Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Г. Магомед-Касумов, Аппроксимативные свойства
средних Валле Пуссена для кусочно гладких функций,
Матем. заметки, 2016, том 100, выпуск 2, 229–247

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10588>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.130.99

26 апреля 2023 г., 15:16:43

Аппроксимативные свойства средних Валле Пуссена для кусочно гладких функций

М. Г. Магомед-Касумов

Оценивается величина уклонения функции $f(x)$ от средних Валле Пуссена $V_m^n(f, x)$ по тригонометрической системе на классах кусочно гладких 2π -периодических функций.

Библиография: 12 названий.

Ключевые слова: средние Валле Пуссена, тригонометрическая система, кусочно гладкие функции, теория приближений, аппроксимативные свойства.

DOI: 10.4213/mzm10588

1. Введение. Пусть $f(x)$ – некоторая суммируемая 2π -периодическая функция. Для каждой такой функции можно определить частичную сумму Фурье порядка n :

$$S_n(f, x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k \cos kx + b_k \sin kx, \quad (1.1)$$

где

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos kt \, dt, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin kt \, dt.$$

Суммы Валле Пуссена представляют собой усеченные средние арифметические частичных сумм Фурье:

$$V_m^n(f, x) = \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} S_{n+k}(f, x), \quad n \geq 0, \quad m \geq 1. \quad (1.2)$$

Аппроксимативные свойства сумм Валле Пуссена в равномерной метрике для некоторых классов непрерывных и гладких функций рассматривались в работах [1]–[6]. В интегральной метрике исследования подобного рода можно найти, например, в статьях [7]–[9]. Однако вопросы локальных аппроксимативных свойств сумм Валле Пуссена на классах кусочно-гладких функций до последнего времени оставались малоизученными. В данной статье рассмотрены пространства кусочно-гладких функций, которые вводятся следующим образом. Через $W_p^r([a, b])$ обозначим пространства Соболева, состоящие из $r - 1$ раз непрерывно дифференцируемых на $[a, b]$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 16-01-00486).

функций $f(x)$, для которых $f^{(r-1)}(x)$ абсолютно непрерывна на $[a, b]$, а $f^{(r)}(x) \in L^p([a, b])$. Пусть теперь дано конечное разбиение отрезка $[0, 2\pi]$

$$A = \{0 = \theta_0 < \theta_1 < \dots < \theta_q = 2\pi\}.$$

Тогда через $W_p^{r,A}$ обозначим пространство 2π -периодических функций, которые на каждом отрезке $[\theta_i, \theta_{i+1}]$ можно превратить в функцию из $W_p^r([\theta_i, \theta_{i+1}])$ путем переопределения ее на концах. Например, функция $f(x) = \operatorname{sign} \sin x \in W_p^{r,A}$ для $A = \{0, \pi, 2\pi\}$ при любых $r, p \geq 0$. Для обозначения нормы функции $f(x)$ в пространстве Лебега $L^p([0, 2\pi])$, $1 \leq p \leq \infty$, мы будем использовать символ $\|f\|_p$, причем $\|f\|_\infty$ понимается как $\operatorname{ess\,sup}_{x \in [0, 2\pi]} |f(x)|$.

Величина уклонения функций $f(x)$ из $W_1^{3,A}$ от классических сумм Валле Пуссена $V_n^n(f)$ была рассмотрена в [10].

ТЕОРЕМА 1. Для функций $f(x) \in W_\infty^{3,A}$ справедлива следующая оценка остатка при приближении суммами Валле Пуссена ($n \geq 1$):

$$|f(x) - V_n^n(f, x)| \leq \frac{6q + 1}{\pi \sin^2(\varepsilon/2)} \cdot \frac{M_f}{n(n+1)}, \quad x \in \bigcup_{i=1}^q [\theta_{i-1} + \varepsilon, \theta_i - \varepsilon],$$

где $M_f = \max\{\|f\|_\infty, \|f'\|_\infty, \|f''\|_\infty, \|f'''\|_1\}$, ε – любое положительное число.

В настоящей работе этот результат переносится на более широкое множество $W_\infty^{2,A}$. Кроме того, оценка дается для общих сумм Валле Пуссена V_m^n при произвольных m и n .

ТЕОРЕМА 2. Для функций $f(x)$ из класса $W_\infty^{2,A}$ справедлива следующая оценка остатка при приближении суммами Валле Пуссена ($n \geq 0, m \geq 1$):

$$|f(x) - V_m^n(f, x)| \leq \frac{4M_f}{\pi} \left(\sum_{i=1}^q \frac{1}{\sin^2((x - \theta_i)/2)} + 36 \right) \frac{1}{m(n+1)}, \quad x \in [0, 2\pi] \setminus \bigcup_{i=0}^q \theta_i,$$

где $M_f = \max\{\|f\|_\infty, \|f'\|_\infty, \|f''\|_\infty\}$.

Доказательство этой теоремы приведено в п. 3. Оно опирается на ряд вспомогательных утверждений, которые собраны в следующем пункте. Отметим, что оценка, полученная в теореме 2, является точной по порядку. Этот вопрос обсуждается в п. 4.

В теории приближений часто рассматривается задача оценки величины верхней грани по некоторому классу уклонения функции от приближающего полинома. Используя теорему 2, можно получить подобную оценку для классов $W_\infty^{2,A}(M)$, состоящих из функций $f(x) \in W_\infty^{2,A}$, удовлетворяющих условиям $\|f^{(i)}\|_\infty \leq M$, $i = 0, 1, 2$.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $\varepsilon > 0$, $\mathcal{D}(\varepsilon) = \bigcup_{i=1}^q [\theta_{i-1} + \varepsilon, \theta_i - \varepsilon]$. Имеет место следующее неравенство:

$$\mathcal{E}_m^n(W_\infty^{2,A}(M), \varepsilon) \leq \frac{4M}{\pi} \left(\frac{q}{\sin^2(\varepsilon/2)} + 36 \right) \frac{1}{m(n+1)},$$

где

$$\mathcal{E}_m^n(W, \varepsilon) = \sup_{f \in W} \max_{x \in \mathcal{D}(\varepsilon)} |f(x) - V_m^n(f, x)|.$$

2. Определения и вспомогательные утверждения. Напомним, что *преобразованием Абеля* называется формула

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k \beta_k = \sum_{k=1}^{n-1} (\alpha_k - \alpha_{k+1}) B_k + \alpha_n B_n, \quad B_k = \sum_{j=1}^k \beta_j. \quad (2.1)$$

Если $\alpha_n B_n \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, то преобразование Абеля обобщается на ряды

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \beta_k = \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k - \alpha_{k+1}) B_k. \quad (2.2)$$

В дальнейшем нам понадобятся следующие тригонометрические соотношения:

$$\begin{aligned} \sum_{k=m}^n \sin kx &= \frac{\cos((2m-1)x/2) - \cos((2n+1)x/2)}{2 \sin(x/2)} \\ &= \frac{\sin((m+n)x/2) \sin((n-m+1)x/2)}{\sin(x/2)}, \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$\sum_{k=m}^n \sin(2k+1)x = \frac{\cos 2mx - \cos(2n+2)x}{2 \sin x}, \quad (2.4)$$

$$\sum_{k=m}^n \cos kx = \frac{\sin((2n+1)x/2) - \sin((2m-1)x/2)}{2 \sin(x/2)}, \quad (2.5)$$

$$\sum_{k=m}^n \cos(2k+1)x = \frac{\sin(2n+2)x - \sin 2mx}{2 \sin x} = \frac{\sin(n-m+1)x \cos(n+m+1)x}{\sin x}. \quad (2.6)$$

В доказательстве основной теоремы используется приведенное ниже вспомогательное утверждение, которое, впрочем, представляет и самостоятельный интерес.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Для функций вида ($R \ni r > 0$)

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k^r}, \quad f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k^r} \quad (2.7)$$

имеет место оценка

$$|f(x) - V_m^n(f, x)| \leq \frac{1}{\sin^2(x/2)} \cdot \frac{1}{m(n+1)^r}, \quad x \in (0, 2\pi).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отметим, что ряды (2.7) сходятся на рассматриваемом интервале $(0, 2\pi)$ (см. [11; теорема (2.6), с. 16]). Доказательство проведем для одного из рядов (2.7): для второго оно получается аналогично.

Пусть

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k^r}.$$

Представим разность $f(x) - V_m^n(f, x)$ в следующем виде:

$$f(x) - V_m^n(f, x) = f(x) - \frac{S_n(x) + S_{n+1}(x) + \dots + S_{n+m-1}(x)}{m}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{f(x) - S_n(x) + f(x) - S_{n+1}(x) + \cdots + f(x) - S_{n+m-1}(x)}{m} \\
&= \frac{R_n(x) + R_{n+1}(x) + \cdots + R_{n+m-1}(x)}{m}, \tag{2.8}
\end{aligned}$$

где $R_l(x) = \sum_{k=l+1}^{\infty} ((\sin kx)/k^r)$.

Запишем теперь последнюю часть формулы (2.8) в табличном виде:

$$\begin{aligned}
f(x) - V_m^n(f, x) = \frac{1}{m} \bigg(& \underbrace{\frac{\sin(n+1)x}{(n+1)^r}}_{v_n} + \underbrace{\frac{\sin(n+2)x}{(n+2)^r}}_{v_{n+1}} + \frac{\sin(n+3)x}{(n+3)^r} + \cdots \\
& + \frac{\sin(n+2)x}{(n+2)^r} + \frac{\sin(n+3)x}{(n+3)^r} + \frac{\sin(n+4)x}{(n+4)^r} + \cdots \\
& \cdots \cdots \cdots \\
& + \underbrace{\frac{\sin(n+m)x}{(n+m)^r}}_{v_n} + \underbrace{\frac{\sin(n+m+1)x}{(n+m+1)^r}}_{v_{n+1}} + \frac{\sin(n+m+2)x}{(n+m+2)^r} + \cdots \bigg). \tag{2.9}
\end{aligned}$$

Через $v_p, p = n, n+1, \dots$, будем обозначать вертикальные конечные суммы из (2.9):

$$v_p = \sum_{k=1}^m \frac{\sin(p+k)x}{(p+k)^r} = \sum_{k=1}^m \frac{1}{(p+k)^r} \sin(p+k)x, \quad p = n, n+1, \dots \tag{2.10}$$

Применим к суммам (2.10) преобразование Абеля:

$$\alpha_k = \frac{1}{(p+k)^r}, \quad B_k = \sum_{j=1}^k \sin(p+j)x. \tag{2.11}$$

Пользуясь формулой (2.3), для B_k получим следующее выражение:

$$B_k = \sum_{j=p+1}^{p+k} \sin jx = \frac{\cos((2p+1)x/2) - \cos((2p+2k+1)x/2)}{2 \sin(x/2)}. \tag{2.12}$$

Таким образом, для сумм $v_p, p = n, n+1, \dots$, приходим к формуле

$$\begin{aligned}
v_p = \sum_{k=1}^{m-1} \nabla g(p+k) \frac{\cos((2p+1)x/2) - \cos((2p+2k+1)x/2)}{2 \sin(x/2)} \\
+ g(p+m) \frac{\cos((2p+1)x/2) - \cos((2p+2m+1)x/2)}{2 \sin(x/2)}, \tag{2.13}
\end{aligned}$$

где $g(t) = 1/t^r$, $\nabla \phi(t) = \phi(t) - \phi(t+1)$.

Следовательно, после применения к каждому столбцу v_p преобразования Абеля формула (2.9) примет вид ($k = 1, \dots, m-1$)

$$\begin{aligned}
f(x) - V_m^n(f, x) = \frac{1}{m} \frac{1}{2 \sin(x/2)} \cdot \left[\sum_{k=1}^{m-1} \sum_{p=n}^{\infty} \nabla g(p+k) \left(\cos \frac{2p+1}{2} x - \cos \frac{2p+2k+1}{2} x \right) \right. \\
\left. + \sum_{p=n}^{\infty} g(p+m) \left(\cos \frac{2p+1}{2} x - \cos \frac{2p+2m+1}{2} x \right) \right].
\end{aligned}$$

Введем обозначения

$$h_k = \sum_{p=n}^{\infty} \nabla g(p+k) \left(\cos \frac{2p+1}{2} x - \cos \frac{2p+2k+1}{2} x \right), \quad k = 1, \dots, m-1, \quad (2.14)$$

$$h_m = \sum_{p=n}^{\infty} g(p+m) \left(\cos \frac{2p+1}{2} x - \cos \frac{2p+2m+1}{2} x \right). \quad (2.15)$$

Тогда

$$f(x) - V_m^n(f, x) = \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{2 \sin(x/2)} \sum_{k=1}^m h_k. \quad (2.16)$$

Применим к рядам (2.14), (2.15) преобразование Абеля. Получим для h_k :

$$\begin{aligned} \alpha_p &= \nabla g(p+k), \\ B_p &= \sum_{j=n}^p \left(\cos \frac{2j+1}{2} x - \cos \frac{2j+2k+1}{2} x \right) \\ &= \sum_{j=n}^p \cos(2j+1) \frac{x}{2} - \sum_{j=n}^p \cos(2(j+k)+1) \frac{x}{2}. \end{aligned}$$

Используя (2.6), преобразуем формулу для B_p к виду

$$\begin{aligned} B_p &= \frac{\sin((2p+2)x/2) - \sin(2nx/2)}{2 \sin(x/2)} - \frac{\sin((2(p+k)+2)x/2) - \sin(2(n+k)x/2)}{2 \sin(x/2)} \\ &= \frac{\sin(p+1)x - \sin nx + \sin(n+k)x - \sin(p+k+1)x}{2 \sin(x/2)} \\ &= \frac{-2 \sin(kx/2) \cos((2p+2+k)x/2) + 2 \sin(kx/2) \cos((2n+k)x/2)}{2 \sin(x/2)} \\ &= \frac{\sin(kx/2)}{\sin(x/2)} \left(\cos \frac{2n+k}{2} x - \cos \frac{2p+2+k}{2} x \right). \end{aligned} \quad (2.17)$$

Следовательно, согласно формуле (2.2) ряды h_k , $k = 1, \dots, m-1$, примут вид

$$h_k = \frac{\sin(kx/2)}{\sin(x/2)} \sum_{p=n}^{\infty} \nabla^2 g(p+k) \left(\cos \frac{2n+k}{2} x - \cos \frac{2p+2+k}{2} x \right), \quad (2.18)$$

где $\nabla^2 \phi(t) = \nabla \nabla \phi(t)$. Вполне аналогично для h_m можно получить следующее выражение:

$$h_m = \frac{\sin(mx/2)}{\sin(x/2)} \sum_{p=n}^{\infty} \nabla g(p+m) \left(\cos \frac{2n+m}{2} x - \cos \frac{2p+2+m}{2} x \right).$$

Оценим теперь суммы h_k , $k = 1, \dots, m-1$:

$$|h_k| \leq \frac{2}{\sin(x/2)} \sum_{p=n}^{\infty} (\nabla g(p+k) - \nabla g(p+k+1)) = \frac{2}{\sin(x/2)} \cdot \nabla g(n+k). \quad (2.19)$$

Таким же образом получается оценка и для h_m :

$$|h_m| \leq \frac{2}{\sin(x/2)} \cdot g(n+m). \quad (2.20)$$

Из (2.16), (2.19) и (2.20) получаем окончательную оценку:

$$\begin{aligned} |f(x) - V_m^n(f, x)| &\leq \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{\sin^2(x/2)} \left[\sum_{k=1}^{m-1} (g(n+k) - g(n+k+1)) + g(n+m) \right] \\ &= \frac{1}{\sin^2(x/2)} \cdot \frac{1}{m(n+1)^r}. \end{aligned}$$

Отметим, что при $m = 1$ утверждение 1 дает оценку скорости сходимости рядов Фурье, а при $n = 0$ – средних Фейера для функций (2.7).

Далее нам понадобятся ядра

$$\mathcal{K}_{r,m}^n(u) = m^{r-1} \sum_{l=n}^{n+m-1} \sum_{k=l+1}^{\infty} \frac{\cos(ku + \pi r/2)}{k^r}, \quad (2.21)$$

свойства которых при $n = m+1$ были рассмотрены в статье [8]. В данной работе нам потребуется обобщение леммы 2.3 из упомянутой работы на случай произвольных n и m .

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. *Справедливы следующие неравенства ($m \geq 1, n \geq 0$):*

$$\int_0^{2\pi} |\mathcal{K}_{r,m}^n(u)| du \leq \begin{cases} \frac{8r(r+1)^2}{r-1} \left(\frac{m}{n+1} \right)^{r-1}, & r > 1, \\ 32 \ln \left(1 + \frac{m}{n+1} \right) + 58, & r = 1. \end{cases} \quad (2.22)$$

Прежде чем переходить к доказательству, приведем некоторые вспомогательные утверждения.

ЛЕММА 1. *Имеет место следующее равенство:*

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_{r,m}^n &= m^{r-1} \sum_{l=1}^{m-1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(ku/2) \sin(lu/2)}{\sin^2(u/2)} \cos\left(\frac{2n+l+k}{2}u + \frac{\pi r}{2}\right) \cdot \Delta^2 g_r(n+l+k-1) \\ &\quad - m^{r-1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(ku/2) \sin(mu/2)}{\sin^2(u/2)} \cos\left(\frac{2n+m+k}{2}u + \frac{\pi r}{2}\right) \cdot \Delta g_r(n+m+k-1), \end{aligned} \quad (2.23)$$

где $g_r(t) = 1/t^r$, $\Delta\phi(t) = \phi(t+1) - \phi(t)$, $\Delta^2\phi(t) = \Delta\Delta\phi(t)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Формула, записанная в утверждении леммы, получается путем двукратного применения преобразования Абеля к выражению (2.21). Рассмотрим случай $r = 2s$. Тогда согласно определению (2.21) ядро примет вид

$$\mathcal{K}_{2s,m}^n(u) = (-1)^s m^{2s-1} \sum_{l=n}^{n+m-1} \sum_{k=l+1}^{\infty} \frac{\cos ku}{k^{2s}}.$$

Выполним преобразование Абеля для суммы по k , полагая

$$\alpha_k = \frac{1}{k^{2s}}, \quad B_k = \sum_{j=l+1}^k \cos ju = \frac{\sin((2k+1)u/2) - \sin((2l+1)u/2)}{2 \sin(u/2)}.$$

В результате приходим к следующему выражению для ядер:

$$\mathcal{K}_{2s,m}^n(u) = \frac{(-1)^{s+1} m^{2s-1}}{2 \sin(u/2)} \sum_{l=n}^{n+m-1} \sum_{k=l+1}^{\infty} \Delta g_{2s}(k) \left(\sin \frac{2k+1}{2} u - \sin \frac{2l+1}{2} u \right).$$

После замены переменной суммирования k на $k-l$ и перестановки знаков суммы получим

$$\mathcal{K}_{2s,m}^n(u) = \frac{(-1)^{s+1} m^{2s-1}}{2 \sin(u/2)} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=n}^{n+m-1} \Delta g_{2s}(k+l) \left(\sin \frac{2k+2l+1}{2} u - \sin \frac{2l+1}{2} u \right).$$

Еще раз воспользуемся преобразованием Абеля, но теперь уже по переменной l :

$$\alpha_l = \Delta g_{2s}(k+l), \quad B_l = \sum_{j=n}^l \sin(2j+2k+1) \frac{u}{2} - \sum_{j=n}^l \sin(2j+1) \frac{u}{2}.$$

Формула (2.4) для суммы синусов с нечетными индексами и тригонометрические соотношения для разности косинусов и синусов позволяют переписать B_l следующим образом:

$$\begin{aligned} B_l &= \frac{1}{2 \sin(u/2)} (\cos(n+k)u - \cos nu + \cos(l+1)u - \cos(l+k+1)u) \\ &= 2 \frac{\sin(ku/2)}{\sin(u/2)} \sin \frac{l-n+1}{2} u \cdot \cos \frac{l+n+k+1}{2} u. \end{aligned}$$

Таким образом, согласно (2.1) имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_{2s,m}^n(u) &= (-1)^{s+1} m^{2s-1} \sum_{k=1}^{\infty} \left[- \sum_{l=n}^{n+m-2} \frac{\sin(ku/2) \sin((l-n+1)u/2)}{\sin^2(u/2)} \right. \\ &\quad \times \cos \frac{l+n+k+1}{2} u \cdot \Delta^2 g_{2s}(k+l) \\ &\quad \left. + \frac{\sin(ku/2) \sin(mu/2)}{\sin^2(u/2)} \cos \frac{2n+m+k}{2} u \cdot \Delta g_{2s}(k+n+m-1) \right], \end{aligned}$$

откуда, учитывая, что

$$(-1)^s \cos(\alpha u) = \cos\left(\alpha u + \frac{\pi r}{2}\right),$$

путем несложных преобразований можно получить утверждение леммы для $r = 2s$. Случай $r = 2s+1$ доказывается аналогично.

Для доказательства утверждения 2 также понадобится лемма 2.2 из упомянутой работы [8]. Нам удалось несколько улучшить полученную в ней оценку, поэтому мы приводим ее тут с доказательством.

ЛЕММА 2. Для $0 < k \leq l$, $k, l \in \mathbb{N}$ справедлива следующая оценка:

$$A_{k,l} = \int_0^\pi \frac{|\sin(ku/2) \cdot \sin(lu/2)|}{\sin^2(u/2)} du \leq 2k \left(2 + \ln \frac{l}{k} \right). \quad (2.24)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. С помощью замены переменной интеграл $A_{k,l}$ можно представить следующим образом:

$$A_{k,l} = 2 \int_0^{\pi/2} \frac{|\sin ku \sin lu|}{\sin^2 u} du.$$

Далее, полученное выражение можно переписать в виде суммы двух интегралов:

$$A_{k,l} = 2 \int_0^{\pi/2} \frac{|\sin ku \sin lu|}{u^2} du + 2 \int_0^{\pi/2} |\sin ku \sin lu| \varphi(u) du, \quad (2.25)$$

где $\varphi(u) = 1/\sin^2 u - 1/u^2$. Оценим сначала первый интеграл. Для этого разобьем промежуток интегрирования на три части:

$$\left[0, \frac{\pi}{2} \right] = \left[0, \frac{1}{l} \right] \cup \left[\frac{1}{l}, \frac{1}{k} \right] \cup \left[\frac{1}{k}, \frac{\pi}{2} \right].$$

Тогда, учитывая тот факт, что

$$\sin nx \leq \begin{cases} nx, & nx < 1, \\ 1, & nx \geq 1, \end{cases}$$

для первого интеграла в (2.25) можно вывести следующую оценку:

$$\int_0^{\pi/2} \frac{|\sin ku \sin lu|}{u^2} du \leq \int_0^{1/l} k \cdot l du + \int_{1/l}^{1/k} \frac{k}{u} du + \int_{1/k}^{\pi/2} \frac{du}{u^2} = k \left(2 + \ln \frac{l}{k} \right) - \frac{2}{\pi}. \quad (2.26)$$

Перейдем теперь к оценке второго интеграла в (2.25). Для этого покажем, что

$$\varphi(u) \leq 1 - \frac{4}{\pi^2} \quad \text{для} \quad 0 < u \leq \frac{\pi}{2}, \quad (2.27)$$

$$\int_0^{\pi/2} |\sin ku \sin lu| du \leq 1 \quad \text{для} \quad 0 < k \leq l. \quad (2.28)$$

Начнем с (2.27). Убедимся сначала в том, что $\varphi(u)$ – монотонно возрастающая на $(0, \pi/2]$ функция. Поскольку производная этой функции равна $2(1/u^3 - \cos u / \sin^3 u)$, то достаточно показать, что $(\sin^3 u)/u^3 \geq \cos u$, $u \in (0, \pi/2]$. Из разложений в ряд Тейлора функций $\sin u$, $\cos u$ и очевидного неравенства

$$\frac{u^n}{n!} - \frac{u^{n+2}}{(n+2)!} \geq 0, \quad u \in \left[0, \frac{\pi}{2} \right], \quad n \geq 1,$$

можно вывести соотношения

$$\sin u \geq u - \frac{u^3}{3!}, \quad \cos u \leq 1 - \frac{u^2}{2!} + \frac{u^4}{4!}, \quad u \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],$$

используя которые получаем требуемое неравенство:

$$\frac{\sin^3 u}{u^3} \geq 1 - \frac{u^2}{2} + \frac{u^4}{12} - \frac{u^6}{6^3} \geq \cos u + \frac{u^4}{24} - \frac{u^6}{6^3} \geq \cos u, \quad u \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right].$$

Ввиду того, что $\varphi(u)$ возрастает на $(0, \pi/2]$, имеем

$$\varphi(u) \leq \varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 - \frac{4}{\pi^2}, \quad 0 < u \leq \frac{\pi}{2}.$$

Покажем теперь справедливость (2.28). Для этого, воспользовавшись формулой для произведения синусов, перепишем интеграл в левой части в виде

$$J = \int_0^{\pi/2} |\sin ku \sin lu| du = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} |\cos(l-k)u - \cos(l+k)u| du.$$

Рассмотрим отдельно два случая.

Пусть $k = l$. Тогда

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} |1 - \cos 2ku| du = \frac{\pi}{4} \leq 1.$$

$k < l$. В этом случае имеем

$$J \leq \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} |\cos(l-k)u| du + \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} |\cos(l+k)u| du. \quad (2.29)$$

Покажем теперь, что для любого $n \in \mathbb{N}$ выполняется равенство

$$\int_0^{\pi/2} |\cos nu| du = 1. \quad (2.30)$$

В самом деле, сделаем замену переменной $nu = x$ и разобьем интеграл на сумму интегралов:

$$\int_0^{\pi/2} |\cos nu| du = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \int_{(k-1)\pi/2}^{k\pi/2} |\cos x| dx. \quad (2.31)$$

Для вычисления k -го элемента суммы вновь прибегнем к замене переменной $x = u + (k-1)\pi/2$:

$$J_k = \int_{((k-1)/2)\pi}^{(k/2)\pi} |\cos x| dx = \int_0^{\pi/2} \left| \cos\left(u + \frac{k-1}{2}\pi\right) \right| du. \quad (2.32)$$

Подынтегральная функция $|\cos(u + (k-1)\pi/2)|$ в зависимости от четности k будет равна либо $|\cos u|$, либо $|\sin u|$. Однако, так как

$$\int_0^{\pi/2} |\cos(u)| du = \int_0^{\pi/2} |\sin(u)| du = 1,$$

то в любом случае $J_k = 1$. Тогда из (2.31) вытекает равенство (2.30), которое, в свою очередь, будучи примененным в неравенстве (2.29) позволяет получить требуемую оценку $J \leq 1$.

Таким образом, неравенство (2.28) доказано. Далее, из (2.27) и (2.28) уже легко получить оценку для второго интеграла в (2.25):

$$\int_0^{\pi/2} |\sin ku \sin lu| \varphi(u) du \leq 1 - \frac{4}{\pi^2}. \quad (2.33)$$

Утверждение леммы вытекает из (2.25), (2.26) и (2.33).

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Если $0 < l < k$, то в оценке (2.24) k и l поменяются местами, т.е.

$$A_{k,l} = \int_0^\pi \frac{|\sin(ku/2) \cdot \sin(lu/2)|}{\sin^2(u/2)} du \leq 2l \left(2 + \ln \frac{k}{l} \right).$$

При этом отметим, что, воспользовавшись известным неравенством для логарифмов $\ln x < x - 1$, можно получить соотношения

$$k \left(2 + \ln \frac{l}{k} \right) < l + k, \quad l \left(2 + \ln \frac{k}{l} \right) < l + k.$$

Следовательно, для любых натуральных l и k можно написать более грубую общую оценку:

$$A_{k,l} = \int_0^\pi \frac{|\sin(ku/2) \cdot \sin(lu/2)|}{\sin^2(u/2)} du < 2(l + k). \quad (2.34)$$

ЛЕММА 3. При $p \geq 1$ и $r > 1$, $p, r \in \mathbb{R}$, имеет место следующее двойное неравенство:

$$\frac{c_1(r, p)}{p^{r-1}} \leq \sum_{k=p+1}^{\infty} \frac{\ln(k/p)}{k^r} \leq \frac{c_2(r, p)}{p^{r-1}},$$

где

$$c_1(r, p) = \frac{1}{(r-1)^2} - \frac{1}{e \cdot r \cdot p}, \quad c_2(r, p) = \frac{1}{(r-1)^2} + \frac{1}{e \cdot r \cdot p}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. После замены переменной суммирования ряд, указанный в утверждении леммы, можно переписать в следующем виде:

$$\sum_{k=p+1}^{\infty} \frac{\ln(k/p)}{k^r} = \frac{1}{p^{r-1}} \frac{1}{p} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln(1 + k/p)}{(1 + k/p)^r} = \frac{1}{p^{r-1}} \mathfrak{S}(p). \quad (2.35)$$

Легко видеть, что $\mathfrak{S}(p)$ представляет собой интегральную сумму функции $f(x) = (\ln(1+x))/(1+x)^r$. Далее нам будет удобно использовать следующие обозначения:

$$S_n = S_n(\mathfrak{S})(p) = \frac{1}{p} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{p}\right), \quad R_n = R_n(\mathfrak{S})(p) = \frac{1}{p} \sum_{k=n+1}^{\infty} f\left(\frac{k}{p}\right).$$

Как известно, если функция монотонна на некотором промежутке, то ее интегральная сумма по этому промежутку с помощью квадратурной формулы прямоугольников легко оценивается снизу и сверху соответствующими интегралами от

самой функции. А именно, если функция убывает на $[x_i, x_j]$, $x_k = k/p$, то

$$\frac{1}{p} \sum_{k=i+1}^j f(x_k) \leq \int_{x_i}^{x_j} f(x) dx \leq \frac{1}{p} \sum_{k=i}^{j-1} f(x_k). \quad (2.36)$$

В случае же ее возрастания на указанном промежутке будет верной другая формула:

$$\frac{1}{p} \sum_{k=i}^{j-1} f(x_k) \leq \int_{x_i}^{x_j} f(x) dx \leq \frac{1}{p} \sum_{k=i+1}^j f(x_k). \quad (2.37)$$

С помощью производной без труда определяются интервалы монотонности функции $f(x)$, $x \geq 0$: она возрастает на $(0, \xi)$ и убывает на $(\xi, +\infty)$, где $\xi = e^{1/r} - 1$. Таким образом, ξ является точкой максимума функции $f(x)$, а сам максимум равен $f(\xi) = 1/(e \cdot r)$.

Для получения оценки сверху, учитывая вышесказанное, разобьем сумму $\mathfrak{S}$ на части следующим образом:

$$\mathfrak{S}(p) = S_{n_\xi-1} + \frac{1}{p} f\left(\frac{n_\xi}{p}\right) + \frac{1}{p} f\left(\frac{n_\xi+1}{p}\right) + R_{n_\xi+1}, \quad (2.38)$$

где n_ξ определяется с помощью неравенств $n_\xi/p \leq \xi < (n_\xi+1)/p$ и равно $n_\xi = [p \cdot \xi]$. Так как $f(x)$ возрастает на (x_0, x_{n_ξ}) и убывает на $(x_{n_\xi+1}, +\infty)$, то из (2.37) и (2.36) получаем

$$S_{n_\xi-1} \leq \int_{x_1}^{x_{n_\xi}} f(x) dx, \quad R_{n_\xi+1} \leq \int_{x_{n_\xi+1}}^{+\infty} f(x) dx. \quad (2.39)$$

Поскольку $f(x)$ возрастает на $[x_{n_\xi}, \xi]$ и убывает на $[\xi, x_{n_\xi+1}]$, то

$$\min\{f(x_{n_\xi}), f(x_{n_\xi+1})\} \leq f(x), \quad x \in [x_{n_\xi}, x_{n_\xi+1}].$$

Поэтому можно записать следующее неравенство:

$$\frac{1}{p} f(x_{n_\xi}) + \frac{1}{p} f(x_{n_\xi+1}) \leq \int_{x_{n_\xi}}^{x_{n_\xi+1}} f(x) dx + \frac{1}{p} \max_{x \geq 0} f(x). \quad (2.40)$$

Подстановка (2.39) и (2.40) в (2.38) приводит к следующему соотношению:

$$\mathfrak{S}(p) \leq \int_0^{+\infty} f(x) dx + \frac{1}{p} \max_{x \geq 0} f(x) = \int_0^{+\infty} f(x) dx + \frac{1}{e \cdot r \cdot p}. \quad (2.41)$$

Интеграл в данном неравенстве легко вычисляется с помощью интегрирования по частям:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{(1+x)^r} dx = -\frac{\ln(1+x) + 1/(r-1)}{(r-1)(1+x)^{r-1}} \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{(r-1)^2}, \quad r > 1. \quad (2.42)$$

Из (2.35), (2.41) и (2.42) получаем верхнюю оценку в утверждении леммы. Чтобы получить оценку снизу, представим $\mathfrak{S}(p)$ в следующем виде:

$$\mathfrak{S}(p) = S_{n_\xi} + R_{n_\xi}.$$

Учитывая интервалы монотонности функции $f(x)$, из (2.36) и (2.37) имеем

$$S_{n_\xi} \geq \int_0^{x_{n_\xi}} f(x) dx, \quad R_{n_\xi} \geq \int_{x_{n_\xi+1}}^{+\infty} f(x) dx.$$

Следовательно, для $\mathfrak{S}(p)$ можно написать следующее неравенство:

$$\mathfrak{S}(p) \geq \int_0^{+\infty} f(x) dx - \int_{x_{n_\xi}}^{x_{n_\xi+1}} f(x) dx. \quad (2.43)$$

Точное значение первого интеграла в полученном неравенстве известно (см. (2.42)). Оценим сверху второй интеграл:

$$J = \int_{x_{n_\xi}}^{x_{n_\xi+1}} f(x) dx \leq \frac{f(\xi)}{p} = \frac{1}{e \cdot r \cdot p}.$$

Отсюда и из (2.43), (2.42) следует, что

$$\mathfrak{S}(p) \geq \frac{1}{(r-1)^2} - \frac{1}{e \cdot r \cdot p}.$$

Доказательство завершается подстановкой этой оценки в соотношение (2.35).

Перейдем теперь к доказательству утверждения 2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО УТВЕРЖДЕНИЯ 2. Используя представление для $\mathcal{K}_{r,m}^n(u)$ из леммы 1, интересующий нас интеграл можно оценить следующим выражением:

$$\begin{aligned} J &= \int_0^{2\pi} |\mathcal{K}_{r,m}^n(u)| du \\ &\leq m^{r-1} \sum_{l=1}^{m-1} \sum_{k=1}^{\infty} |\Delta^2 g_r(n+l+k-1)| \int_0^{2\pi} \frac{|\sin(ku/2) \sin(lu/2)|}{\sin^2(u/2)} du \\ &\quad + m^{r-1} \sum_{k=1}^{\infty} |\Delta g_r(n+m+k-1)| \int_0^{2\pi} \frac{|\sin(ku/2) \sin(mu/2)|}{\sin^2(u/2)} du = \mathfrak{S}_1 + \mathfrak{S}_2. \end{aligned} \quad (2.44)$$

Согласно замечанию к лемме 2

$$\int_0^{2\pi} \frac{|\sin(ku/2) \sin(lu/2)|}{\sin^2(u/2)} du = 2 \int_0^{\pi} \frac{|\sin(ku/2) \sin(lu/2)|}{\sin^2(u/2)} du < 4(l+k). \quad (2.45)$$

Далее, свойство конечных приращений

$$\Delta_h^n f(t) = f^{(n)}(\tau) h^n, \quad t < \tau < t + nh,$$

где $\Delta_h f(t) = f(t+h) - f(t)$, $\Delta_h^n f(t) = \Delta_h(\Delta_h^{n-1} f(t))$, позволяет получить соотношение

$$|\Delta^2 g_r(n+l+k-1)| = \frac{r(r+1)}{\tau^{r+2}} \leq \frac{r(r+1)}{(n+l+k-1)^{r+2}}, \quad (2.46)$$

$$|\Delta g_r(n+m+k-1)| = \frac{r}{\tau^{r+1}} \leq \frac{r}{(n+m+k-1)^{r+1}}. \quad (2.47)$$

Пусть сначала $r > 1$. Используя (2.45), (2.46) и (2.47), с учетом обозначений (2.44) выводим

$$\begin{aligned}\mathfrak{S}_1 &\leq 4r(r+1)m^{r-1} \sum_{l=1}^{m-1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{l+k}{(n+l+k-1)^{r+2}}, \\ \mathfrak{S}_2 &\leq 4r m^{r-1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{m+k}{(n+m+k-1)^{r+1}}.\end{aligned}$$

Далее, поскольку при $x, k \geq 1$ и $n \geq 0$

$$\frac{x+k}{(n+x+k-1)^{r+2}} = 2 \frac{(x+k)/2}{(n+x+k-1)^{r+2}} \leq 2 \frac{1}{(n+x+k-1)^{r+1}},$$

то получаем

$$\begin{aligned}\mathfrak{S}_1 &\leq 8r(r+1)m^{r-1} \sum_{l=1}^{m-1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(n+l+k-1)^{r+1}}, \\ \mathfrak{S}_2 &\leq 8r m^{r-1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(n+m+k-1)^r}.\end{aligned}\tag{2.48}$$

Для остатков обобщенного гармонического ряда имеет место оценка [12; с. 284]:

$$\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^{1+\sigma}} \leq \frac{1}{\sigma} \frac{1}{(n-1)^{\sigma}}, \quad \sigma > 0.\tag{2.49}$$

Для наших целей ее будет удобно переделать, поскольку при $n = 1$ указанная оценка теряет смысл. С этой целью из суммы в (2.49) сначала выделим первое слагаемое, затем уже к оставшейся части ряда применим оценку (2.49):

$$\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^{1+\sigma}} = \frac{1}{n^{1+\sigma}} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^{1+\sigma}} \leq \frac{1}{n^{1+\sigma}} + \frac{1}{\sigma} \frac{1}{n^{\sigma}} \leq \left(1 + \frac{1}{\sigma}\right) \frac{1}{n^{\sigma}}, \quad n \geq 1, \quad \sigma > 0.\tag{2.50}$$

Воспользуемся неравенством (2.50) для ряда по переменной k в $\mathfrak{S}_1$ из (2.48):

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(n+l+k-1)^{r+1}} = \sum_{k=n+l}^{\infty} \frac{1}{k^{r+1}} \leq \frac{r+1}{r} \frac{1}{(n+l)^r}.$$

Следовательно, для $\mathfrak{S}_1$ можно написать следующую оценку:

$$\mathfrak{S}_1 \leq 8(r+1)^2 m^{r-1} \sum_{l=n+1}^{n+m-1} \frac{1}{l^r}.\tag{2.51}$$

Сделав замену переменной $l = n + m + k - 1$ в $\mathfrak{S}_2$, из (2.44), (2.48) и (2.51) получим

$$J \leq 8(r+1)^2 m^{r-1} \sum_{l=n+1}^{n+m-1} \frac{1}{l^r} + 8r m^{r-1} \sum_{l=n+m}^{\infty} \frac{1}{l^r} \leq 8(r+1)^2 m^{r-1} \sum_{l=n+1}^{\infty} \frac{1}{l^r}.$$

Осталось еще раз воспользоваться оценкой (2.50):

$$J \leq \frac{8r(r+1)^2}{r-1} \left(\frac{m}{n+1} \right)^{r-1},$$

и утверждение для $r > 1$ доказано. Рассмотрим теперь случай $r = 1$. Легко видеть, что оценка (2.51) для $\mathfrak{S}_1$ верна и при $r = 1$. Что касается $\mathfrak{S}_2$, то полученная в (2.48) формула при $r = 1$ дает лишнюю смысла оценку $\mathfrak{S}_2 \leq \infty$. Поэтому тут потребуются иной подход. Из (2.44), используя (2.47) и лемму 2, приходим к следующему неравенству для $\mathfrak{S}_2$:

$$\mathfrak{S}_2 \leq \sum_{k=1}^m \frac{4k(2 + \ln(m/k))}{(n+m+k-1)^2} + \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{4m(2 + \ln(k/m))}{(n+m+k-1)^2} = S_1 + S_2. \quad (2.52)$$

Применяя известное свойство логарифмов $\ln x < x - 1$ и делая замену переменных суммирования, для первой суммы S_1 сразу получим

$$S_1 \leq 4 \sum_{k=n+m}^{n+2m-1} \frac{k-n+1}{k^2}. \quad (2.53)$$

Для того чтобы оценить вторую сумму S_2 , перепишем ее в следующем виде:

$$S_2 = 4m \left[2 \sum_{k=n+2m}^{\infty} \frac{1}{k^2} + \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{\ln(k/m)}{(n+m+k-1)^2} \right].$$

Так как $n+m-1 \geq 0$ и $m \geq 1$, то, применяя лемму 3, для второй суммы можно написать следующее:

$$\sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{\ln(k/m)}{(n+m+k-1)^2} \leq \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{\ln(k/m)}{k^2} \leq \frac{1+1/e}{m},$$

Таким образом, для S_2 получим

$$S_2 \leq 8m \sum_{k=n+2m}^{\infty} \frac{1}{k^2} + 4 \left(1 + \frac{1}{e} \right). \quad (2.54)$$

Подстановка (2.53) и (2.54) в (2.52) приведет нас к следующей цепочке неравенств:

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}_2 &\leq 4 \sum_{k=n+m}^{n+2m-1} \frac{1}{k} - 4n \sum_{k=n+m}^{n+2m-1} \frac{1}{k^2} + 4 \sum_{k=n+m}^{n+2m-1} \frac{1}{k^2} + 8m \sum_{k=n+2m}^{\infty} \frac{1}{k^2} + 4 \left(1 + \frac{1}{e} \right) \\ &\leq 4 \sum_{k=n+m}^{n+2m-1} \frac{1}{k} + 8m \sum_{k=n+m}^{\infty} \frac{1}{k^2} + 4 \left(1 + \frac{1}{e} \right) \leq 4 \frac{m}{n+m} + 8m \frac{2}{n+m} + 4 \left(1 + \frac{1}{e} \right) \\ &\leq 24 + \frac{4}{e}. \end{aligned}$$

Отметим, что в предпоследнем неравенстве для оценки второго ряда мы воспользовались формулой (2.50). Отсюда и из формулы (2.51) получаем требуемую оценку интеграла для случая $r = 1$:

$$J \leq 32 \sum_{l=n+1}^{n+m-1} \frac{1}{l} + 26 \leq 32 \left(\frac{1}{n+1} + \int_{n+1}^{n+m-1} \frac{dx}{x} \right) + 26 \leq 32 \ln \left(1 + \frac{m}{n+1} \right) + 58.$$

3. Доказательство основной теоремы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Остаток сумм Валле Пуссена $\mathfrak{R}_m^n(f, x)$ имеет следующий вид:

$$\mathfrak{R}_m^n(f, x) = f(x) - V_m^n(f, x) = \frac{1}{m} \sum_{j=n}^{n+m-1} \sum_{k=j+1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx, \quad (3.1)$$

где $a_k = (1/\pi) \int_0^{2\pi} f(t) \cos kt \, dt$, $b_k = (1/\pi) \int_0^{2\pi} f(t) \sin kt \, dt$.

Запишем коэффициенты a_k и b_k в виде сумм интегралов по интервалам, образованным разбиением A :

$$a_k = \sum_{i=1}^q \frac{1}{\pi} \int_{\theta_{i-1}}^{\theta_i} f(t) \cos kt \, dt = \sum_{i=1}^q a_{k,i}, \quad b_k = \sum_{i=1}^q \frac{1}{\pi} \int_{\theta_{i-1}}^{\theta_i} f(t) \sin kt \, dt = \sum_{i=1}^q b_{k,i}.$$

Подстановка полученных выражений в (3.1) приводит к формуле

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}_m^n(f, x) &= \frac{1}{m} \sum_{j=n}^{n+m-1} \sum_{k=j+1}^{\infty} \sum_{i=1}^q a_{k,i} \cos kx + b_{k,i} \sin kx \\ &= \sum_{i=1}^q \left[\frac{1}{m} \sum_{j=n}^{n+m-1} \sum_{k=j+1}^{\infty} a_{k,i} \cos kx + b_{k,i} \sin kx \right] = \sum_{i=1}^q \mathfrak{R}_{m,i}^n(f, x). \end{aligned} \quad (3.2)$$

Законность перестановки знаков суммирования будет следовать из дальнейшего, когда мы покажем сходимость рядов $\mathfrak{R}_{m,i}^n(f, x)$.

Зафиксируем индекс i и попытаемся оценить величину $\mathfrak{R}_{m,i}^n(f, x)$. С этой целью, дважды применяя интегрирование по частям, преобразуем коэффициенты $a_{k,i}$ и $b_{k,i}$ к виду

$$\begin{aligned} a_{k,i} &= \frac{1}{\pi} \left(\frac{f(\theta_i - 0) \sin k\theta_i - f(\theta_{i-1} + 0) \sin k\theta_{i-1}}{k} \right. \\ &\quad \left. + \frac{f'(\theta_i - 0) \cos k\theta_i - f'(\theta_{i-1} + 0) \cos k\theta_{i-1}}{k^2} - \int_{\theta_{i-1}}^{\theta_i} f''(t) \frac{\cos kt}{k^2} dt \right), \\ b_{k,i} &= \frac{1}{\pi} \left(\frac{f(\theta_{i-1} + 0) \cos k\theta_{i-1} - f(\theta_i - 0) \cos k\theta_i}{k} \right. \\ &\quad \left. + \frac{f'(\theta_i - 0) \sin k\theta_i - f'(\theta_{i-1} + 0) \sin k\theta_{i-1}}{k^2} - \int_{\theta_{i-1}}^{\theta_i} f''(t) \frac{\sin kt}{k^2} dt \right). \end{aligned}$$

Используя вышеприведенное представление коэффициентов, для $\mathfrak{R}_{m,i}^n(f, x)$ получим

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}_{m,i}^n(f, x) &= \frac{1}{\pi m} \sum_{j=n}^{n+m-1} \sum_{k=j+1}^{\infty} \left(\frac{f(\theta_i - 0) \sin k(\theta_i - x)}{k} + \frac{f(\theta_{i-1} + 0) \sin k(x - \theta_{i-1})}{k} \right. \\ &\quad \left. + \frac{f'(\theta_i - 0) \cos k(\theta_i - x)}{k^2} - \frac{f'(\theta_{i-1} + 0) \cos k(x - \theta_{i-1})}{k^2} \right. \\ &\quad \left. - \int_{\theta_{i-1}}^{\theta_i} f''(t) \frac{\cos k(x - t)}{k^2} dt \right). \end{aligned}$$

Последнее равенство можно переписать еще и так:

$$\begin{aligned}\mathfrak{R}_{m,i}^n(f, x) = & \frac{1}{\pi} \left[f(\theta_i - 0) \mathfrak{R}_m^n \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin k(\theta_i - *)}{k}, x \right) \right. \\ & + f(\theta_{i-1} + 0) \mathfrak{R}_m^n \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin k(* - \theta_{i-1})}{k}, x \right) \\ & + f'(\theta_i - 0) \mathfrak{R}_m^n \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos k(\theta_i - *)}{k^2}, x \right) \\ & - f'(\theta_{i-1} + 0) \mathfrak{R}_m^n \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos k(* - \theta_{i-1})}{k^2}, x \right) \\ & \left. - \frac{1}{m} \sum_{j=n}^{n+m-1} \sum_{k=j+1}^{\infty} \int_{\theta_{i-1}}^{\theta_i} f''(t) \frac{\cos k(x-t)}{k^2} dt \right].\end{aligned}$$

С помощью утверждения 1 можно оценить первые четыре слагаемых. В результате придем к следующему неравенству:

$$|\mathfrak{R}_{m,i}^n(f, x)| \leq \frac{1}{\pi} \left[\frac{2M_f}{m(n+1)} \left(\frac{1}{\sin^2((x - \theta_i)/2)} + \frac{1}{\sin^2((x - \theta_{i-1})/2)} \right) + \sigma_i(m, n) \right], \quad (3.3)$$

где

$$\sigma_i(m, n) = \left| \frac{1}{m} \sum_{j=n}^{n+m-1} \sum_{k=j+1}^{\infty} \int_{\theta_{i-1}}^{\theta_i} f''(t) \frac{\cos k(x-t)}{k^2} dt \right|.$$

Осталось оценить величину $\sigma_i(m, n)$. Так как функции $u_k(t) = f''(t)(\cos k(x-t))/k^2$ интегрируемы и ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(t)$ сходится равномерно на $[0, 2\pi]$, то мы можем воспользоваться теоремой из [12; т. 6, с. 437] и внести знаки суммирования внутрь интеграла. Тогда, учитывая обозначение (2.21), можно записать следующее неравенство:

$$\sigma_i(m, n) = \left| \frac{1}{m} \int_{\theta_{i-1}}^{\theta_i} f''(t) \sum_{j=n}^{n+m-1} \sum_{k=j+1}^{\infty} \frac{\cos k(x-t)}{k^2} dt \right| \leq \frac{M_f}{m^2} \int_{\theta_{i-1}}^{\theta_i} |\mathcal{K}_{2,m}^n(x-t)| dt. \quad (3.4)$$

Из (3.3), (3.4) и утверждения 2 видно, что $|\mathfrak{R}_{m,i}^n(f, x)| < \infty$, чем обеспечивается законность перестановки сумм в (3.2). С другой стороны, формулы (3.2), (3.3) и (3.4) с помощью утверждения 2 позволяют получить требуемую оценку:

$$\begin{aligned}|\mathfrak{R}_m^n(f, x)| & \leq \sum_{i=1}^q |\mathfrak{R}_{m,i}^n(f, x)| \\ & \leq \frac{4M_f}{\pi m(n+1)} \sum_{i=1}^q \frac{1}{\sin^2((x - \theta_i)/2)} + \frac{M_f}{\pi m^2} \int_0^{2\pi} |\mathcal{K}_{2,m}^n(x-t)| dt \\ & \leq \frac{M_f}{\pi} \left(\sum_{i=1}^q \frac{4}{\sin^2((x - \theta_i)/2)} + c \right) \frac{1}{m(n+1)},\end{aligned}$$

где $c = c(2)$ – константа из утверждения 2.

4. Точность оценки, полученной в основной теореме. Как и в предыдущем пункте, остаток сумм Валле Пуссена функции $f(x)$ будем обозначать символом

$$\mathfrak{R}_m^n(f, x) = f(x) - V_m^n(f, x) = \frac{1}{m} \sum_{l=n}^{n+m-1} R_l(f, x),$$

где

$$R_l(f, x) = \sum_{k=l+1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx$$

– остаток ряда Фурье. Кроме того, мы будем обозначать символами $c_k, c_k(n), \dots$ положительные константы, зависящие лишь от параметров в скобках и разные в разных местах.

Для доказательства точности полученной в теореме 2 оценки достаточно привести пример функции $f(x) \in W_{\infty}^{2,A}$, для которой $|\mathfrak{R}_m^n(f, x)| \geq 1/(mn)$ в некоторой точке $x \in [0, 2\pi] \setminus \bigcup_{i=0}^q \theta_i$. Рассмотрим функцию

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi - x}{2}, & x \in (0, 2\pi), \\ 0, & x = 0 \text{ или } x = 2\pi. \end{cases}$$

Данная функция имеет разрывы в точках $x = 2\pi k$ и входит в класс $W_{\infty}^{2,A}$, $A = \{0, 2\pi\}$. Ряд Фурье этой функции имеет вид

$$V_1^n(f, x) = S_n(f, x) = \sum_{k=1}^n \frac{\sin kx}{k}.$$

Рассмотрим остаток этого ряда в точке $x = \pi/2$:

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\sin(k\pi/2)}{k}.$$

Поскольку

$$\sin k\frac{\pi}{2} = \begin{cases} (-1)^l, & k = 2l + 1, \\ 0, & k = 2l, \end{cases}$$

то

$$R_{2q-1} = R_{2q} = \sum_{l=q}^{\infty} \frac{(-1)^l}{2l+1}.$$

Обозначим $r_q = R_{2q}$ и оценим r_q . Для этого, полагая сначала $q = 2t$, перепишем ряд следующим образом:

$$r_{2t} = \sum_{l=t}^{\infty} \left(\frac{1}{4l+1} - \frac{1}{4l+3} \right) = \sum_{l=t}^{\infty} A_l.$$

Легко видеть, что $c_1/l^2 \leq A_l \leq c_2/l^2$ для достаточно больших l . Например, первое неравенство получается так:

$$A_l = \frac{2}{(4l+1)(4l+3)} \geq \frac{2}{(4l+3)^2} \geq \frac{c_1}{l^2}.$$

Но тогда, используя оценку из [12; с. 284], мы тут же получаем, что $c_1/t \leq r_{2t} \leq c_2/t$ для больших t . Аналогично можно показать и справедливость следующих неравенств:

$$\frac{c_1}{t} \leq -r_{2t+1} \leq \frac{c_2}{t}. \quad (4.1)$$

Таким образом, $c_1/q \leq |r_q| \leq c_2/q$, откуда следует, что

$$\frac{c_1}{n} \leq |R_n| \leq \frac{c_2}{n},$$

и точность полученной в теореме 2 оценки доказана для случая $m = 1$.

Перейдем теперь к случаю $m = n$. Введем обозначение $\mathfrak{R}_n = \mathfrak{R}_n^n$. Рассмотрим подпоследовательность последовательности $\mathfrak{R}_n$ с номерами $n = 4p + 1$, $p = 1, 2, \dots$:

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}_{4p+1} &= \frac{1}{4p+1} \sum_{l=4p+1}^{8p+1} R_l = \frac{1}{4p+1} \left(\sum_{l=2p+1}^{4p} (R_{2l-1} + R_{2l}) + R_{8p+1} \right) \\ &= \frac{1}{4p+1} \left(2 \sum_{l=2p+1}^{4p} r_l + r_{4p+1} \right) = \frac{1}{4p+1} \left(2 \sum_{l=p}^{2p-1} (r_{2l+1} + r_{2l+2}) + r_{4p+1} \right). \end{aligned}$$

Покажем, что $r_{2l+1} + r_{2l+2} \leq -c/l^2$ для достаточно больших l . В самом деле,

$$\begin{aligned} r_{2l+1} + r_{2l+2} &= \sum_{k=2l+1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} + \sum_{k=2l+2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} \\ &= -\sum_{k=l}^{\infty} \left(\frac{1}{4k+3} - \frac{1}{4k+5} \right) + \sum_{k=l}^{\infty} \left(\frac{1}{4k+5} - \frac{1}{4k+7} \right) \\ &= -\sum_{k=l}^{\infty} \frac{8}{(4k+3)(4k+5)(4k+7)} \leq -c_1 \sum_{k=l}^{\infty} \frac{1}{k^3} \leq -\frac{c}{l^2}. \end{aligned}$$

Заметим также, что $r_{4p+1} \leq -c/p$ (см. (4.1)) для достаточно больших p . Следовательно,

$$\mathfrak{R}_{4p+1} \leq -\frac{c}{4p+1} \left(\sum_{l=p}^{2p-1} \frac{1}{l^2} + \frac{1}{p} \right). \quad (4.2)$$

С помощью интеграла легко можно оценить снизу сумму в (4.2):

$$\sum_{l=p}^{2p-1} \frac{1}{l^2} \geq \int_p^{2p} \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{2p}.$$

Таким образом, получаем

$$|\mathfrak{R}_{4p+1}| \geq \frac{c}{p(4p+1)} \geq \frac{c}{(4p+1)^2},$$

что доказывает точность оценки в теореме 2 для случая $m = n$. Случай произвольных m и n рассматривается аналогично.

Автор выражает благодарность И. И. Шарапудинову за постановку задачи и ценные указания при ее решении.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] С. М. Никольский, “О некоторых методах приближения тригонометрическими суммами”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **4**:6 (1940), 509–520.
- [2] С. А. Теляковский, “Приближение дифференцируемых функций суммами Валле Пуссена”, *Докл. АН СССР*, **121** (1958), 426–429.
- [3] А. В. Ефимов, “О приближении периодических функций суммами Валле-Пуссена”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **23**:5 (1959), 737–770.
- [4] А. В. Ефимов, “О приближении периодических функций суммами Валле Пуссена. II”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **24**:3 (1960), 431–468.
- [5] А. А. Захаров, “Об оценке уклонения непрерывных периодических функций от сумм Валле Пуссена”, *Матем. заметки*, **3**:1 (1968), 77–84.
- [6] Ie. Yu. Ovsii, A. S. Serdyuk, *Approximation of Continuous Periodic Functions by de la Vallee Poussin Sums*, arXiv: 1211.5424.
- [7] С. П. Байбородов, “Приближение функций суммами Валле Пуссена”, *Матем. заметки*, **27**:1 (1980), 33–48.
- [8] И. И. Шарапудинов, “Аппроксимативные свойства средних Валле Пуссена на классах типа Соболева с переменным показателем”, *Вестн. Дагестанск. научн. центра РАН*, **45** (2012), 5–13.
- [9] И. И. Шарапудинов, “Приближение гладких функций в $L_{2\pi}^{p(x)}$ средними Валле-Пуссена”, *Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика*, **13**:1 (1) (2013), 45–49.
- [10] М. Г. Магомед-Касумов, “Аппроксимативные свойства классических средних Валле-Пуссена для кусочно гладких функций”, *Вестн. Дагестанск. научн. центра РАН*, **54** (2014), 5–12.
- [11] А. Зигмунд, *Тригонометрические ряды*, Мир, М., 1965.
- [12] Г. М. Фихтенгольц, *Курс дифференциального и интегрального исчисления*, Т. 2, Физматлит, М., 2001.

М. Г. Магомед-Касумов

Дагестанский научный центр

Российской академии наук, г. Махачкала;

Владикавказский научный центр

Российской академии наук

E-mail: rasuldev@gmail.com

Поступило

14.10.2014

Исправленный вариант

15.12.2015