспользоваться леммой о единственности.

Для завершения доказательства теоремы 1 остается убедиться, что для трех однородных поверхностей из ее формулировки значения λ равны соответственно 0, 1 и -1 .

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Формулировка основного утверждения статьи по сути совпадает с аналогичным 2-мерным результатом (см. [9]).

В связи с этим естественной является следующая общая гипотеза: существует лишь три (с точностью до аффинной эквивалентности) аффинно-однородных СПВ-гиперповерхности в $\mathbb{C}^{n+1}$, $n \geq 1$, уравнения которых допускают представление в виде

$$v = \sum_{k=1}^n |z_k|^2 + F_3(z, \bar{z}) + \sum_{k+l+2m \geq 4} F_{k\bar{l}m}(z, \bar{z}) u^m.$$

Это

- 1) “сфера” Мозера $v = |z_1|^2 + \dots + |z_n|^2$,
- 2) обычная сфера $|w|^2 + |z_1|^2 + \dots + |z_n|^2 = 1$,
- 3) гиперboloид $|w|^2 - (|z_1|^2 + \dots + |z_n|^2) = 1$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] А. В. Лобода, А. С. Ходарев, *Изв. вузов. Матем.*, 2003, № 10, 38–50. [2] E. Cartan, *Ann. Mat. Pura Appl.* (4), **11**:1 (1933), 17–90. [3] G. Fels, W. Kaup, *Acta Math.*, **201**:1 (2008), 1–82. [4] V. K. Beloshapka, I. G. Kossovskiy, *J. Math. Anal. Appl.*, **374**:2 (2011), 655–672. [5] Т. Т. З. Нгуен, *Матем. заметки*, **94**:2 (2013), 246–265. [6] А. В. Лобода, Т. Т. З. Нгуен, *Аналитические и геометрические вопросы комплексного анализа*, Сборник статей, Тр. МИАН, **279**, МАИК, М., 2012, 102–119. [7] A. V. Atanov, A. V. Loboda, A. V. Shipovskaya, *Affine homogeneous strictly pseudoconvex hypersurfaces of the type $(1/2, 0)$ in C^3* , 2014, [hrefhttp://arxiv.org/abs/1401.2252](http://arxiv.org/abs/1401.2252). [8] А. В. Лобода, *Материалы Воронежской зимней математической школы*, Воронеж, 2013, 144–145. [9] А. В. Лобода, *Однородность вложенных многообразий. Аффинная геометрия вещественных гиперповерхностей пространства C^2* , Изд-во Воронежск. гос. арх.-строит. ун-та, Воронеж, 2012.

А. В. Атанов

Воронежский государственный университет

E-mail: atanov.cs@gmail.com

Поступило

07.08.2014

А. В. Лобода

Воронежский государственный

архитектурно-строительный университет

E-mail: lobvgasu@yandex.ru