Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Ю. Маковецкий, О преобразованиях специальных спай-
нов и специальных полиэдров, *Матем. заметки*, 1999,
том 65, выпуск 3, 354–361

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1058>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подра-
зумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 14:26:50

УДК 517

О ПРЕОБРАЗОВАНИЯХ СПЕЦИАЛЬНЫХ СПАЙНОВ И СПЕЦИАЛЬНЫХ ПОЛИЭДРОВ

А. Ю. Маковецкий

Изучаются специальные спайны 3-многообразий и специальные полиэдры. Рассматриваются специальные преобразования спайнов и полиэдров. Известно, что две триангуляции одного 3-многообразия имеют общее звездное подразделение и два разбиения Хегора одного 3-многообразия стабильно эквивалентны. Доказывается аналог этих фактов для спайнов и полиэдров. Изучаются спайны со структурой разветвленной поверхности.

Библиография: 11 названий.

Введение. В топологии трехмерных многообразий принято задавать многообразия как объединения более простых объектов. К числу таких способов задания относятся триангуляции многообразия и разбиение Хегора. Известно [1], что для двух триангуляций одного и того же многообразия справедлива теорема о существовании общего звездного подразделения. Также известно [2], что любые два разбиения Хегора одного и того же многообразия являются стабильно эквивалентными.

Кроме двух упомянутых способов задания 3-многообразий широко известен способ задания с помощью специальных спайнов, изученный в работах Каслера [3], Матвеева [4] и Пиергаллини [5]. В классе специальных спайнов существует некоторое отношение T -эквивалентности, состоящее в следующем: два специальных спайна являются T -эквивалентными, если от одного из них можно перейти ко второму посредством применения преобразований $T_0^{\pm 1}$, $T_2^{\pm 1}$. Возникает вопрос об аналоге упомянутых выше теорем для T -эквивалентных спайнов.

Этот же вопрос можно поставить и для класса специальных полиэдров.

В данной работе доказывается теорема о существовании для любых двух T -эквивалентных специальных полиэдров P и Q такого специального полиэдра S , что от полиэдра P к полиэдру S и от полиэдра Q к полиэдру S можно перейти только с помощью преобразований T_0 и T_2 . Также доказывается, что для любых двух специальных спайнов P и Q одного и того же 3-многообразия существует специальный спайн S того же многообразия такой, что от спайна P к спайну S и от спайна Q к спайну S можно перейти только с помощью преобразований T_0 и T_2 , оставаясь все время в классе специальных спайнов данного многообразия.

Тезисы данной статьи опубликованы в [6].

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 96-01-00847, и фонда INTAS, грант № 94-921.

1. Формулировки теорем.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Компактный полиэдр P называется *специальным полиэдром*, если выполняются следующие условия:

- 1) линк каждой его точки гомеоморфен одному из следующих одномерных полиэдров:
 - а) окружности;
 - б) окружности с диаметром;
 - в) окружности с тремя радиусами;
- 2) в P существует хотя бы одна точка с линком типа в);
- 3) любая 2-компонента, т.е. связное подмножество точек полиэдра с линком типа а), полиэдра P гомеоморфна открытой двумерной клетке.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Специальный полиэдр P , вкладываемый в 3-многообразие M с границей, называется *специальным спайном* этого многообразия, если многообразие M коллапсируется на полиэдр P , т.е. многообразие $M \setminus P$ гомеоморфно прямому произведению $\partial M \times (0, 1]$.

Рис. 1

Пусть P_1 – специальный полиэдр. Выберем в полиэдре P_1 ребро e . Рассмотрим регулярную окрестность E_1 ребра e в полиэдре P_1 (см. рис. 1). Пересечение окрестности E_1 с остальной частью полиэдра P_1 гомеоморфно объединению двух окружностей, соединенных тремя дугами. Рассмотрим полиэдр E_2 , который представляет собой поверхность треугольной призмы вместе со средним треугольником и тремя прямоугольниками, которые присоединены к поверхности призмы вдоль ее боковых ребер.

Естественная граница полиэдра E_2 гомеоморфна границе полиэдра E_1 . Если мы заменим окрестность E_1 на окрестность E_2 , то получим новый специальный полиэдр P_2 .

Замена полиэдра P_1 на полиэдр P_2 обозначается через T_2 , обратная замена через T_2^{-1} .

Аналогичным образом описываются преобразования T_0 и T_0^{-1} , состоящие в замене подполиэдра E_3 на подполиэдр E_4 и наоборот (см. рис. 1).

Преобразования T_2 и T_0 будем называть *увеличивающими*, преобразования T_2^{-1} и T_0^{-1} *уменьшающими*.

Специальные полиэдры P и Q будем называть *T -эквивалентными* ($P \stackrel{T}{\sim} Q$), если от полиэдра P к полиэдру Q можно перейти с помощью последовательности преобразований $T_0^{\pm 1}, T_2^{\pm 1}$. Если от полиэдра P к полиэдру Q можно перейти только с помощью

преобразований T_0 и T_2 (T_0^{-1} и T_2^{-1}), то будем обозначать этот факт через $P \nearrow Q$ (соответственно через $P \searrow Q$).

ТЕОРЕМА 1. Если $P \stackrel{T}{\sim} Q$, то существует полиэдр S такой, что $P \nearrow S \searrow Q$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть P и Q – специальные спайны одного и того же многообразия M^3 . Тогда существует специальный спайн S того же многообразия M^3 такой, что $P \nearrow S \searrow Q$, причем все промежуточные спайны между P и S и между S и Q являются специальными спайнами данного многообразия M^3 .

Доказательства теорем схожи, поэтому рассмотрим доказательство теоремы 2, после чего отметим, какие изменения надо внести в это доказательство, чтобы получить доказательство теоремы 1.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть $P_1, \dots, P_n$ и R – специальные спайны одного и того же 3-многообразия M^3 , связанные друг с другом преобразованиями $T_0^{\pm 1}, T_2^{\pm 1}$, причем $P_1 \searrow P_2 \searrow \dots \searrow P_n \nearrow R$, спайн P_i (спайн R) получается из спайна P_{i-1} (из спайна P_n соответственно) применением одного преобразования. Тогда от спайна P_1 к спайну R можно перейти, применяя сначала только увеличивающие, а затем только уменьшающие преобразования, все время оставаясь в классе спайнов данного многообразия M^3 .

Доказательству предложения 1 посвящены п. 2, 3.

2. Преобразования помеченных спайнов.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Допустимой кривой в специальном спайне P будем называть простую кривую $\xi \subset P$ такую, что ξ трансверсально пересекается с особым графом спайна P в конечном числе точек, причем ξ не содержит вершин спайна.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Помеченным спайном будем называть пару (P, ξ) , где P – спайн с допустимой кривой ξ .

Опишем элементарные преобразования помеченных спайнов.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Пусть ξ – допустимая кривая в помеченном спайне (P, ξ) , I – единственный отрезок, $(\xi \times I) \subset M$ – прямое произведение кривой на отрезок и A, B – концы кривой ξ . Пусть также $(\xi \times I) \cap P = (\xi \times \{0\}) \cup (\{A, B\} \times I)$. Тогда допустимая кривая ξ называется *сталкиваемой кривой*.

Пусть (P, ξ) – помеченный спайн и подполиэдр E_1 является окрестностью некоторого ребра в спайне P , причем $E_1 \cap \xi = \emptyset$. Заменяем подполиэдр E_1 на подполиэдр E_2 . Получим новый помеченный спайн (P', ξ) . Замену помеченного спайна (P, ξ) на помеченный спайн (P', ξ) обозначим через $\tilde{T}_2$. Аналогично замену подполиэдра E_3 на подполиэдр E_4 обозначим через $\tilde{T}_0$.

Пусть кривая ξ помеченного спайна (P, ξ) в окрестности вершины V спайна P пересекает ровно один раз одно из ребер, примыкающих к вершине V . Рассмотрим кривую ξ' , которая совпадает с кривой ξ вне окрестности вершины V , а в этой окрестности два раза пересекает два разных ребра, примыкающих к V . Будем обозначать переход от (P, ξ) к (P, ξ') через M_2 .

Обратное преобразование обозначим через M_2^{-1} . Очевидно, преобразования $M_2^{\pm 1}$ сохраняют свойство кривой быть допустимой и быть сталкиваемой.

Пусть конец кривой ξ из (P, ξ) в окрестности вершины V спайна P лежит на одном из ребер, примыкающих к вершине V . Рассмотрим кривую ξ' , которая совпадает с кривой ξ вне окрестности вершины V , а в этой окрестности два раза пересекает два разных ребра, примыкающих к V , причем одна из этих точек пересечения является концом кривой ξ . Будем обозначать переход от (P, ξ) к (P, ξ') также через M_2 .

Преобразование $M_0^{\pm 1}$ можно определить следующим образом. Пусть α – простая кривая в спайне P такая, что $\alpha \cap S(P) = a$, $\alpha \cap \xi = b$, (здесь $S(P)$ – особый граф специального спайна P , ξ – кривая в помеченном спайне), где a и b – концы кривой α , причем точка a не является вершиной спайна P и точка $b \notin S(P)$.

Тогда мы можем заменить кривую ξ на кривую ξ' , которая совпадает с ξ вне окрестности кривой α и $\xi' \cap \alpha = \emptyset$, причем ξ два раза пересекает ребро, содержащее точку a .

Преобразования $M_0^{\pm 1}$ сохраняют свойство кривой быть допустимой.

Договоримся преобразование M_0 всегда выполнять так, чтобы свойство кривой быть сталкиваемой сохранялось.

Рис. 2

Пусть (P, ξ) и (Q, η) – помеченные спайны и от (P, ξ) к (Q, η) можно перейти с помощью преобразований $\tilde{T}_0, \tilde{T}_2, M_0, M_2$. Этот факт будем записывать следующим образом: $(P, \xi) \xrightarrow{\sim} (Q, \eta)$.

ЛЕММА 1. Пусть $V_1 V_2$ – ребро помеченного спайна (P, ξ) (или кривая α из определения преобразования M_0). Тогда с помощью преобразований M_2 и M_0 можно получить помеченный спайн (P, ξ') такой, что $\xi' \cap V_1 V_2 = \emptyset$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\xi \cap V_1 V_2 = p_1, \dots, p_k$ и между V_1 и p_1 не лежит ни одной точки p_i . Тогда применим к кривой ξ преобразование M_2 . Число точек пересечения получившейся кривой и ребра $V_1 V_2$ уменьшится. Случай, когда $V_1 V_2$ – кривая, рассматривается аналогично.

ЛЕММА 2. Пусть (P, ξ) – помеченный спайн и пусть $P \nearrow Q$. Тогда в спайне Q существует допустимая кривая η такая, что $(P, \xi) \xrightarrow{\sim} (P, \eta)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если в последовательности преобразований $P \nearrow Q$ мы имеем нуль преобразований, то утверждение выполняется.

ИНДУКЦИОННОЕ ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ. Если последовательность состоит из k преобразований, то утверждение леммы 2 выполняется.

Рассмотрим **ИНДУКЦИОННЫЙ ШАГ**. Пусть последовательность состоит из $k + 1$ преобразований.

Предположим, что первое преобразование, применяемое к спайну P , есть T_2 (случай T_0 аналогичен). Обозначим через P' спайн, полученный из спайна P преобразованием T_2 . Рассмотрим окрестность двух вершин V_1 и V_2 спайна P , к которым применяется преобразование T_2 .

По лемме 1 с помощью преобразований M_2 можно получить помеченный спайн (P, ξ') такой, что кривая ξ' лежит в стороне от ребра $V_1 V_2$. Применим преобразование $\tilde{T}_2$ вдоль ребра $V_1 V_2$. Полученный спайн P' будет помеченным спайном с кривой ξ' . Спайн P' связан со спайном Q посредством k преобразований. По предположению индукции кривая η в помеченном спайне (Q, η) будет искомой кривой.

3. Вздутия помеченных спайнов. Пусть (P, ξ) – помеченный спайн, причем допустимая кривая ξ является сталкиваемой.

Пусть $\xi \times I$ – прямое произведение кривой на единичный отрезок такое, что $(\xi \times I) \subset P$, $(\xi \times I) \cap V(P) = \emptyset$, где $V(P)$ – множество вершин спайна P , и любая точка пересечения кривой $\xi \times \{1\}$ с особым графом $S(P)$ спайна P совпадает с точкой $\text{st}_i(\xi) \times \{1\}$, где $\text{st}_i(\xi)$ – некоторая точка пересечения кривой ξ с графом $S(P)$. Тогда про кривую $\xi \times \{1\}$ будем говорить, что она *параллельна* кривой ξ .

Рассмотрим кривую ξ' параллельную кривой ξ . Обозначим концы кривых ξ и ξ' через A, B и A', B' . Соединим точки A и A' кривой ψ , точки B и B' кривой ψ' так, как показано на рис. 3.

Рис. 3

Объединение четырех кривых ξ, ξ', ψ и ψ' гомеоморфно окружности; приклеим к этой окружности диск D^2 . Проколем диск, границей которого является объединение отрезка AA' и кривой ψ (на рис. 3 этот диск заштрихован). Получившийся спайн обозначим через $\text{sw}(P, \xi)$ и будем называть *вздутием* спайна P вдоль кривой ξ .

ЛЕММА 3. Пусть $(P, \xi) \widetilde{\nearrow} (Q, \eta)$. Тогда $\text{sw}(P, \xi) \nearrow \text{sw}(Q, \eta)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если в последовательности $(P, \xi) \nearrow (Q, \eta)$ мы имеем 0 преобразований, то утверждение выполняется. Предположим, что если последовательность состоит из k преобразований, то утверждение также выполняется.

Индукционный шаг. Рассмотрим последовательность из $k + 1$ преобразований. Если первое увеличивающее преобразование, примененное к спайну P , есть $\tilde{T}_0$ или $\tilde{T}_2$, то утверждение леммы 3 выполняется.

Допустим, что первое увеличивающее преобразование, применяемое к помеченному спайну (P, ξ) , есть T_2 (случай преобразования T_0 рассматривается аналогично). Тогда по лемме 1 можно добиться того, чтобы допустимая кривая ξ не пересекалась с окрестностью ребра E , вдоль которого производится преобразование T_2 . Проследим, что происходит со вздутием спайна P вдоль кривой ξ при применении к кривой ξ преобразований M_0, M_2 .

Возможны три случая:

- 1) на ребре E не лежит ни начало A , ни конец B кривой ξ ;
- 2) на ребре E лежит конец кривой ξ ;
- 3) на ребре E лежит начало A кривой ξ .

Рассмотрим случай 3) как наиболее сложный.

Рис. 4

Переход от одного спайна со вздутием к другому осуществляется с помощью одного преобразования T_0 , как показано на рис. 4.

Рассмотренные случаи доказывают лемму 3.

ЛЕММА 4. Пусть (P, ξ) – помеченный спайн. Тогда $(P, \xi) \nearrow \text{sw}(P, \xi)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если число точек пересечения кривой ξ равно 2, то от (P, ξ) к $\text{sw}(P, \xi)$ можно перейти с помощью одного преобразования T_0 . Если число таких точек равно n , то требуется $n - 1$ преобразований T_0 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 1. Если переход от спайна P_n к спайну R осуществляется с помощью преобразования T_2 , то на спайне P_n в качестве допустимой кривой ξ возьмем кривую параллельную ребру, задающему преобразование T_2 . Если переход осуществляется с помощью преобразования T_0 , то возьмем в качестве допустимой кривой ξ кривую, задающую это преобразование. По лемме 2 существует кривая η на P_1 такая, что $(P_1, \eta) \searrow (P_n, \xi)$. По лемме 4 для допустимой пары (P, ξ) мы имеем переход $(P_1, \eta) \nearrow \text{sw}(P_1, \eta)$.

По лемме 3 существует переход $\text{sw}(P_1, \eta) \searrow \text{sw}(P_n, \xi)$. Если P_n и Q связаны преобразованием T_0 , то $\text{sw}(P_n, \xi) = Q$. Если P_n и Q связаны преобразованием T_2 , то от $\text{sw}(P_n, \xi)$ к Q можно перейти с помощью одного преобразования T_2 так, как показано на рис. 5.

Тем самым предложение 1 доказано.

4. Применение полученных результатов. Покажем, как из предложения 1 можно вывести теорему 2. Рассмотрим спайны P и S одного и того же многообразия M^3 , связанные последовательностью преобразований $T_0^{\pm 1}, T_2^{\pm 1}$. К спайну P применяется сначала некоторое число увеличивающих преобразований. Обозначим это число через I_1 .

Рис. 5

Затем применяется некоторое число уменьшающих преобразований, после чего применяется I_2 увеличивающих преобразований и т.д., I_k увеличивающих преобразований. Число I_1 может быть равно 0. Назовем число $W = \sum_{i=2}^k I_i$ *параметром* последовательности. Применяя предложение 1 к последовательности преобразований, состоящей из некоторого числа уменьшающих преобразований и следующего за ними первым увеличивающего преобразования, дающего вклад в число I_2 , можно получить новую последовательность с параметром $W - 1$, так как число I_2 уменьшится на 1. Последовательно применяя предложение 1, получим последовательность с параметром $W = 0$, т.е. последовательность нужного вида. Теорема 2 доказана.

Опишем изменения, которые нужно внести в доказательство теоремы 2, чтобы получить доказательство теоремы 1.

Для допустимой кривой в полиэдре не определяется свойство сталкиваемости.

В случае полиэдра с допустимой кривой вздутие определяется как результат применения $n - 1$ преобразований T_0 , где n – число точек пересечения допустимой кривой с ребрами полиэдра. В остальном доказательство теоремы 1 повторяет доказательство теоремы 2.

5. Дополнительные структуры на специальных спайнах 3-многообразий.

Вопросы, связанные с изучением разветвленных спайнов, были, в частности, рассмотрены в работах Гиллмана и Ролфсена [7], [8] и в работах Ишии [9]–[11].

Типичные окрестность ребра и окрестность вершины разветвленного спайна показаны на рис. 6.

Рис. 6

Будем называть *крыльями* в окрестности ребра (вершины) части клеток, инцидентных данному ребру (вершине), попадающие в данную окрестность. Таким образом, в окрестности каждого ребра (вершины) имеется три крыла (шесть крыльев). Будем на-

зывать два крыла в окрестности вершины *противоположными*, если они пересекаются только в одной точке (т.е. в соответствующей вершине).

Можно определить разветвленный спайн с помощью эквивалентного следующего определения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. *Разветвленным спайном* называется спайн, у которого каждому ребру сопоставлен отрезок, один конец которого лежит на данном ребре, а другой конец вместе со всеми остальными точками отрезка лежит на одном из трех крыльев, примыкающих к данному ребру, причем в окрестности каждой вершины должно выполняться следующее условие: два отрезка из четырех должны лежать на двух противоположных крыльях, а два оставшихся отрезка должны лежать на одном и том же крыле (других отрезков на этом крыле лежать не должно).

ТЕОРЕМА 3. *Пусть P – разветвленный спайн и спайн S получается из спайна P применением к P увеличивающего преобразования T_2 или T_0 . Тогда спайн S также является разветвленным спайном.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. С точностью до гомеоморфизма окрестности двух соседних вершин разветвленного спайна на себя существует шесть различных расстановок отрезков в этой окрестности. Применяя к этой окрестности преобразование T_2 для каждого из шести случаев, можно убедиться, что на полученном спайне S существует расстановка отрезков, задающая разветвленную структуру на спайне. Подобное рассуждение проходит и для преобразования T_0 .

Автор благодарен научному руководителю С.В. Матвееву за помощь в работе над статьей.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Alexander J. W. The combinatorial theory of complexes // Ann. of Math. (2). 1930. V. 31. P. 294–322.
- [2] Singer J. Three-dimensional manifolds and their Heegaard diagrams // Trans. Amer. Math. Soc. 1933. V. 35. P. 88–111.
- [3] Casler B. G. An embedding theorem for connected 3-manifolds with boundary // Proc. Amer. Math. Soc. 1965. V. 16. P. 559–566.
- [4] Matveev S. V. Transformations of special spines and Zeeman conjecture // Math. USSR Izv. 1988. V. 31. P. 423–434.
- [5] Piergallini R. Standard moves for standard polyhedra and spines // Rend. Circ. Mat. Palermo (2). 1988. V. 37. № 18. P. 391–414.
- [6] Macovetsky A. Transformations on special spines of 3-manifold and branched surfaces // Knots'96 Conference. Workshop Report for 5th MSJ International Research Institute Knot Theory. Tokyo, 1996. P. 126–127.
- [7] Gillman D., Rolfsen D. The Zeeman conjecture for standard spines is equivalent to the Poincaré conjecture // Topology. 1983. V. 22. P. 315–323.
- [8] Gillman D., Rolfsen D. Three-manifolds embedded in small 3-complexes // Internat. J. Math. 1992. V. 3. P. 179–183.
- [9] Ishii I. Flows and spines // Tokyo J. Math. 1986. V. 9. P. 505–525.
- [10] Ishii I. Combinatorial construction of a non-singular flow on 3-manifold // Kobe J. Math. 1986. V. 3. P. 201–208.
- [11] Ishii I. Moves for flow spines and topological invariants of 3-manifold // Tokyo J. Math. 1992. V. 15. P. 297–312.