Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. О. Щербаков, Регуляризованный след оператора Дирака, *Матем. заметки*, 2015, том 98, выпуск 1, 134–146

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10587>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.95.254.165

26 апреля 2023 г., 11:00:33

Регуляризованный след оператора Дирака

А. О. Щербаков

Получены формулы регуляризованного следа для одномерного несамосопряженного оператора Дирака с L^2 -потенциалом. Рассматриваются случаи периодических, антипериодических краевых условий, а также краевых условий Дирихле. Формулы получены с помощью метода подобных операторов на основе результатов статей [1] и [2].

Библиография: 10 названий.

DOI: 10.4213/mzm10587

1. Введение. Пусть $L_2([0, \pi], \mathbb{C}^2) = L_2[0, \pi] \times L_2[0, \pi]$ – гильбертово пространство измеримых на $[0, \pi]$ со значениями в $\mathbb{C}^2$ и суммируемых с квадратом нормы функций. Скалярное произведение в $L_2([0, \pi], \mathbb{C}^2)$ определяется формулой

$$(x, y) = (x_1, y_1) + (x_2, y_2), \quad x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in L_2([0, \pi], \mathbb{C}^2),$$

где

$$(x_i, y_i) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi x_i(\tau) \overline{y_i(\tau)} d\tau, \quad i = 1, 2,$$

– скалярное произведение в гильбертовом пространстве комплексных функций $L_2[0, \pi]$. Через $W_2^1([0, \pi], \mathbb{C}^2)$ обозначим пространство Соболева

$$\{y \in L_2([0, \pi], \mathbb{C}^2) : y \text{ абсолютно непрерывна, } y' \in L_2([0, \pi], \mathbb{C}^2)\}$$

со скалярным произведением

$$\langle x, y \rangle = (x, y) + (x', y'), \quad x, y \in W_2^1([0, \pi], \mathbb{C}^2).$$

Рассматривается оператор Дирака

$$L_{bc} : D(L_{bc}) \subset L_2([0, \pi], \mathbb{C}^2) \rightarrow L_2([0, \pi], \mathbb{C}^2),$$

$$L_{bc}y = i \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \frac{dy}{dt} - vy, \quad y \in D(L_{bc}),$$

где

$$v(t) = \begin{pmatrix} 0 & P(t) \\ Q(t) & 0 \end{pmatrix}, \quad t \in [0, \pi], \quad P, Q \in L_2[0, \pi].$$

Область определения $D(L_{bc})$ определяется одним из краевых условий bc:

- (a) периодические (bc = per: $y(0) = y(\pi) \in \mathbb{C}^2$);
- (b) антипериодические (bc = ap: $y(0) = -y(\pi) \in \mathbb{C}^2$);
- (c) Дирихле (bc = dir: $y_1(0) = y_2(0)$ и $y_1(\pi) = y_2(\pi)$),

где $y = (y_1, y_2) \in W_2^1([0, \pi], \mathbb{C}^2)$.

А именно, полагается

$$D(L_{bc}) = \{y \in W_2^1([0, \pi], \mathbb{C}^2) : y \in bc\},$$

и соответствующие операторы будут обозначаться через $L_{\text{per}}, L_{\text{ap}}, L_{\text{dir}}$. Если $v = 0$ (нулевой потенциал), то используется запись L_{bc}^0 или $L_{\text{per}}^0, L_{\text{ap}}^0, L_{\text{dir}}^0$ соответственно. Оператор L_{bc}^0 будет называться *свободным оператором Дирака*. Он, как правило, при изучении оператора L_{bc} будет играть роль невозмущенного оператора, а оператор умножения на потенциал v – возмущения.

В дальнейшем пространство $L_2([0, \pi], \mathbb{C}^2)$ будет отождествляться с гильбертовым пространством $L_{2,\pi} = L_{2,\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C}^2)$ периодических периода π функций, определенных на $\mathbb{R}$ и суммируемых с квадратом нормы на $[0, \pi]$. Функции P и Q также будем рассматривать как элементы пространства $L_{2,\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

Операторы L_{bc}^0 , $bc \in \{\text{per}, \text{ap}, \text{dir}\}$, являются самосопряженными операторами с компактной резольventой и дискретным спектром. Легко описываются спектры $\sigma(L_{bc}^0)$ и собственные функции для L_{bc}^0 :

- (a) $\sigma(L_{\text{per}}^0) = 2\mathbb{Z}$ – множество четных чисел; каждое $\lambda_n = 2n \in 2\mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{Z}$, – двойное собственное значение, а соответствующее собственное подпространство есть $E_n^0 = \text{Span}\{e_n^1, e_n^2\}$, где

$$e_n^1 = \begin{pmatrix} e^{-i\lambda_n t} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_n^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{i\lambda_n t} \end{pmatrix}, \quad t \in [0, \pi]; \quad (1.1)$$

- (b) $\sigma(L_{\text{ap}}^0) = 2\mathbb{Z} + 1$ – множество нечетных чисел; соответствующие собственные подпространства заданы теми же формулами, как и для оператора L_{per}^0 , где $\lambda_n = 2n + 1 \in 2\mathbb{Z} + 1$, $n \in \mathbb{Z}$;
- (c) $\sigma(L_{\text{dir}}^0) = \mathbb{Z}$; каждое собственное значение простое и соответствующая нормированная собственная функция имеет вид

$$s_n = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_n^1 + e_n^2), \quad (1.2)$$

где $\lambda_n = n$, $n \in \mathbb{Z}$.

В определении оператора L_{bc} , $bc \in \{\text{per}, \text{ap}, \text{dir}\}$, и соответствующих обозначений мы, в основном, следовали статье Митягина, Джакова [3].

При попытке исследования оператора Дирака L_{bc} общими методами теории возмущений возникает несколько затруднений, связанных с наличием таких свойств как

- (a) расстояние между собственными значениями невозмущенного оператора L_{bc}^0 не уходит в бесконечность;
- (b) возмущение (оператор умножения на потенциал v) не является ограниченным оператором.

Пусть $\mathcal{H}$ – гильбертово пространство. Далее через $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ будем обозначать идеал операторов Гильберта–Шмидта, а через $\mathfrak{S}_1(\mathcal{H})$ – идеал ядерных операторов [4].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть $A \in \mathfrak{S}_1(\mathcal{H})$ и (e_n) , $n \in \mathbb{Z}$, – некоторый ортонормированный базис в $\mathcal{H}$. Ряд

$$\mathrm{Tr}(A) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (Ae_n, e_n)$$

назовем *матричным следом* оператора A .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть $A \in \mathfrak{S}_1(\mathcal{H})$ и (λ_n) , $n \in \mathbb{Z}$, – собственные значения оператора A . Ряд

$$\mathrm{Sp}(A) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \lambda_n$$

назовем *спектральным следом* оператора A .

Как известно ([4], [5]), если $A \in \mathfrak{S}_1(\mathcal{H})$ – ядерный оператор, действующий в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, то его матричный и спектральный следы принимают конечные значения и совпадают, т.е. $\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Sp}(A)$. Кроме того, матричный след оператора A не зависит от выбора базиса в $\mathcal{H}$.

Ясно, что для рассматриваемого оператора Дирака это не так. Тем не менее, возможно найти такие поправки в ряд из собственных значений оператора L_{bc} (т.е. регуляризовать спектральный след), что данный ряд будет сходящимся.

Обзор результатов о формулах регуляризованных следов для различных классов дифференциальных операторов содержится в статье [5].

Целью данной статьи является получение формулы регуляризованного следа рассматриваемого оператора Дирака L_{bc} , $bc \in \{\mathrm{reg}, \mathrm{ap}, \mathrm{dir}\}$. Получены общие теоремы о регуляризованном следе одномерного несамосопряженного оператора Дирака с негладким потенциалом из L_2 без наложения каких-либо условий на потенциал (теорема 4). Также получены формулы регуляризованного следа при определенных условиях гладкости потенциала (теоремы 5, 6).

Интересен вопрос получения формул регуляризованных следов для оператора Дирака, задаваемого более общими краевыми условиями, определенными в статье Савчука и Садовничей [6].

Отметим, что регуляризованный след имеет физический смысл. Его можно рассматривать как меру дефекта полной энергии системы при ее возмущении в ситуации, когда сама полная энергия системы (точнее, рассматриваемой модели) бесконечна [5].

2. Основные результаты. Для получения формулы регуляризованного следа будет использоваться метод подобных операторов [1], [2], [7]–[9]. Отметим, что в статьях [1], [9] приведен ряд результатов касательно применения метода подобных операторов для получения формул регуляризованных следов. В статье [2] метод подобных операторов адаптируется и используется для изучения спектральных свойств рассматриваемого оператора Дирака. Статьи [1] и [2] будут служить основой для получения результатов настоящей статьи.

Пусть $\mathcal{X}$ – комплексное банахово пространство, $\mathrm{End} \mathcal{X}$ – банахова алгебра линейных ограниченных операторов, действующих в $\mathcal{X}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Два линейных оператора $A_i: D(A_i) \subset \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$, $i = 1, 2$, называются *подобными*, если существует непрерывно обратимый оператор $U \in \mathrm{End} \mathcal{X}$ такой, что $UD(A_2) = D(A_1)$ и $A_1Ux = UA_2x$, $x \in D(A_2)$. Оператор U называется *оператором преобразования оператора A_1 в A_2* .

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Подобные операторы обладают рядом совпадающих спектральных свойств. В частности, непосредственно из определения 3 следует, что если $A_i: D(A_i) \subset \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$, $i = 1, 2$, – два подобных оператора, то $\sigma(A_1) = \sigma(A_2)$, т.е. их спектры совпадают.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Символом $\mathfrak{L}_A(\mathcal{X})$ обозначим банахово пространство операторов, действующих в $\mathcal{X}$ и *подчиненных оператору* A , т.е. линейный оператор $B: D(B) \subset \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ принадлежит $\mathfrak{L}_A(\mathcal{X})$, если $D(B) \supseteq D(A)$ и конечна величина

$$\|B\|_A = \inf\{C > 0 : \|Bx\| \leq C(\|x\| + \|Ax\|), x \in D(A)\},$$

принимаемая за норму в $\mathfrak{L}_A(\mathcal{X})$.

В ходе применения метода подобных операторов для оператора Дирака свободный оператор L_{bc}^0 будем считать невозмущенным оператором. Он будет обозначаться также символом A . Таким образом, $L_{bc} = A - B$, где B – оператор умножения на потенциал v , причем $B \in \mathfrak{L}_A(L_{2,\pi})$.

Важнейшим понятием метода подобных операторов является понятие допустимой тройки [7].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Пусть $\mathfrak{U}$ – линейное подпространство из $\mathfrak{L}_A(\mathcal{X})$ и

$$J: \mathfrak{U} \rightarrow \mathfrak{U}, \quad \Gamma: \mathfrak{U} \rightarrow \text{End } \mathcal{X}$$

являются трансформаторами (т.е. линейными операторами в пространстве линейных операторов). Тройку $(\mathfrak{U}, J, \Gamma)$ назовем *допустимой тройкой* для (невозмущенного) оператора A , а $\mathfrak{U}$ – *допустимым пространством возмущений*, если выполнены следующие условия:

- 1) $\mathfrak{U}$ – банахово пространство (со своей нормой $\|\cdot\|_*$), непрерывно вложенное в $\mathfrak{L}_A(\mathcal{X})$ (т.е. существует постоянная $C > 0$ такая, что $\|X\|_A \leq C\|X\|_*$ для любого $X \in \mathfrak{L}_A(\mathcal{X})$);
- 2) J и Γ – непрерывные трансформаторы, причем J – проектор;
- 3) $(\Gamma X)D(A) \subset D(A)$, причем

$$A\Gamma X - (\Gamma X)A = X - JX \quad \text{для всех } X \in \mathfrak{U};$$

кроме того, $\Gamma X \in \text{End } \mathcal{X}$ – единственное решение уравнения

$$AY - YA = X - JX,$$

удовлетворяющее условию $JY = 0$;

- 4) $X\Gamma Y$, $(\Gamma X)Y \in \mathfrak{U}$ для всех $X, Y \in \mathfrak{U}$, и существует постоянная $\gamma > 0$ такая, что

$$\|\Gamma\| \leq \gamma, \quad \max\{\|X\Gamma Y\|_*, \|(\Gamma X)Y\|_*\} \leq \gamma\|X\|_*\|Y\|_*;$$

- 5) для любого $X \in \mathfrak{U}$ и любого $\varepsilon > 0$ существует число $\lambda_\varepsilon \in \rho(A)$ такое, что $\|X(A - \lambda_\varepsilon I)^{-1}\| < \varepsilon$.

Символом P_n обозначим ортогональный проектор на собственное подпространство E_n^0 (см. п. 1), отвечающее собственному значению λ_n , $n \in \mathbb{Z}$, оператора L_{bc}^0 .

В периодическом и антипериодическом случаях ($bc \in \{\text{per}, \text{ap}\}$) этот проектор имеет вид (см. формулы (1.1))

$$P_n x = (x, e_n^1) e_n^1 + (x, e_n^2) e_n^2, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (2.1)$$

Для $bc = \text{dir}$ ортогональный проектор P_n представим в виде (см. (1.2))

$$P_n x = (x, s_n) s_n, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (2.2)$$

Введем и рассмотрим операторы $J, \Gamma : \mathfrak{S}_2(L_{2,\pi}) \rightarrow \mathfrak{S}_2(L_{2,\pi})$ следующего вида:

$$JX = \sum_{n \in \mathbb{Z}} P_n X P_n, \quad X \in \mathfrak{S}_2(L_{2,\pi}). \quad (2.3)$$

$$(\Gamma X)x = \sum_{\substack{i, j \in \mathbb{Z} \\ i \neq j}} \frac{P_i X P_j}{\lambda_i - \lambda_j}, \quad X \in \mathfrak{S}_2(L_{2,\pi}). \quad (2.4)$$

Данные ряды безусловно сходятся в равномерной операторной топологии [2].

ЛЕММА 1 [2]. *Тройка $(\mathfrak{S}_2(L_{2,\pi}), J, \Gamma)$ является допустимой для оператора A .*

В статье [1] была доказана следующая теорема, которая будет служить основой для получения формулы регуляризованного следа оператора Дирака.

ТЕОРЕМА 1 [1]. *Пусть A – самосопряженный оператор с компактной резольвентой, спектр которого представим в виде $\sigma(A) = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \sigma_k$, $P_n = P_n(\sigma_n, A)$ – проектор Рисса, построенный по множеству σ_n и оператору A , а $(\mathfrak{S}_2(L_{2,\pi}), J, \Gamma)$ – введенная выше допустимая для оператора A тройка. Если $B, \Gamma B \in \mathfrak{S}_2(L_{2,\pi})$, то для оператора $A - B$ справедлива следующая формула регуляризованного следа:*

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \left[\sum_{\lambda_j(A) \in \sigma_n} (\lambda_j(A - B) - \lambda_j(A)) + \text{Tr}(P_n(JB)P_n) \right] = 0. \quad (2.5)$$

В нашем случае пространство допустимых возмущений $\mathfrak{S}_2(L_{2,\pi})$ не содержит рассматриваемое возмущение B . В связи с этим проведем предварительное преобразование подобия оператора $A - B$ в оператор вида $A - B^{HS}$, где $B^{HS} \in \mathfrak{S}_2(L_{2,\pi})$.

Продолжения трансформаторов J и Γ на пространство $\mathfrak{L}_A(L_{2,\pi})$, содержащее B , осуществляется следующим образом. Пусть $\lambda_0 \in \rho(A)$. Положим

$$JX = J(X(A - \lambda_0 I)^{-1})(A - \lambda_0 I), \quad X \in \mathfrak{L}_A(L_{2,\pi}), \quad (2.6)$$

$$\Gamma X = \Gamma(X(A - \lambda_0 I)^{-1})(A - \lambda_0 I), \quad X \in \mathfrak{L}_A(L_{2,\pi}). \quad (2.7)$$

Это определение корректно, т.е. не зависит от выбора числа λ_0 из $\rho(A)$. Если $x \in D(A)$, то из (2.6) и (2.7) следует, что операторы JX и ΓX на векторе x определяются равенствами (2.3) и (2.4) соответственно.

ЛЕММА 2 [2]. *Операторы $JB, \Gamma B, (\Gamma B)B$ есть операторы Гильберта–Шмидта из $\mathfrak{S}_2(L_{2,\pi})$.*

ЛЕММА 3. *Операторы $\Gamma B, JB, B$ обладают свойствами*

- (a) $e^{\Gamma B} D(A) = D(A)$;
- (b) $A(\Gamma B)x - (\Gamma B)Ax = Bx - (JB)x, x \in D(A)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выполнение условия (b) следует из [2; лемма 7]. Докажем справедливость условия (a). Пусть $U = e^{\Gamma B}$. Из [2; лемма 7] следует, что $\Gamma B(D(A)) \subset D(A)$, а значит, свойство $UD(A) \subset D(A)$ очевидно. Таким образом, осталось показать, что $U^{-1}D(A) \subset D(A)$. Имеет место равенство

$$U^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{(\Gamma B)^j}{j!} = \lim_{n \rightarrow \infty} U_n, \quad \text{где} \quad U_n = \sum_{j=0}^n (-1)^j \frac{(\Gamma B)^j}{j!}.$$

Пусть $\lambda \in \rho(A)$. Из свойства (b) следует равенство

$$T_\lambda = (A - \lambda I)(\Gamma B)(A - \lambda I)^{-1} = (B - JB)(A - \lambda I)^{-1} + \Gamma B \in \text{End } L_{2,\pi}.$$

Тогда,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (A - \lambda I)U_n(A - \lambda I)^{-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} (I - T_\lambda + \frac{T_\lambda^2}{2} - \dots + (-1)^n \frac{T_\lambda^n}{n!}) = e^{-T_\lambda}.$$

Из ограниченности оператора T_λ , замкнутости оператора A и того, что $x \in D(A)$ представим в виде $x = R(\lambda, A)y$ для некоторого $y \in L_{2,\pi}$, следует, что $U^{-1}D(A) \subset D(A)$. Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Произведение двух операторов Гильберта–Шмидта есть ядерный оператор [4; § 7].

ТЕОРЕМА 2. Оператор $A - B$ подобен оператору $A - B^{HS}$, где

$$B^{HS} = JB + C + B^{\text{Ker}}, \quad (2.8)$$

$$B^{\text{Ker}} = \sum_{n \geq 2} \frac{(-1)^{n+1} \text{ad}_{\Gamma B}^n B}{(n-1)!(n+1)} + \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1} \text{ad}_{\Gamma B}^n JB}{(n+1)!}, \quad C = \frac{1}{2}((\Gamma B)B - B(\Gamma B)), \quad (2.9)$$

причем $JB, C \in \mathfrak{S}_2(L_{2,\pi})$, $B^{\text{Ker}} \in \mathfrak{S}_1(L_{2,\pi})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Подобие операторов $A - B$ и $A - B^{HS}$ следует из лемм 2, 3 и [7; § 19]. Принадлежность операторов JB, C идеалу операторов Гильберта–Шмидта и ядерность оператора B^{Ker} следуют из леммы 2 и замечания 2. Теорема доказана.

Пусть $(E(t))$, $t \in \mathbb{R}$, – группа операторов из $L_{2,\pi}$ вида

$$(E(t)y)(s) = y(s)e^{its}, \quad y \in L_{2,\pi}, \quad s \in [0, \pi). \quad (2.10)$$

Далее нам понадобятся матричные представления операторов $B, \Gamma B, JB, B\Gamma B, (\Gamma B)B$ в базисе из $\text{Im } P_j$ (см. формулы (1.1), (1.2) (2.1), (2.2)). При вычислениях будут использоваться ряды Фурье

$$P(t) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} p_j e^{i2jt}, \quad Q(t) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} q_j e^{i2jt}, \quad t \in \mathbb{R},$$

функций $P, Q \in L_{2,\pi}(\mathbb{R})$.

Рассмотрим периодический случай: $\text{bc} = \text{per}$. Вычислим матрицу оператора B :

$$\begin{aligned} (Be_k^1, e_n^1) &= 0, & (Be_k^2, e_n^1) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi P(t) e^{2i(k+n)t} dt = p_{-(k+n)}, \\ (Be_k^1, e_n^2) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi Q(t) e^{-2i(k+n)t} dt = q_{k+n}, & (Be_k^2, e_n^2) &= 0. \end{aligned}$$

Значит, матричные элементы оператора B в периодическом случае имеют вид

$$b_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & p_{-(i+j)} \\ q_{i+j} & 0 \end{pmatrix}, \quad i, j \in \mathbb{Z}.$$

Из формулы (2.3) получаем представление элементов блочно-диагональной матрицы оператора JB :

$$(JB)_{ii} = \begin{pmatrix} 0 & p_{-2i} \\ q_{2i} & 0 \end{pmatrix}, \quad i \in \mathbb{Z}. \quad (2.11)$$

Из формулы (2.4) следует, что матричные элементы оператора ΓB имеют вид

$$(\Gamma B)_{ij} = \frac{1}{2(i-j)} \begin{pmatrix} 0 & p_{-(i+j)} \\ q_{i+j} & 0 \end{pmatrix}, \quad i, j \in \mathbb{Z}. \quad (2.12)$$

Таким образом, из двух предыдущих формул получаем, что матричные элементы операторов $B\Gamma B$, $(\Gamma B)B$ будут выглядеть следующим образом:

$$(B\Gamma B)_{ij} = \sum_{k \neq j} \frac{1}{2(k-j)} \begin{pmatrix} p_{-(i+k)} q_{k+j} & 0 \\ 0 & q_{i+k} p_{-(k+j)} \end{pmatrix}, \quad (2.13)$$

$$((\Gamma B)B)_{ij} = \sum_{k \neq j} \frac{1}{2(i-k)} \begin{pmatrix} p_{-(i+k)} q_{k+j} & 0 \\ 0 & q_{i+k} p_{-(k+j)} \end{pmatrix}, \quad i, j \in \mathbb{Z}. \quad (2.14)$$

Если $\text{bc} = \text{ar}$, то все коэффициенты Фурье p_k, q_k в формулах (2.11)–(2.14) следует заменить на p_{k-1} и q_{k-1} , $k \in \mathbb{Z}$, соответственно.

Теперь рассмотрим оператор $L_{\text{dir}} = A - B$. Здесь матрица (b_{nj}) , $n, j \in \mathbb{Z}$, оператора B относительно ортонормированного базиса s_n , $n \in \mathbb{Z}$, в $L_{2,\pi}(\mathbb{R})$ будет определяться несколько более сложным образом чем для оператора B в базисе e_n^1, e_n^2 , $n \in \mathbb{Z}$. Предлагаемый способ представления матрицы (b_{nj}) отличается от представления матрицы этого оператора, которая вычислялась в статье [3]. Имеют место следующие равенства:

$$\begin{aligned} b_{nj} &= (Bs_n, s_j) = \frac{1}{2\pi} \left(\int_0^\pi P(t) e^{i(n+j)t} dt + \int_0^\pi Q(t) e^{-i(n+j)t} dt \right) \\ &= \frac{1}{2} \begin{cases} p_{-(n+j)/2} + q_{(n+j)/2}, & \text{если } n+j \in 2\mathbb{Z}, \\ \tilde{p}_{-(n+j+1)/2} + \tilde{q}_{(n+j+1)/2}, & \text{если } n+j \in 1+2\mathbb{Z}, \end{cases} \end{aligned}$$

где $\tilde{p}_j, \tilde{q}_j$, $j \in \mathbb{Z}$, – коэффициенты Фурье функций $E(-1)P, E(1)Q \in L_{2,\pi}(\mathbb{R})$, $t \in \mathbb{R}$, (см. формулу (2.10)) по ортонормированному базису $e_k(s) = \exp 2iks$, $k \in \mathbb{Z}$.

Далее полагаем

$$\theta_n = \begin{cases} \frac{1}{2}(p_{-n/2} + q_{n/2}), & n \in 2\mathbb{Z}, \\ \frac{1}{2}(\tilde{p}_{-(n+1)/2} + \tilde{q}_{(n+1)/2}), & n \in 1+2\mathbb{Z}. \end{cases} \quad (2.15)$$

Таким образом, матричные элементы операторов B , JB , ΓB при $bc = \text{dir}$ имеют следующий вид:

$$b_{ij} = \theta_{i+j}, \quad (JB)_{ii} = \theta_{2i}, \quad (\Gamma B)_{ij} = \frac{\theta_{i+j}}{i-j}, \quad i, j \in \mathbb{Z},$$

Для элементов блочных матриц операторов ΓB , $B\Gamma B$ справедливо следующее представление:

$$(B\Gamma B)_{ij} = \sum_{k \neq j} \frac{\theta i + k\theta k + j}{k-j}, \quad ((\Gamma B)B)_{ij} = \sum_{k \neq j} \frac{\theta i + k\theta k + j}{i-k}, \quad i, j \in \mathbb{Z}. \quad (2.16)$$

Введем в рассмотрение последовательности

$$\omega_j = p_{-j}q_j, \quad j \in \mathbb{Z}. \quad (2.17)$$

$$\tilde{\omega}_j = p_{-j+1}q_{j-1}, \quad j \in \mathbb{Z}. \quad (2.18)$$

Далее используется следующая асимптотика спектра оператора Дирака.

ТЕОРЕМА 3 [2]. *Найдется такое число $m \in \mathbb{Z}_+$, что спектр оператора L_{bc} представим в виде*

$$\sigma(L_{bc}) = \sigma_{(m)} \cup \left(\bigcup_{|n| \geq m+1} \sigma_n \right),$$

где $\sigma_{(m)}$ – конечное множество, а множества σ_n , $|n| \geq m+1$, не более чем двухточечны в периодическом и антипериодическом случаях и одноточечны при $bc = \text{dir}$. Данные множества имеют вид

$$\sigma_n = \left\{ 2n \pm \sqrt{\omega_{2n}} - \sum_{k \neq 0} \frac{1}{2k} \omega_{k+2n} + \beta_n^\pm \right\}, \quad |n| \geq m+1, \quad bc = \text{per},$$

$$\sigma_n = \left\{ 2n - 1 \pm \sqrt{\tilde{\omega}_{2n}} - \sum_{k \neq 0} \frac{1}{2k} \tilde{\omega}_{k+2n} + \tilde{\beta}_n^\pm \right\}, \quad |n| \geq m+1, \quad bc = \text{ap},$$

$$\sigma_n = \left\{ n - \theta_{2n} - \sum_{k \neq 0} \frac{\theta_{2n+k}^2}{k} \alpha_n \right\}, \quad |n| \geq m+1, \quad bc = \text{dir}.$$

Последовательности $(\beta_n^\pm)$ и $(\tilde{\beta}_n^\pm)$, $|n| \geq m+1$, являются суммируемыми со степенью $4/3$, (α_n) – абсолютно суммируемая последовательность.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Пусть $X \in \mathfrak{S}_\infty(\mathcal{H})$ (т.е. X – вполне непрерывный оператор) и $Y \in \text{End } \mathcal{H}$. Если операторы X , Y обладают тем свойством, что $XY \in \mathfrak{S}_1(\mathcal{H})$ и $YX \in \mathfrak{S}_1(\mathcal{H})$, то

$$\text{Tr}(XY - YX) = \text{Sp}(XY - YX) = 0$$

(см. [4; теорема 8.2]).

Далее через $(\tilde{\lambda}_n)$, $n \in \mathbb{Z}$ обозначим собственные значения оператора L_{bc} . Последовательности (ω_n) , $(\tilde{\omega}_n)$, (θ_n) , $n \in \mathbb{Z}$, определяются формулами (2.17), (2.18), (2.15).

ТЕОРЕМА 4. *Справедливы следующие формулы регуляризованных следов:*

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \left(\tilde{\lambda}_n^{\text{per}} - 2n + \sum_{k \neq 0} \frac{\omega_{2n+k}}{2k} \right) = 0, \quad (2.19)$$

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \left(\tilde{\lambda}_n^{\text{ap}} - (2n-1) + \sum_{k \neq 0} \frac{\tilde{\omega}_{2n+k}}{2k} \right) = 0, \quad (2.20)$$

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \left(\tilde{\lambda}_n^{\text{dir}} - n + \theta_{2n} + \sum_{k \neq 0} \frac{\theta_{2n+k}^2}{k} \right) = 0. \quad (2.21)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно теореме 2 оператор $A - B$ подобен оператору $A - B^{HS}$, где $B^{HS} \in \mathfrak{S}_2(L_{2,\pi})$. Так как оператор $\Gamma B \in \mathfrak{S}_2(L_{2,\pi})$ (лемма 2), к оператору $A - B^{HS}$ можно применить теорему 1, а значит, справедлива формула (2.5). В силу совпадения спектров операторов $A - B$ и $A - B^{HS}$ (замечание 1), имеем следующую форму регуляризованного следа для оператора $L_{bc} = A - B$:

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \left[\sum_{\tilde{\lambda}_k \in \sigma_n} \left(\tilde{\lambda}_k - \lambda_k \right) + \text{Tr}(P_n(JB^{HS})P_n) \right] = 0, \quad bc \in \{\text{per}, \text{ap}\},$$

где σ_n – множества из теоремы 3 (включая $\sigma_{(m)}$).

Далее, оператор JB^{HS} имеет вид $JB^{HS} = JB + JC + JB^{\text{Ker}}$ (формула (2.8)). В силу замечания 3, имеем

$$\text{Tr}(B^{\text{Ker}}) = \text{Sp}(B^{\text{Ker}}) = 0$$

(см. формулу (2.9)). Так как J – оператор блочной диагонализации, то для любого ядерного оператора $X \in \mathfrak{S}_1(L_{2,\pi})$ оператор JX также будет ядерным, и

$$\text{Sp}(JX) = \text{Tr}(JX) = \text{Tr}(X) = \text{Sp}(X).$$

Таким образом,

$$\text{Sp}(JB^{\text{Ker}}) = \text{Tr}(JB^{\text{Ker}}) = 0,$$

и, чтобы получить окончательную формулу регуляризованного следа оператора L_{bc} , достаточно посчитать величины

$$\begin{aligned} \text{Tr}(P_n(JB)P_n) &= \text{Tr}(P_nBP_n), \\ \text{Tr}(P_n(JC)P_n) &= \text{Tr}(P_nCP_n) = \frac{1}{2} \text{Tr}(P_n((\Gamma B)B - B\Gamma B)P_n); \end{aligned}$$

имеем

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \left[\sum_{\tilde{\lambda}_k \in \sigma_n} \left(\tilde{\lambda}_k - \lambda_k \right) + \text{Tr}(P_nBP_n) + \frac{1}{2} \text{Tr}(P_n((\Gamma B)B - B\Gamma B)P_n) \right] = 0.$$

Рассмотрим периодический случай $bc = \text{per}$. Матрица оператора JB определяется формулой (2.11), а значит, собственные значения оператора JB имеют вид $\{\pm \sqrt{\omega_{2n}}\}$. Из формул (2.13) и (2.14) следует, что диагональные элементы блочной матрицы оператора $C_{\text{per}} = (1/2)J((\Gamma B)B - B\Gamma B)$ имеют вид

$$(C_{\text{per}})_{nn} = \sum_{k \neq 0} \frac{1}{2k} \begin{pmatrix} \omega_{2n+k} & 0 \\ 0 & \omega_{2n+k} \end{pmatrix}, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (2.22)$$

В антипериодическом случае, т.е. при $\text{bc} = \text{ap}$, диагональные элементы блочной матрицы оператора $C_{\text{ap}} = (1/2)J((\Gamma B)B - B\Gamma B)$ будут выглядеть следующим образом:

$$(C_{\text{ap}})_{nn} = \sum_{k \neq 0} \frac{1}{2k} \begin{pmatrix} \tilde{\omega}_{2n+k} & 0 \\ 0 & \tilde{\omega}_{2n+k} \end{pmatrix}, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (2.23)$$

Собственные значения оператора JB имеют вид $\{\pm\sqrt{\tilde{\omega}_{2n}}\}$.

Таким образом, из вида собственных значений оператора JB следует, что величина $\text{Tr}(P_n B P_n) = 0$, $\text{bc} \in \{\text{per}, \text{ap}\}$. Из формул (2.22), (2.23) получаем, что

$$\text{Tr}(P_n C_{\text{per}} P_n) = 2 \sum_{k \neq 0} \frac{\omega_{2n+k}}{2k}, \quad \text{Tr}(P_n C_{\text{ap}} P_n) = 2 \sum_{k \neq 0} \frac{\tilde{\omega}_{2n+k}}{2k}.$$

С учетом двухточечности множеств σ_n (теорема 3) получаем формулы (2.19) и (2.20).

Пусть теперь $\text{bc} = \text{dir}$. Из формулы (2.16) следует, что

$$\text{Tr}(P_n C_{\text{per}} P_n) = \sum_{k \neq 0} \frac{\theta_{2n+k}^2}{k},$$

и, значит, справедлива формула (2.21). Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 5. Пусть ряды

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{k \neq 0} \frac{\omega_{2n+k}}{2k}, \quad \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{k \neq 0} \frac{\tilde{\omega}_{2n+k}}{2k}, \quad \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{k \neq 0} \frac{\theta_{2n+k}^2}{k}$$

являются абсолютно сходящимися. В частности, это условие выполнено, если найдется такое число $a > 1/2$ и конечные константы $C_1, C_2 > 0$, что

$$|p_n| \leq \frac{C_1}{1 + |n|^a}, \quad |q_n| \leq \frac{C_2}{1 + |n|^a}. \quad (2.24)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \sum_{n \in \mathbb{Z}} (\tilde{\lambda}_n^{\text{per}} - 2n) &= 0, \\ \sum_{n \in \mathbb{Z}} (\tilde{\lambda}_n^{\text{ap}} - (2n - 1)) &= 0, \\ \sum_{n \in \mathbb{Z}} (\tilde{\lambda}_n^{\text{dir}} - n + \theta_{2n}) &= 0. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Пусть, кроме того, ряды Фурье функций P и Q сходятся в точке $x_0 = 0$. Тогда формулу (2.25) можно записать в виде

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} (\tilde{\lambda}_n^{\text{dir}} - n) = -\frac{1}{4}(P(x_0 + 0) + P(x_0 - 0) + Q(x_0 + 0) + Q(x_0 - 0)).$$

Если, к тому же, $P(0) = P(\pi)$ и $Q(0) = Q(\pi)$, то (2.25) преобразуется в

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} (\tilde{\lambda}_n^{\text{dir}} - n) = -\frac{1}{2}(P(0) + Q(0)).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\text{bc} = \text{reg}$. Если выполнены условия (2.24), то по признаку сравнения положительного числового ряда (с неравенством) повторный ряд

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{k \neq 0} \frac{|\omega_{2n+k}|}{|2k|}$$

сходится или расходится одновременно с рядом

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{\substack{k \neq 0 \\ k \neq -2n}} \frac{1}{|2n + k|^{2a}|k|}, \quad a > \frac{1}{2}.$$

Для данного $a > 1/2$ найдутся такие числа $c > 1/2$, $b > 0$, что справедливо неравенство $|2n + k|^a \geq |2n|^c |k|^b$, из которого следует, что

$$\frac{1}{|2n + k|^\alpha |k|} \leq \frac{1}{|2n|^\alpha |k|^\beta},$$

где $\alpha > 1$, $\beta > 1$. Значит, по признаку сравнения (с неравенством), имеем ряд

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{\substack{k \neq 0 \\ k \neq -2n}} \frac{1}{|2n + k|^{2a}|k|},$$

и, следовательно, исходный ряд, сходится. Из абсолютной сходимости повторного ряда следует, что суммирование можно проводить в любом порядке, а значит,

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{k \neq 0} \frac{\omega_{2n+k}}{2k} = \sum_{k \neq 0} \frac{1}{2k} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \omega_{2n+k} = 0.$$

Аналогичные рассуждения проводятся для случаев $\text{bc} = \text{ap}$, $\text{bc} = \text{dir}$. Таким образом, из теоремы 4 следуют доказываемые равенства. Теорема доказана.

Рассмотрим свертку функций $f * g$, $f, g \in L_{2,\pi}(\mathbb{R})$, определяемой формулой

$$(f * g)(t) = \int_0^\pi f(s)g(t-s) ds, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Отметим, что $f * g \in L_{2,\pi}(\mathbb{R})$ [10].

Далее будут использоваться следующие обозначения. Пусть P^- – функция из пространства $L_{2,\pi}$, определяемая как $P^-(t) = P(-t)$, $t \in \mathbb{R}$. Пусть $f \in L_{2,\pi}(\mathbb{R})$ – функция, при $t \in [0, \pi)$ имеющая вид $f(t) = i(t - \pi/2)$. Для функции $y \in L_{2,\pi}$ через $y_{\text{evn}} \in L_{2,\pi}$ обозначим функцию

$$y_{\text{evn}}(t) = \frac{1}{2} \left(y(t) + y\left(t - \frac{\pi}{2}\right) \right), \quad t \in [0, \pi).$$

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Отметим, что если $y(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} y_k e^{2ikt}$, то $y_{\text{evn}}(t) = \sum_{k \in 2\mathbb{Z}} y_k e^{2ikt}$.

Пусть $f_1, f_2, f_3: L_{2,\pi}(\mathbb{R}) \rightarrow L_{2,\pi}(\mathbb{R})$ – функции, имеющие вид

$$f_1 = ((P^- * Q)f)_{\text{evn}},$$

$$f_2 = ((E(-2)P^- * E(2)Q)f)_{\text{evn}},$$

$$f_3 = \frac{1}{4} (F((P^- * P^- + 2P^- * Q + Q * Q)f + (E(-1)P^- * E(-1)P^- + 2E(-1)P^- * E(1)Q + E(1)Q * E(1)Q)E(1)f)). \quad (2.26)$$

ТЕОРЕМА 6. Если ряды Фурье функций f_1, f_2, f_3 , заданных формулами (2.26), сходятся в точке нуля, то справедливы следующие формулы регуляризованных следов:

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} (\hat{\lambda}_n^{\text{per}} - 2n) = -f_1(0), \quad (2.27)$$

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} (\hat{\lambda}_n^{\text{ap}} - (2n - 1)) = -f_2(0), \quad (2.28)$$

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} (\lambda_n^{\text{dir}} - n + \theta_{2n}) = -f_3(0). \quad (2.29)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\text{bc} = \text{reg}$. Выразим

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{k \neq 0} \frac{p_{-(2n+k)} q_{2n+k}}{2k}$$

через функции P и Q . Во-первых, заметим, что $(P^- * Q)(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} p_{-k} q_k e^{2ikt}$. Тогда

$$\sum_{k \neq 0} \frac{p_{-(2n+k)} q_{2n+k}}{2k} = - \sum_{k \neq 0} \frac{p_{-(2n-k)} q_{2n-k}}{2k} = ((P^- * Q)f)_{2n}$$

– $2n$ -й коэффициент Фурье функции $(P^- * Q)f$, где $f \in L_{2,\pi}(\mathbb{R})$ – почти периодическая периода π функция, коэффициенты Фурье которой выражаются как $f_k = -1/2k$. При $t \in [0, \pi)$ эта функция имеет вид $f(t) = i(t - \pi/2)$.

Из замечания 4 следует, что

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{k \neq 0} \frac{p_{-(2n+k)} q_{2n+k}}{2k} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} ((P^- * Q)f)_{2n} = ((P^- * Q)f)_{\text{evn}}(0).$$

Из предыдущего выражения и формулы (2.19) следует (2.27).

Если $\text{bc} = \text{ap}$, то аналогично получаем

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{k \neq 0} \frac{p_{-(2n+k)+1} q_{2n+k-1}}{2k} = ((E(-2)P^- * E(2)Q)f)_{\text{evn}}(0).$$

Используя (2.20), получим (2.28).

Пусть теперь $\text{bc} = \text{dir}$:

$$\sum_{k \neq 0} \frac{\theta_{2n+k}^2}{k} = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \frac{(p_{-(j+n)} + q_{j+n})^2}{8j} + \sum_{j \in \mathbb{Z}} \frac{(\tilde{p}_{-(j+n)} + \tilde{q}_{j+n})^2}{4(2j-1)}.$$

Отсюда, проведя аналогичные периодическому случаю рассуждения, получим формулу (2.29). Теорема доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] А. Г. Баскаков, “Метод подобных операторов и формулы регуляризованных следов”, *Изв. вузов. Матем.*, 1984, № 3, 3–12.
- [2] А. Г. Баскаков, А. В. Дербушев, А. О. Щербаков, “Метод подобных операторов в спектральном анализе несамосопряженного оператора Дирака с негладким потенциалом”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **75:3** (2011), 3–28.

- [3] Б. С. Митягин, П. Джаков, “Зоны неустойчивости одномерных периодических операторов Шрёдингера и Дирака”, *УМН*, **61**:4 (2006), 77–182.
- [4] И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн, *Введение в теорию линейных несамопряженных операторов в гильбертовом пространстве*, Наука, М., 1965.
- [5] В. А. Садовничий, В. Е. Подольский, “Следы операторов”, *УМН*, **61**:5 (2006), 89–156.
- [6] А. М. Савчук, И. В. Садовнича, “Асимптотические формулы для фундаментальных решений системы Дирака с комплекснозначным суммируемым потенциалом”, *Дифференц. уравнения*, **49**:5 (2013), 573–584.
- [7] А. Г. Баскаков, *Гармонический анализ линейных операторов*, Изд-во Воронежск. гос. ун-та, Воронеж, 1987.
- [8] А. Г. Баскаков, “Спектральный анализ возмущенных неквазианалитических и спектральных операторов”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **58**:4 (1994), 3–32.
- [9] А. Г. Баскаков, “Формулы регуляризованных следов для степеней возмущенных спектральных операторов”, *Изв. вузов. Матем.*, 1985, № 8, 68–71.
- [10] А. Зигмунд, *Тригонометрические ряды*, Т. 1, 2, Мир, М., 1965.

А. О. Щербаков

Воронежский государственный университет

E-mail: a.o.shcherbakov@gmail.com

Поступило

14.10.2014