Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. Н. Бройтигам, К. А. Мирзоев, Т. А. Сафонова, Аналог теоремы Орлова об индексе дефекта для матричных дифференциальных операторов второго порядка, *Матем. заметки*, 2015, том 97, выпуск 2, 314–317

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10578>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.239.49.27

26 апреля 2023 г., 12:11:44

Аналог теоремы Орлова об индексе дефекта для матричных дифференциальных операторов второго порядка

И. Н. Бройтигам, К. А. Мирзоев, Т. А. Сафонова

1. Введение. В работе Орлова [1] был найден класс линейных дифференциальных операторов с вещественными аналитическими коэффициентами, дефектные числа которых определяются как число корней некоторого явно выписываемого полинома, лежащих в левой полуплоскости, а в работе [2] показано, что результат Орлова остается справедливым и для некоторых операторов с неаналитическими коэффициентами. Далее, в работе [3], в частности, были существенно расширены классы операторов, для которых справедливы утверждения теоремы Орлова.

Цель данной заметки – установить аналог теоремы Орлова для операторов, порожденных матричными линейными квазидифференциальными выражениями второго порядка.

2. Матричные квазидифференциальные выражения второго порядка. Пусть $P(x)$, $Q(x)$ и $R(x)$ – матричные функции порядка n , $n \in \mathbb{N}$, определенные на множестве $I := [1; +\infty)$, причем $P(x)$ – невырожденная матрица и $P(x)$ и $Q(x)$ – эрмитовы матрицы.

УСЛОВИЕ (A). *Предположим, что комплекснозначные функции $p_{ij}(x)$, $q_{ij}(x)$ и $r_{ij}(x)$, $i, j = 1, 2, \dots, n$, – элементы матриц $P^{-1}(x)$, $Q(x)$ и $R(x)$ соответственно – определены, измеримы на множестве I и суммируемы на каждом его замкнутом конечном интервале $(p_{ij}(x), q_{ij}(x), r_{ij}(x) \in L^1_{\text{loc}}(I))$.*

Определим первую квазипроизводную заданной на I вектор-функции $y(x) = (y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x))^t$ с локально абсолютно непрерывными координатами ($y_i(x) \in AC_{\text{loc}}(I)$), где t – символ транспонирования, посредством матриц P и R , полагая

$$y^{[1]} := P(y' - Ry).$$

Далее, считая, что вектор-функция $y^{[1]} = (y_1^{[1]}, y_2^{[1]}, \dots, y_n^{[1]})^t$ уже определена, $y_i^{[1]} \in AC_{\text{loc}}(I)$, определим вторую квазипроизводную $y^{[2]}$ вектор-функции y и квазидифференциальное выражение $l[y]$, полагая соответственно

$$y^{[2]} := (y^{[1]})' + R^* y^{[1]} - Qy,$$

где $*$ – символ сопряжения и

$$l[y](x) := -y^{[2]}(x), \quad x \in I. \quad (1)$$

Множество вектор-функций

$$\mathcal{D} := \{y(x) \mid y_i(x), y_i^{[1]}(x) \in AC_{\text{loc}}(I), i = 1, 2, \dots, n\},$$

очевидно, является областью определения выражения $l[y](x)$, а из условия (A) следует, что для любой функции $y(x) \in \mathcal{D}$ выражение $l[y](x)$ существует п.в. на I и координаты $l[y]$

Работа первого автора выполнена при поддержке Министерства образования и науки РФ и Германской службы академических обменов (DAAD) (программа Михаил Ломоносов, 325-A/13/74976). Работа второго автора выполнена при поддержке Российского научного фонда (грант № 14-11-00754). Работа третьего автора выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 14-01-31136-мол_а и 14-01-00349).

DOI: 10.4213/mzm10578

локально интегрируемы. Кроме того, для любых двух вектор-функций $f, g \in \mathcal{D}$ справедлив векторный аналог тождества Грина

$$\int_{\alpha}^{\beta} \{ (l[f], g) - (f, l[g]) \} = [f, g](\beta) - [f, g](\alpha), \quad 1 \leq \alpha \leq \beta < \infty, \quad (2)$$

где $(g, h) = \sum_{s=1}^n g_s \bar{h}_s$ – скалярное произведение векторов g и h , а форма $[f, g]$ определяется равенством $[f, g](x) := (f^{[1]}, g) - (f, g^{[1]})$.

Рассмотрим матричное квазидифференциальное уравнение

$$l[y] = \lambda y, \quad (3)$$

где $\lambda \in C$.

Отметим, что это уравнение равносильно системе дифференциальных уравнений 1-го порядка

$$y' = (F - \Lambda)y, \quad (4)$$

где

$$F = \begin{pmatrix} R & P^{-1} \\ Q & -R^* \end{pmatrix}, \quad \Lambda = \begin{pmatrix} O & O \\ \lambda I_n & O \end{pmatrix}, \quad y = (y_1, \dots, y_n, y_1^{[1]}, \dots, y_n^{[1]})^t,$$

а символами O и I_n обозначены нулевая и единичная матрицы порядка n соответственно. Равносильность уравнений (3) и (4) понимается в том смысле, что если $y(x)$ является векторным решением системы (3), то $2n$ -компонентный вектор-столбец y является решением (4) и наоборот, если $2n$ -компонентный вектор-столбец y – решение системы (4), то первые его n компонент – решение уравнения (3).

Отметим также, что условие (A) обеспечивает справедливость теоремы существования и единственности решения задачи Коши для системы (4), поставленной в любой точке интервала I .

3. Минимальный оператор L_0 . Индекс дефекта. Пусть $L_n^2(I)$ – гильбертово пространство n -компонентных комплекснозначных вектор-функций, измеримых по Лебегу на I , у которых сумма квадратов модулей координат интегрируема по Лебегу на I . С помощью таких же рассуждений, как и в [4], с использованием формулы (2), определяется минимальный замкнутый симметрический оператор L_0 , порожденный выражением $l[y]$ в пространстве $L_n^2(I)$. Согласно [4]–[6] дефектные числа n_+ и n_- оператора L_0 совпадают с максимальным числом линейно независимых решений уравнения (3), когда параметр λ берется из верхней ($\text{Im } \lambda > 0$) или нижней ($\text{Im } \lambda < 0$) полуплоскости соответственно, удовлетворяют неравенствам $n \leq n_+$, $n_- \leq 2n$ и, кроме того, $n_+ = 2n$ тогда и только тогда, когда $n_- = 2n$. Пара чисел (n_+, n_-) называется *индексом дефекта* оператора L_0 .

4. Аналог теоремы Орлова об индексе дефекта оператора L_0 .

УСЛОВИЕ (B). *Предположим, что при всех $x \geq 1$ и некотором $\nu > 0$ матричные функции $P^{-1}(x)$, $Q(x)$ и $R(x)$ представимы в виде*

$$P^{-1}(x) = x^{-\nu-2}(P_0 + P_1(x)), \quad Q(x) = x^{\nu}(Q_0 + Q_1(x)), \quad R(x) = x^{-1}(R_0 + R_1(x)),$$

где P_0 , Q_0 и R_0 – квадратные числовые матрицы порядка n , а $P_1(x)$, $Q_1(x)$ и $R_1(x)$ – матричные функции того же порядка.

Обозначим через D блочно-диагональную матрицу вида

$$D = \begin{pmatrix} x^{-1/2}I_n & O \\ O & x^{\nu+1/2}I_n \end{pmatrix}$$

и в системе (4) сделаем замену $y = DY$. Простые рассуждения показывают, что неизвестная вектор-функция Y удовлетворяет системе дифференциальных уравнений

$$Y' = x^{-1}(A + B(x))Y, \quad (5)$$

где A – квадратная числовая матрица $2n$ -го порядка и $B(x)$ – матричная функция того же порядка, которые в блочном представлении имеют вид

$$A = \begin{pmatrix} R_0 + \frac{1}{2} I_n & P_0 \\ Q_0 & -R_0^* - \left(\nu + \frac{1}{2}\right) I_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} R_1(x) & P_1(x) \\ Q_1(x) - \frac{\lambda}{x^\nu} I_n & -R_1^*(x) \end{pmatrix}.$$

Предположим далее, что матричные функции $P_1(x)$, $Q_1(x)$ и $R_1(x)$ таковы, что выполняется

УСЛОВИЕ (C). *Интегралы*

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln^r(x)}{x} |P_1(x)| dx, \quad \int_1^{+\infty} \frac{\ln^r(x)}{x} |Q_1(x)| dx, \quad \int_1^{+\infty} \frac{\ln^r(x)}{x} |R_1(x)| dx$$

сходятся, где $r+1$ – максимальная кратность характеристического корня матрицы A , а $|\cdot|$ – норма матрицы, определяемая как сумма модулей всех ее элементов.

Условие (C) позволяет, применив результат задачи из [7] (см. задача 35, гл. III, с. 120), получить главный член асимптотики некоторой фундаментальной матрицы системы (5) при $x \rightarrow +\infty$. Из этого уже легко определить и главный член асимптотики некоторой фундаментальной матрицы уравнения (3).

Эти асимптотические формулы позволяют сформулировать и доказать аналог теоремы Орлова для определения дефектных чисел оператора L_0 , порожденного матричным квазидифференциальным выражением (3), т.е. справедлива следующая

ТЕОРЕМА 1. Пусть выполнены условия (A)–(C), тогда дефектные числа n_+ и n_- оператора L_0 равны между собой и определяются как число корней многочлена $\mathcal{F}(z, \nu) := \det(A - zI_{2n})$, лежащих в области $\operatorname{Re} z < 0$.

5. Пример. Пусть $n = 2$ и $R(x) = O$. Тогда квазидифференциальное выражение (1) и многочлен $\mathcal{F}(z, \nu)$ запишутся в виде

$$l[y](x) = -(Py')' + Qy, \quad x \in I, \\ \mathcal{F}(z, \nu) = \left[\left(z + \frac{\nu}{2} \right)^2 - \left(\frac{\nu+1}{2} \right)^2 \right]^2 - \left[\left(z + \frac{\nu}{2} \right)^2 - \left(\frac{\nu+1}{2} \right)^2 \right] \times \operatorname{sp}(P_0 \cdot Q_0) + \det P_0 \times \det Q_0.$$

Отметим, что многочлен $\mathcal{F}(z, \nu)$ является произвольным квадратным трехчленом относительно $(z + \nu/2)^2$, поэтому число корней этого многочлена, лежащих в левой полуплоскости, за счет выбора элементов матриц P_0 и Q_0 может быть сделано любым из чисел 2, 3 и 4.

ЗАМЕЧАНИЕ. Выбирая матрицы P , Q и R надлежащим образом, можно доказать, что аналог теоремы 1 остается в силе и для оператора L_0 , порожденного выражением вида

$$l[y](x) = -(Py')' + Q'y, \quad x \in I,$$

где всюду производные понимаются в обобщенном смысле.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] С. А. Орлов, *Докл. АН СССР*, **92**:3 (1953), 483–486. [2] Ф. А. Наймарк, “Об индексе дефекта дифференциального оператора”, *УМН*, **17**:4 (1962), 157–163. [3] К. А. Мирзоев, *Докл. РАН*, **380**:5 (2001), 591–595. [4] М. А. Наймарк, *Линейные дифференциальные операторы*, Наука, М., 1969. [5] В. П. Серебряков, *Изв. вузов. Матем.*, 2000, № 3, 48–53. [6] R. L. Anderson, *Canad. J. Math*, **28**:5 (1976), 905–914. [7] Э. А. Коддингтон, Н. Левинсон, *Теория обыкновенных дифференциальных уравнений*, ИЛ, М., 1958.

И. Н. Бройтигам

Северный (Арктический) федеральный
университет им. М. В. Ломоносова, г. Архангельск
E-mail: irinadolgi@rambler.ru

Поступило

14.09.2014

К. А. Мирзоев

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: mirzoev.karahan@mail.ru

Т. А. Сафонова

Северный (Арктический) федеральный
университет им. М. В. Ломоносова, г. Архангельск
E-mail: tanya.strelkova@rambler.ru