Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Подольский, Тождества для кратных интегралов,
Матем. заметки, 2015, том 98, выпуск 4, 557–564

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10579>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.185.249

26 апреля 2023 г., 11:53:18

Тождества для кратных интегралов

А. А. Подольский

С. А. Злобин доказал интегральное тождество, связывающее два различных метода построения диофантовых приближений к значениям дзета-функции Римана в целых точках. В данной работе будут доказаны несколько вариантов обобщения этого интегрального тождества.

Библиография: 1 название.

DOI: 10.4213/mzm10579

1. Первое тождество. Пусть дан набор натуральных чисел $\bar{s} = (s_1, \dots, s_l)$. Будем называть $l(\bar{s}) = l$ *длиной*, а $|\bar{s}| = s_1 + \dots + s_l$ *весом* этого набора. Положим $l(\emptyset) = 0$ и $|\emptyset| = 0$.

Определим многочлены

$$\begin{aligned} Q_0(z_1, \dots, z_l, x_1, \dots, x_{|\bar{s}|}) &= 1, \\ Q_j(z_1, \dots, z_l, x_1, \dots, x_{|\bar{s}|}) &= Q_{j-1}(z_1, \dots, z_l, x_1, \dots, x_{|\bar{s}|}) \\ &\quad - z_1 \cdots z_j x_1 \cdots x_{s_1+\dots+s_j-1} (1 - x_{s_1+\dots+s_j}), \end{aligned} \quad (1)$$

где $x_1, \dots, x_{|\bar{s}|} \in \mathbb{R}$, $z_1, \dots, z_l \in \mathbb{C}$. Таким образом,

$$\begin{aligned} Q_j(z_1, \dots, z_l, x_1, \dots, x_{|\bar{s}|}) &= 1 - z_1 x_1 \cdots x_{s_1-1} + z_1 x_1 \cdots x_{s_1} - \dots \\ &\quad - z_1 \cdots z_j x_1 \cdots x_{s_1+\dots+s_j-1} + z_1 \cdots z_j x_1 \cdots x_{s_1+\dots+s_j}. \end{aligned}$$

Заметим, что при $|z_1| < 1, \dots, |z_l| < 1$, $x_1, \dots, x_{|\bar{s}|} \in [0, 1]$ выполняются неравенства

$$\begin{aligned} |Q_j(z_1, \dots, z_l, x_1, \dots, x_{|\bar{s}|})| &> Q_j(\underbrace{1, \dots, 1}_l, x_1, \dots, x_{|\bar{s}|}) \\ &\geq x_1 \cdots x_{s_1+\dots+s_j} \geq x_1 \cdots x_{|\bar{s}|} \geq 0 \end{aligned} \quad (2)$$

для $j = 1, \dots, l$.

Пусть даны наборы $\bar{a} = (a_1, \dots, a_{|\bar{s}|})$, $\bar{b} = (b_1, \dots, b_{|\bar{s}|})$, $\bar{d} = (d_1, \dots, d_l)$ комплексных чисел. Пусть эти числа удовлетворяют следующим условиям: $\operatorname{Re} b_i > \operatorname{Re} a_i > 0$ при $1 \leq i \leq |\bar{s}|$, $\operatorname{Re} d_l > 0$ и остальные d_j либо равны нулю, либо лежат в правой полуплоскости. Кроме того, пусть дан набор комплексных чисел $\bar{c} = (c_1, \dots, c_l)$, на

Данная работа была проделана при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 15-01-05700 А).

который наложены те же ограничения, что и на набор $\bar{d}$. Пусть также дан набор комплексных чисел $\bar{z} = (z_1, \dots, z_l)$ с условием $|z_j| < 1$ при $1 \leq j \leq l$.

Введем следующие обозначения:

$$I_{\bar{s}}(\bar{a}; \bar{b}; \bar{d} \mid \bar{z}) = \prod_{i=1}^{|\bar{s}|} \frac{\Gamma(b_i)}{\Gamma(a_i)\Gamma(b_i - a_i)} \int_{[0,1]^{|\bar{s}|}} \frac{\prod_{i=1}^{|\bar{s}|} x_i^{a_i-1} (1-x_i)^{b_i-a_i-1}}{\prod_{j=1}^l (Q_j(\bar{z}, \bar{x}))^{d_j}} d\bar{x},$$

$$J_{\bar{s}}(\bar{a}; \bar{b}; \bar{c} \mid \bar{z}) = \prod_{i=1}^{|\bar{s}|} \frac{\Gamma(b_i)}{\Gamma(a_i)\Gamma(b_i - a_i)} \int_{[0,1]^{|\bar{s}|}} \frac{\prod_{i=1}^{|\bar{s}|} x_i^{a_i-1} (1-x_i)^{b_i-a_i-1}}{\prod_{j=1}^l (1 - z_1 \cdots z_j x_1 \cdots x_{s_1+\dots+s_j})^{c_j}} d\bar{x},$$

где $d\bar{x} = dx_1 \dots dx_{|\bar{s}|}$ в обоих случаях, и положим $I_{\emptyset} = 1$ и $J_{\emptyset} = 1$.

Будем обозначать

$$d_{k,l} = \sum_{j=k}^l d_j,$$

полагая $d_0 = 0$. Обозначим $a_0 = d_{1,l}$. Кроме того, будем обозначать

$$r_j = \sum_{n=1}^j s_n,$$

естественно полагая $r_0 = 0$.

Определим теперь вектор $\bar{s}' = (s'_1, \dots, s'_l)$ формулами

$$s'_1 = s_1, \quad s'_j = s_j + \delta_{d_{j-1}}^0 \quad \text{при} \quad 1 < j \leq l.$$

Таким образом, $l(\bar{s}) = l(\bar{s}') = l$ и $|\bar{s}| \leq |\bar{s}'|$. Аналогично предыдущему, будем обозначать $r'_j = \sum_{n=1}^j s'_n$, естественно полагая $r'_0 = 0$.

Определим вектор $\bar{a}'$ следующим образом. Сначала после каждого a_{r_j} для $1 \leq j < l$ при условии $d_j \neq 0$ добавим новую координату $d_{j+1,l}$. А затем на место каждого a_{r_j} при $1 \leq j \leq l$ поставим $a_{r_{j-1}}$. Таким образом, получится вектор

$$\bar{a}' = (a_1, \dots, a_{r_1-1}, a_0, (d_{2,l}), \dots, a_{r_{l-2}-1}, a_{r_{l-3}}, (d_{l-1,l}), \dots, a_{r_{l-1}-1}, a_{r_{l-2}}, (d_{l,l}), \dots, a_{r_{l-1}}, a_{r_{l-1}}).$$

Скобки означают, что добавлять новые координаты нужно не всегда, а только когда $d_j \neq 0$.

Введем теперь вектор $\bar{b}'$. Для этого после каждого b_{r_j} для $1 \leq j < l$ при условии $d_j \neq 0$ добавим новую координату $d_{j,l}$. В результате получится вектор

$$\bar{b}' = (b_1, \dots, b_{r_1-1}, b_{r_1}, (d_{1,l}), \dots, b_{r_{l-2}-1}, b_{r_{l-2}}, (d_{l-2,l}), \dots, b_{r_{l-1}-1}, b_{r_{l-1}}, (d_{l-1,l}), \dots, b_{r_{l-1}}, b_{r_{l-1}}).$$

Потребуем дополнительно, чтобы выполнялось $\operatorname{Re} b_{r_j} > \operatorname{Re} a_{r_{j-1}}$ для $1 \leq j \leq l$.

Введем еще вектор $\bar{c}' = (b_{r_1} - a_{r_1}, \dots, b_{r_l} - a_{r_l})$. Заметим, что предшествующими ограничениями гарантируется $\operatorname{Re} c'_j > 0$.

ТЕОРЕМА 1.1. В введенных обозначениях и при указанных выше ограничениях справедливо следующее равенство:

$$I_{\bar{s}}(\bar{a}; \bar{b}; \bar{d} \mid \bar{z}) = J_{\bar{s}'}(\bar{a}'; \bar{b}'; \bar{c}' \mid \bar{z}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Перед тем как доказывать само интегральное равенство, преформулируем его:

$$\begin{aligned}
 I &= \int_{[0,1]^{|\bar{s}|}} \frac{\prod_{i=1}^{|\bar{s}|} x_i^{a_i-1} (1-x_i)^{b_i-a_i-1}}{\prod_{j=1}^l Q_j(\bar{z}, \bar{x})^{d_j}} d\bar{x} \\
 &= \frac{\Gamma(a_{r_l})}{\Gamma(d_l)} \prod_{j=1}^l \frac{\Gamma(b_{r_j} - a_{r_j})}{\Gamma(b_{r_j} - a_{r_{j-1}})} \prod_{\substack{j=1 \\ d_j \neq 0}}^{l-1} \frac{1}{\Gamma(d_j)} \\
 &\quad \times \int_{[0,1]^{r_l}} \frac{\prod_{j=1}^l (\prod_{r_{j-1} < i < r_j} x_i^{a_i-1} (1-x_i)^{b_i-a_i-1} \cdot x_{r_j}^{a_{r_j}-1} (1-x_{r_j})^{b_{r_j}-a_{r_j}-1})}{\prod_{j=1}^l (1-z_1 \cdots z_j x_1 \cdots x_{r_j} \prod_{\substack{p=1 \\ d_p \neq 0}}^{j-1} y_p)^{b_{r_j}-a_{r_j}}} \\
 &\quad \times \prod_{\substack{j=1 \\ d_j \neq 0}}^{l-1} y_j^{d_{j+1,l}-1} (1-y_j)^{d_j-1} d\bar{x} \prod_{\substack{j=1 \\ d_j \neq 0}}^{l-1} dy_j.
 \end{aligned}$$

Доказывать утверждение будем индукцией по l .

База очевидна: при $l = 0$ получаем тривиальное равенство $1 = 1$.

Совершим теперь переход индукции. Предположим, что $l \geq 1$ и утверждение доказано для $l-1$; докажем его для l .

Преобразуем интеграл I , совершив замену $x_{|\bar{s}|} \rightarrow 1 - x_{|\bar{s}|}$. Используя то, что только многочлен Q_l зависит от переменной $x_{|\bar{s}|}$, вынесем за скобки многочлен Q_{l-1} в знаменателе:

$$\begin{aligned}
 I &= \int_{[0,1]^{|\bar{s}|}} \frac{\prod_{i=1}^{|\bar{s}|-1} x_i^{a_i-1} (1-x_i)^{b_i-a_i-1} x_{|\bar{s}|}^{b_{|\bar{s}|}-a_{|\bar{s}|-1}-1} (1-x_{|\bar{s}|})^{a_{|\bar{s}|-1}-1}}{Q_1^{d_1} \cdots Q_{l-1}^{d_{l-1}} \cdot (Q_{l-1} - z_1 \cdots z_l x_1 \cdots x_{|\bar{s}|})^{d_l}} d\bar{x} \\
 &= \int_{[0,1]^{r_{l-1}}} \frac{\prod_{i=1}^{r_{l-1}} x_i^{a_i-1} (1-x_i)^{b_i-a_i-1}}{Q_1^{d_1} \cdots Q_{l-2}^{d_{l-2}} Q_{l-1}^{d_{l-1,l}}} \\
 &\quad \times \int_{[0,1]^{s_l}} \frac{\prod_{r_{l-1} < i < r_l} x_i^{a_i-1} (1-x_i)^{b_i-a_i-1} x_{r_l}^{b_{r_l}-a_{r_l}-1} (1-x_{r_l})^{a_{r_l}-1}}{(1 - (z_1 \cdots z_l x_1 \cdots x_{r_l}) / Q_{l-1})^{d_l}} d\bar{x}.
 \end{aligned}$$

Из неравенств (2) для многочленов Q_j следует, что при $|z_1| < 1, \dots, |z_l| < 1$ выполнено неравенство

$$\left| \frac{z_1 \cdots z_l \cdot x_1 \cdots x_{r_l}}{Q_{l-1}(z_1, \dots, z_l, x_1, \dots, x_{r_l})} \right| \leq |z_1| \cdots |z_l| \cdot \frac{x_1 \cdots x_{r_l}}{Q_{l-1}(1, \dots, 1, x_1, \dots, x_{r_l})} < 1.$$

Значит, знаменатель последнего интеграла можно разложить в сходящийся ряд Тейлора:

$$\begin{aligned}
 &\left(1 - \frac{z_1 \cdots z_l \cdot x_1 \cdots x_{r_l}}{Q_{l-1}(z_1, \dots, z_l, x_1, \dots, x_{r_l})} \right)^{-d_l} \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(d_l + k)}{\Gamma(d_l) k!} \left(\frac{z_1 \cdots z_l \cdot x_1 \cdots x_{r_l}}{Q_{l-1}(z_1, \dots, z_l, x_1, \dots, x_{r_l})} \right)^k.
 \end{aligned}$$

Подставим это разложение и воспользуемся равномерной сходимостью интегралов, меняя местами суммирование и интегрирование:

$$I = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(d_l + k)}{\Gamma(d_l)k!} z_1^k \cdots z_l^k \int_{[0,1]^{r_{l-1}}} \frac{\prod_{i=1}^{r_{l-1}} x_i^{a_i+k-1} (1-x_i)^{b_i-a_i-1}}{Q_1^{d_1} \cdots Q_{l-2}^{d_{l-2}} Q_{l-1}^{d_{l-1,l}+k}} dx_1 \cdots dx_{r_{l-1}} \\ \times \int_{[0,1]^{s_l}} \prod_{r_{l-1} < i < r_l} x_i^{a_i+k-1} (1-x_i)^{b_i-a_i-1} x_{r_l}^{b_{r_l}-a_{r_l}+k-1} (1-x_{r_l})^{a_{r_l}-1} dx_{r_{l-1}+1} \cdots dx_{r_l}.$$

Второй интеграл представляет собой просто бета-функцию по каждой из переменных, так что он равен

$$\prod_{r_{l-1} < i < r_l} \frac{\Gamma(a_i + k) \Gamma(b_i - a_i)}{\Gamma(b_i + k)} \cdot \frac{\Gamma(a_{r_l}) \Gamma(b_{r_l} - a_{r_l} + k)}{\Gamma(b_{r_l} + k)}.$$

К первому интегралу применим предположение индукции:

$$\int_{[0,1]^{r_{l-1}}} \frac{\prod_{i=1}^{r_{l-1}} x_i^{a_i+k-1} (1-x_i)^{b_i-a_i-1}}{Q_1^{d_1} \cdots Q_{l-2}^{d_{l-2}} (Q_{l-1})^{d_{l-1,l}+k}} d\bar{x} \\ = \frac{\Gamma(a_{r_{l-1}} + k)}{\Gamma(d_{l-1,l} + k)} \cdot \prod_{j=1}^{l-1} \frac{\Gamma(b_{r_j} - a_{r_j})}{\Gamma(b_{r_j} - a_{r_{j-1}})} \cdot \prod_{\substack{j=1 \\ d_j \neq 0}}^{l-2} \frac{1}{\Gamma(d_j)} \\ \times \int_{[0,1]^{r'_{l-1}}} \frac{\prod_{j=1}^{l-1} (\prod_{r_{j-1} < i < r_j} x_i^{a_i+k-1} (1-x_i)^{b_i-a_i-1} \cdot x_{r_j}^{a_{r_j}-1+k-1} (1-x_{r_j})^{b_{r_j}-a_{r_{j-1}}-1})}{\prod_{j=1}^{l-1} (1-z_1 \cdots z_j x_1 \cdots x_{r_j} \prod_{\substack{p=1 \\ d_p \neq 0}}^{j-1} y_p)^{b_{r_j}-a_{r_j}}} \\ \times \prod_{\substack{j=1 \\ d_j \neq 0}}^{l-2} y_j^{d_{j+1,l}+k-1} (1-y_j)^{d_j-1} d\bar{x} d\bar{y}, \quad \text{где} \quad d\bar{y} = \prod_{\substack{j=1 \\ d_j \neq 0}}^{l-2} dy_j.$$

Объединим полученные результаты, перегруппировав гамма-множители и воспользовавшись равномерной сходимостью:

$$I = \frac{\Gamma(a_{r_l})}{\Gamma(d_l)} \cdot \prod_{j=1}^l \frac{\Gamma(b_{r_j} - a_{r_j})}{\Gamma(b_{r_j} - a_{r_{j-1}})} \cdot \prod_{\substack{j=1 \\ d_j \neq 0}}^{l-2} \frac{1}{\Gamma(d_j)} \\ \times \int_{[0,1]^{r'_{l-1}}} \frac{\prod_{j=1}^{l-1} (\prod_{r_{j-1} < i < r_j} x_i^{a_i-1} (1-x_i)^{b_i-a_i-1} \cdot x_{r_j}^{a_{r_j}-1} (1-x_{r_j})^{b_{r_j}-a_{r_{j-1}}-1})}{\prod_{j=1}^{l-1} (1-z_1 \cdots z_j x_1 \cdots x_{r_j} \prod_{\substack{p=1 \\ d_p \neq 0}}^{j-1} y_p)^{b_{r_j}-a_{r_j}}} \\ \times \prod_{\substack{j=1 \\ d_j \neq 0}}^{l-2} y_j^{d_{j+1,l}-1} (1-y_j)^{d_j-1} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(b_{r_l} - a_{r_l} + k)}{\Gamma(b_{r_l} - a_{r_l})k!} \left(z_1 \cdots z_l x_1 \cdots x_{r_{l-1}} \prod_{\substack{j=1 \\ d_j \neq 0}}^{l-2} y_j \right)^k \\ \times \prod_{r_{j-1} < i < r_j} \frac{\Gamma(a_i + k) \Gamma(b_i - a_i)}{\Gamma(b_i + k)} \cdot \frac{\Gamma(a_{r_{l-1}} + k) \Gamma(b_{r_l} - a_{r_{l-1}})}{\Gamma(b_{r_l} + k)} \cdot \frac{\Gamma(d_l + k)}{\Gamma(d_{l-1,l} + k)} d\bar{x} d\bar{y}.$$

Заметим, что

$$\prod_{\substack{j=1 \\ d_j \neq 0}}^{l-2} \frac{1}{\Gamma(d_j)} \cdot \frac{\Gamma(d_l + k)}{\Gamma(d_{l-1,l} + k)} = \begin{cases} \prod_{\substack{j=1 \\ d_j \neq 0}}^{l-1} \frac{1}{\Gamma(d_j)}, & \text{если } d_{l-1} = 0, \\ \prod_{\substack{j=1 \\ d_j \neq 0}}^{l-1} \frac{1}{\Gamma(d_j)} \cdot \frac{\Gamma(d_l + k)\Gamma(d_{l-1})}{\Gamma(d_{l-1} + d_l + k)} & \text{иначе.} \end{cases}$$

Заметим, что внутриинтегральная сумма сама является интегралом; только теперь множитель $\Gamma(d_l + k)\Gamma(d_{l-1})/\Gamma(d_{l-1} + d_l + k)$, если он есть, дает еще одну переменную интегрирования:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(b_{r_l} - a_{r_l} + k)}{\Gamma(b_{r_l} - a_{r_l})k!} (z_1 \cdots z_l x_1 \cdots x_{r_{l-1}} \prod_{\substack{j=1 \\ d_j \neq 0}}^{l-2} y_j)^k \\ & \times \prod_{r_{j-1} < i < r_j} \frac{\Gamma(a_i + k)\Gamma(b_i - a_i)}{\Gamma(b_i + k)} \cdot \frac{\Gamma(a_{r_{l-1}} + k)\Gamma(b_{r_l} - a_{r_{l-1}})}{\Gamma(b_{r_l} + k)} \cdot \frac{\Gamma(d_l + k)}{\Gamma(d_{l-1,l} + k)} \\ & = \int_{[0,1]^{s'_l}} \frac{\prod_{r_{j-1} < i < r_j} x_i^{a_i-1} (1-x_i)^{b_i-a_i-1} \cdot x_{r_l}^{a_{r_l}-1} (1-x_{r_l})^{b_{r_l}-a_{r_l}-1}}{(1-z_1 \cdots z_l x_1 \cdots x_{r_l} \prod_{\substack{j=1 \\ d_j \neq 0}}^{l-1} y_j)^{b_{r_l}-a_{r_l}}} \\ & \times \left(\frac{1}{\Gamma(d_{l-1})} \cdot y_{l-1}^{d_{l-1}-1} (1-y_{l-1})^{d_{l-1}-1} dy_{l-1} \right) dx_{r_{l-1}+1} \cdots dx_{r_l}, \end{aligned}$$

где последнее выражение в скобках появляется только тогда, когда $d_{l-1} \neq 0$.

Подстановка этого равенства в выражение для I завершает доказательство теоремы:

$$\begin{aligned} I &= \int_{[0,1]^{|\bar{s}|}} \frac{\prod_{i=1}^{|\bar{s}|} x_i^{a_i-1} (1-x_i)^{b_i-a_i-1}}{\prod_{j=1}^l Q_j(\bar{z}, \bar{x})^{d_j}} d\bar{x} \\ &= \frac{\Gamma(a_{r_l})}{\Gamma(d_l)} \cdot \prod_{j=1}^l \frac{\Gamma(b_{r_j} - a_{r_j})}{\Gamma(b_{r_j} - a_{r_{j-1}})} \cdot \prod_{\substack{j=1 \\ d_j \neq 0}}^{l-1} \frac{1}{\Gamma(d_j)} \\ & \times \int_{[0,1]^{r'_l}} \frac{\prod_{j=1}^l (\prod_{r_{j-1} < i < r_j} x_i^{a_i-1} (1-x_i)^{b_i-a_i-1} \cdot x_{r_j}^{a_{r_j}-1} (1-x_{r_j})^{b_{r_j}-a_{r_j}-1})}{\prod_{j=1}^l (1-z_1 \cdots z_j x_1 \cdots x_{r_j} \prod_{\substack{p=1 \\ d_p \neq 0}}^{j-1} y_p)^{b_{r_j}-a_{r_j}}} \\ & \times \prod_{\substack{j=1 \\ d_j \neq 0}}^{l-1} y_j^{d_{j+1,l}-1} (1-y_j)^{d_j-1} d\bar{x} \prod_{\substack{j=1 \\ d_j \neq 0}}^{l-1} dy_j. \end{aligned}$$

Теорема 1.1 доказана.

Результаты работы [1] получаются из доказанной теоремы при $\bar{d} = (0, \dots, 0, d_l)$ и $\bar{z} = (z, 1, \dots, 1)$.

Заметим также, что из доказательства теоремы ясно, что координаты вектора $\bar{a}$ внутри групп, находящихся между $(d_{j,l})$ и $(d_{j+1,l})$, можно произвольным образом переставлять, например, сдвинуть по циклу. То есть, если обозначить

$$\tilde{a} = (a_0, \dots, a_{r_1-1}, (d_{2,l})a_{r_1}, \dots, a_{r_l-1-1}, (d_{l,l})a_{r_l-1}, \dots, a_{r_l-1}),$$

то при соответствующих ограничениях будет справедливо равенство

$$I_{\bar{s}}(\bar{a}; \bar{b}; \bar{d} \mid \bar{z}) = J_{\bar{s}'}(\tilde{a}; \bar{b}'; \bar{c}' \mid \bar{z}).$$

2. Второе тождество. Наложив некоторые ограничения на параметры a_i , можно избежать появления новых переменных интегрирования. А именно, потребуем $a_{r_j} = d_{j,l}$ при $d_j \neq 0$ для $1 \leq j < l$ и будем обозначать

$$\bar{a}' = (a_1, \dots, a_{r_1-1}, \hat{a}_{r_1}, a_{r_1+1}, \dots, a_{r_2-1}, \hat{a}_{r_2}, a_{r_2+1}, \dots, a_{r_l-1}, \hat{a}_{r_l}),$$

где $\hat{a}_{r_1} = d_{1,l}$, а для $1 < j \leq l$

$$\hat{a}_{r_j} = \begin{cases} d_{j,l}, & \text{если } d_{j-1} \neq 0, \\ a_{r_{j-1}} & \text{иначе.} \end{cases}$$

В таких обозначениях и с учетом ограничений предыдущей теоремы оказывается верна

ТЕОРЕМА 2.1. *Имеет место равенство*

$$I_{\bar{s}}(\bar{a}; \bar{b}; \bar{d} \mid \bar{z}) = J_{\bar{s}}(\bar{a}'; \bar{b}; \bar{c}' \mid \bar{z}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Снова переформулируем утверждение теоремы перед началом доказательства:

$$\begin{aligned} I &= \int_{[0,1]^{|\bar{s}|}} \frac{\prod_{i=1}^{|\bar{s}|} x_i^{a_i-1} (1-x_i)^{b_i-a_i-1}}{\prod_{j=1}^l Q_j(\bar{z}, \bar{x})^{d_j}} d\bar{x} \\ &= \frac{\Gamma(a_{r_l})}{\Gamma(d_l)} \cdot \prod_{j=1}^l \frac{\Gamma(b_{r_j} - a_{r_j})}{\Gamma(b_{r_j} - \hat{a}_{r_j})} \\ &\quad \times \int_{[0,1]^{r_l}} \frac{\prod_{j=1}^l (\prod_{r_{j-1} < i < r_j} x_i^{a_i-1} (1-x_i)^{b_i-a_i-1} \cdot x_{r_j}^{\hat{a}_{r_j}-1} (1-x_{r_j})^{b_{r_j}-\hat{a}_{r_j}-1})}{\prod_{j=1}^l (1-z_1 \cdots z_j x_1 \cdots x_{r_j})^{b_{r_j}-a_{r_j}}} d\bar{x}. \end{aligned}$$

Доказываем утверждение тоже индукцией по l ; база $l = 0$ очевидна.

Пусть $l \geq 1$ и утверждение доказано для $l-1$; докажем его для l .

Преобразуя интеграл I совершенно так же, как и в ходе доказательства предыдущей теоремы, получаем, что

$$\begin{aligned} I &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(d_l + k)}{\Gamma(d_l) k!} z_1^k \cdots z_l^k \int_{[0,1]^{r_{l-1}}} \frac{\prod_{i=1}^{r_{l-1}} x_i^{a_i+k-1} (1-x_i)^{b_i-a_i-1}}{Q_1^{d_1} \cdots Q_{l-2}^{d_{l-2}} Q_{l-1}^{d_{l-1}+k}} dx_1 \cdots dx_{r_{l-1}} \\ &\quad \times \int_{[0,1]^{s_l}} \prod_{r_{l-1} < i < r_l} x_i^{a_i+k-1} (1-x_i)^{b_i-a_i-1} x_{r_l}^{b_{r_l}-a_{r_l}+k-1} (1-x_{r_l})^{a_{r_l}-1} dx_{r_{l-1}+1} \cdots dx_{r_l}. \end{aligned}$$

К первому интегралу применим предположение индукции:

$$\begin{aligned}
 & \int_{[0,1]^{r_{l-1}}} \frac{\prod_{i=1}^{r_{l-1}} x_i^{a_i+k-1} (1-x_i)^{b_i-a_i-1}}{Q_1^{d_1} \dots Q_{l-2}^{d_{l-2}} Q_{l-1}^{d_{l-1,l}+k}} dx_1 \dots dx_{r_{l-1}} \\
 &= \frac{\Gamma(a_{r_{l-1}}+k)}{\Gamma(d_{l-1,l}+k)} \cdot \prod_{j=1}^{l-1} \frac{\Gamma(b_{r_j}-a_{r_j})}{\Gamma(b_{r_j}-\widehat{a}_{r_j})} \\
 & \quad \times \int_{[0,1]^{r_{l-1}}} \frac{\prod_{j=1}^{l-1} (\prod_{r_{j-1}<i<r_j} x_i^{a_i+k-1} (1-x_i)^{b_i-a_i-1} x_{r_j}^{\widehat{a}_{r_j}+k-1} (1-x_{r_j})^{b_{r_j}-\widehat{a}_{r_j}-1})}{\prod_{j=1}^{l-1} (1-z_1 \dots z_j x_1 \dots x_{r_j})^{b_{r_j}-a_{r_j}}} \\
 & \quad \times dx_1 \dots dx_{r_{l-1}}.
 \end{aligned}$$

Возьмем второй интеграл явно и получим следующее выражение для I , меняя местами гамма-множители и пользуясь равномерной сходимостью:

$$\begin{aligned}
 I &= \frac{\Gamma(a_{r_l})}{\Gamma(d_l)} \cdot \prod_{j=1}^{l-1} \frac{\Gamma(b_{r_j}-a_{r_j})}{\Gamma(b_{r_j}-\widehat{a}_{r_j})} \\
 & \quad \times \int_{[0,1]^{r_{l-1}}} \frac{\prod_{j=1}^{l-1} (\prod_{r_{j-1}<i<r_j} x_i^{a_i-1} (1-x_i)^{b_i-a_i-1} \cdot x_{r_j}^{\widehat{a}_{r_j}-1} (1-x_{r_j})^{b_{r_j}-\widehat{a}_{r_j}-1})}{\prod_{j=1}^{l-1} (1-z_1 \dots z_j x_1 \dots x_{r_j})^{b_{r_j}-a_{r_j}}} \\
 & \quad \times \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(b_{r_l}-a_{r_l}+k)}{\Gamma(b_{r_l}-a_{r_l})k!} (z_1 \dots z_l x_1 \dots x_{r_{l-1}})^k \prod_{r_{l-1}<i<r_l} \frac{\Gamma(a_i+k)\Gamma(b_i-a_i)}{\Gamma(b_i+k)} \\
 & \quad \times \Gamma(b_{r_l}-a_{r_l}) \cdot \frac{\Gamma(a_{r_{l-1}}+k)\Gamma(d_l+k)}{\Gamma(b_{r_l}+k)\Gamma(d_{l-1,l}+k)} dx_1 \dots dx_{r_{l-1}}.
 \end{aligned}$$

Заметим, что если $d_{l-1} = 0$, то $\widehat{a}_{r_l} = a_{r_{l-1}}$ и

$$\frac{\Gamma(d_l+k)}{\Gamma(d_{l-1,l}+k)} = 1,$$

а если $d_{l-1} \neq 0$, то $\widehat{a}_{r_l} = d_l$ и в силу условий теоремы $a_{r_{l-1}} = d_{l-1,l}$, откуда

$$\frac{\Gamma(a_{r_{l-1}}+k)}{\Gamma(d_{l-1,l}+k)} = 1.$$

То есть в любом случае будет выполняться

$$\Gamma(b_{r_l}-a_{r_l}) \cdot \frac{\Gamma(a_{r_{l-1}}+k)\Gamma(d_l+k)}{\Gamma(b_{r_l}+k)\Gamma(d_{l-1,l}+k)} = \frac{\Gamma(b_{r_l}-a_{r_l})}{\Gamma(b_{r_l}-\widehat{a}_{r_l})} \cdot \frac{\Gamma(\widehat{a}_{r_l}+k)\Gamma(b_{r_l}-\widehat{a}_{r_l})}{\Gamma(b_{r_l}+k)}.$$

Завершение доказательства у этой теоремы такое же, как и у предыдущей.

Теорема 2.1 доказана.

Эта теорема тоже обобщает теорему из работы [1], которая получается при $\bar{d} = (0, \dots, 0, d_l)$ и $\bar{z} = (z, 1, \dots, 1)$, так как при $d_j = 0$ никаких ограничений на параметры a_i не накладывается.

Аналогично предыдущему, из доказательства теоремы ясно, что координаты вектора $\bar{a}$ внутри групп, находящихся между $\hat{a}_{r_j}$ и $\hat{a}_{r_{j+1}}$, можно произвольным образом переставлять, например, сдвинуть по циклу. То есть, если обозначить

$$\tilde{a} = (a_0, \dots, a_{r_1-1}, \hat{a}_{r_2}, a_{r_1+1}, \dots, a_{r_l-1-1}, \hat{a}_{r_l}, a_{r_{l-1}}, \dots, a_{r_l-1}),$$

то при соответствующих ограничениях будет справедливо равенство

$$I_{\bar{s}}(\bar{a}; \bar{b}; \bar{d} \mid \bar{z}) = J_{\bar{s}}(\tilde{a}; \bar{b}; \bar{c}' \mid \bar{z}).$$

3. Общий результат. Определим теперь еще раз вектор

$$\bar{a}' = (a_0, \dots, a_{r_1-1}, \hat{a}_{r_1}, a_{r_1+1}, \dots, a_{r_l-1}, \hat{a}_{r_{l-1}}, a_{r_{l-1}+1}, \dots, a_{r_l-1}),$$

где $\hat{a}_{r_j}$ для $1 \leq j < l$ определяется так:

$$\hat{a}_{r_j} = \begin{cases} a_{r_j}, & \text{если } d_j = 0 \\ d_{j+1,l}, a_{r_j} & \text{если } d_j \neq 0 \text{ и } a_{r_j} \neq d_{j,l}, \end{cases}$$

а если $d_j \neq 0$ и $a_{r_j} = d_{j,l}$, то в качестве $\hat{a}_{r_j}$ можно брать как $d_{j+1,l}$, a_{r_j} , так и $d_{j+1,l}$. То есть иногда (по нашему усмотрению) $\hat{a}_{r_j}$ заменяется на одну, а иногда на две координаты. В соответствии с этим новым вектором $\bar{a}'$ формируется вектор $\bar{s}'$. То есть, если добавилась одна новая координата, то и s_j увеличивается на 1. Аналогичным образом формируется вектор $\bar{b}'$, т.е. при добавлении новой координаты $d_{j+1,l}$ в вектор $\bar{a}$ в вектор $\bar{b}$ добавляется координата $d_{j,l}$. В этих обозначениях и соответствующих ограничениях оказывается справедливо следующее равенство:

$$I_{\bar{s}}(\bar{a}; \bar{b}; \bar{d} \mid \bar{z}) = J_{\bar{s}'}(\bar{a}'; \bar{b}'; \bar{c}' \mid \bar{z}),$$

что немедленно следует из доказательств предыдущих теорем.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] С. А. Злобин, “О некоторых интегральных тождествах”, *УМН*, **57:3** (2002), 153–154.

А. А. Подольский

Московский государственный университет

имени М.В.Ломоносова

E-mail: a.a.podolskiy@gmail.com

Поступило

24.09.2014

Исправленный вариант

02.03.2015