Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. Н. Иванов, Степени неприводимых характеров и размерности адамаровых алгебр, *Матем. заметки*, 2015, том 98, выпуск 2, 230–236

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10593>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.157.27.8

26 апреля 2023 г., 15:30:18

Степени неприводимых характеров и размерности адамаровых алгебр

Д. Н. Иванов

Понятие адамарова разложения полупростой ассоциативной конечномерной комплексной алгебры обобщает понятие классической матрицы Адамара, отвечающей случаю коммутативных алгебр. Алгебры, допускающие адамаровы разложения, называются адамаровыми. Исследуется гипотеза, утверждающая, что если адамарова алгебра, которая не является простой, имеет неприводимый характер степени $m \geq 2$, то ее размерность не меньше $2m^2$. Справедливость гипотезы подтверждается для двух первых значений $m = 2$ и $m = 4$ (здесь m должно быть четно). Кроме того, доказывается более слабый, чем гипотеза, результат, в котором вместо $2m^2$ фигурирует $m^2 + 2m$.

Библиография: 8 названий.

DOI: 10.4213/mzm10593

1. Введение. Матрицей Адамара порядка n называется квадратная $(n \times n)$ -матрица с коэффициентами ± 1 , строки которой попарно ортогональны. Несложно показать, что при $n > 2$ порядок матрицы Адамара делится на 4. Хорошо известная гипотеза утверждает, что для любого натурального n кратного 4 существует матрица Адамара порядка n [1]. В [2] матрица Адамара порядка n интерпретируется как ортогональное разложение коммутативной полупростой алгебры размерности n в сумму двумерных подалгебр. Такие разложения, как и алгебры их допускающие, называются адамаровыми. Как показано в [2], [3] понятия коммутативной адамаровой алгебры и матрицы Адамара эквивалентны. Работа продолжает исследование структуры адамаровых алгебр, проведенное в статьях [2]–[7]. Среди последних результатов отметим классификацию адамаровых алгебр (в предположении справедливости гипотезы о матрицах Адамара), представимых в виде прямой суммы $k \geq 0$ матричных алгебр порядка 2 и $l > 0$ матричных алгебр порядка 1 [6]. В данной работе исследуется гипотеза, утверждающая, что если адамарова алгебра, которая не является простой, имеет неприводимый характер степени $m \geq 2$, то ее размерность не меньше $2m^2$. Справедливость гипотезы подтверждается для двух первых значений $m = 2$ и $m = 4$ (здесь m должно быть четно). Кроме того, доказывается более слабый, чем гипотеза, результат, в котором вместо $2m^2$ фигурирует $m^2 + 2m$.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 13-01-00234а).

2. Определения и обозначения, вспомогательные результаты. Напомним основные определения. Термин “алгебра” будет обозначать ассоциативную конечномерную над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$ полупростую алгебру. Как известно, в силу теоремы Веддербарна–Молина такая алгебра изоморфна прямой сумме матричных алгебр. Через Tr_A будем обозначать след регулярного представления алгебры $\mathbf{A}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Семейство $\mathcal{D} = \{B_i, i = 1, \dots, r\}$ неединичных собственных подалгебр алгебры $\mathbf{A}$ образует ее *ортогональное разложение* (ОР), если все подалгебры B_i полупросты, содержат единичный элемент $\mathbf{1}_A$ алгебры $\mathbf{A}$ и выполняется условие ортогональности: алгебра $\mathbf{A}$ является прямой суммой попарно ортогональных относительно формы следа $\text{Tr}_A xy$ подпространств:

$$\mathbf{A} = \langle \mathbf{1}_A \rangle \oplus B_1^\circ \oplus \dots \oplus B_r^\circ, \quad \text{где } B_i^\circ = \{x \in B_i \mid \text{Tr}_A x = 0\}.$$

Через $M_n(\mathbb{C}) = M_n$ будем обозначать алгебру матриц n -го порядка, $k\mathbf{B}$ – прямая сумма k экземпляров алгебры $\mathbf{B}$, tr – след матрицы, E_n – единичная матрица порядка n . Матрицы 1-го порядка будем, как правило, отождествлять с комплексными числами. Пусть $\mathbf{A} = M_{n_1} \oplus \dots \oplus M_{n_k}$, $X = (X_1, \dots, X_k) \in \mathbf{A}$, $\chi_i(X) = \text{tr } X_i$ – неприводимый характер, $\deg \chi_i = \chi_i(\mathbf{1}_A) = n_i$ – степень характера, $i = 1, \dots, k$. Неприводимый характер степени 1 называется *линейным*. Очевидно, линейный характер является гомоморфизмом алгебр. Положим $\text{Irr } \mathbf{A} = \{\chi_i, i = 1, \dots, k\}$ – множество всех неприводимых характеров алгебры $\mathbf{A}$. Имеем

$$\text{Tr}_A = \sum_{\chi \in \text{Irr } \mathbf{A}} \deg \chi \cdot \chi, \quad \dim \mathbf{A} = \sum_{\chi \in \text{Irr } \mathbf{A}} (\deg \chi)^2.$$

Если все подалгебры в $\mathcal{D}$ изоморфны алгебре $\mathbf{B}$, то $\mathcal{D}$ называется *однородным ОР типа $\mathbf{B}$* . Однородное ОР типа $2M_1$ называется *адамаровым разложением*. Алгебра, допускающая адамарово разложение, называется *адамаровой*.

Уместно отметить, что помимо матриц Адамара понятие ОР обобщает такие известные понятия как конечные аффинные плоскости, конечные расщепляемые группы, ортогональные разложения простых алгебр Ли типа $\mathcal{A}_n$ в сумму картановских подалгебр [8], [2]. Именно:

- (1) конечная аффинная плоскость порядка n соответствует однородному ОР типа nM_1 коммутативной алгебры n^2M_1 ;
- (2) если подгруппы $\{H_i\}$ расщепляют группу G , то подалгебры $\{CH_i\}$ образуют ОР групповой алгебры $\mathbb{C}G$;
- (3) ортогональное разложение простой алгебры Ли типа $\mathcal{A}_n$ в сумму картановских подалгебр соответствует однородному ОР типа $(n+1)M_1$ алгебры матриц M_{n+1} .

ЛЕММА 1 [2], [3]. (1) Алгебра $\mathbf{A}$ адамарова тогда и только тогда, когда в $\mathbf{A}$ существует базис из попарно ортогональных инволюций, содержащий единичный элемент алгебры $\mathbf{A}$.

(2) Пусть инволюции $A_1 = \mathbf{1}_A, A_2, \dots, A_n$ попарно ортогональны и образуют базис алгебры $\mathbf{A}$. Тогда для любого $X \in \mathbf{A}$

$$n \text{Tr}_A X^2 = \sum_{i=1}^n (\text{Tr}_A X A_i)^2. \quad (1)$$

ЛЕММА 2 [4]. Размерность адамаровой алгебры делится на 4.

ЛЕММА 3 [4]. Степени нелинейных неприводимых характеров адамаровой алгебры четны.

Следующая теорема представляет соотношения ортогональности для неприводимых характеров адамаровой алгебры.

ЛЕММА 4 [7]. Пусть инволюции $A_1 = \mathbf{1}_A, A_2, \dots, A_n$ попарно ортогональны и образуют базис алгебры $\mathbf{A}$. Тогда выполнены следующие утверждения:

(1) для всех $\chi \in \text{Irr } \mathbf{A}$

$$\dim \mathbf{A} = n = \sum_{i=1}^n (\chi(A_i))^2;$$

(2) для всех $\chi, \lambda \in \text{Irr } \mathbf{A}, \chi \neq \lambda,$

$$\sum_{i=1}^n \chi(A_i) \cdot \lambda(A_i) = 0.$$

Нам понадобится также следующее усиление пункта (2) леммы 4.

ЛЕММА 5. Пусть $\mathbf{A} = M_{n_1} \oplus \dots \oplus M_{n_k}$ – адамарова алгебра, $n = \dim \mathbf{A}$ и инволюции $A_i = (A_{i1}, \dots, A_{ik}), i = 1, \dots, n$, попарно ортогональны и образуют базис алгебры $\mathbf{A}$. Пусть $\lambda_i: M_{n_i} \rightarrow \mathbb{C}, \lambda_j: M_{n_j} \rightarrow \mathbb{C}$ – линейные функции, $i \neq j$. Тогда

$$\sum_{s=1}^n \lambda_i(A_{si}) \lambda_j(A_{sj}) = 0.$$

В частности,

$$\sum_{s=1}^n \lambda_i(A_{si}) A_{sj} = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $B_i \in M_{n_i}, B_j \in M_{n_j}$ такие, что

$$\lambda_i(Y) = \text{tr } B_i Y, \quad \lambda_j(Z) = \text{tr } B_j Z \quad \text{для всех } Y \in M_{n_i}, \quad Z \in M_{n_j}.$$

Положим $\mathcal{B}_l = (0, \dots, 0, B_l, 0, \dots, 0)$, где матрица B_l стоит на l -й позиции, $l = i, j$.

Подставим в (1) вместо X последовательно $\mathcal{B}_i, \mathcal{B}_j, \mathcal{B}_i + \mathcal{B}_j$, учитывая при этом, что

$$\text{Tr } \mathcal{B}_l^2 = n_l \text{tr } B_l^2, \quad \text{Tr } (\mathcal{B}_l A_s) = n_l \lambda_l(A_{sl}), \quad l = i, j.$$

Имеем

$$\begin{aligned} n \cdot n_i \text{tr } B_i^2 &= \sum_{s=1}^n n_i^2 (\lambda_i(A_{si}))^2, & n \cdot n_j \text{tr } B_j^2 &= \sum_{s=1}^n n_j^2 (\lambda_j(A_{sj}))^2, \\ n \cdot (n_i \text{tr } B_i^2 + n_j \text{tr } B_j^2) &= \sum_{s=1}^n (n_i \lambda_i(A_{si}) + n_j \lambda_j(A_{sj}))^2. \end{aligned}$$

Вычитая из третьего равенства первые два и деля на $2n_i n_j$, получим требуемое. Лемма доказана.

ЛЕММА 6 [6]. Если адамарова алгебра имеет линейный и нелинейный неприводимые характеры, то ее размерность делится на 8.

ЛЕММА 7 [7]. Если существует матрица Адамара порядка n , то прямая сумма n адамаровых алгебр одинаковой размерности является адамаровой алгеброй. В частности, прямая сумма двух адамаровых алгебр одинаковой размерности является адамаровой алгеброй.

ЛЕММА 8. Пусть $\mathbf{A}$ – не обязательно ассоциативная алгебра с единичным элементом $\mathbf{1}_A$ над полем характеристики отличной от 3. Тогда $\mathbf{1}_A$ не может быть представлен в виде суммы двух инволюций.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $a^2 = b^2 = \mathbf{1}_A$, $\mathbf{1}_A = a + b$. Домножим последнее равенство на a слева и на b справа: $a = \mathbf{1}_A + ab$, $b = ab + \mathbf{1}_A$. Отсюда следует, что $a = b$ и $2a = \mathbf{1}_A$. Но

$$(2a)^2 = 4a^2 = 4 \cdot \mathbf{1}_A \neq \mathbf{1}_A.$$

Противоречие доказывает лемму.

3. Основные результаты. Будем исследовать сформулированную во введении гипотезу.

ГИПОТЕЗА 1. Если адамарова алгебра $\mathbf{A}$ не является простой и допускает неприводимый характер степени $m \geq 2$, то $\dim \mathbf{A} \geq 2m^2$.

Отметим, что в силу леммы 3 степень m неприводимого нелинейного характера адамаровой алгебры должна быть четной. Согласно другой гипотезе автора [2] алгебра матриц четного порядка M_{2l} является адамаровой. Отсюда в силу леммы 7 следует, что алгебра $2M_{2l}$ также должна быть адамаровой. Это указывает на точность оценки размерности адамаровой алгебры по крайней мере в тех случаях, когда алгебра M_m адамарова. Последнее выполняется для $m = 2, 4$ и всех значений, при которых существует матрица Адамара порядка m [2]. Следующая теорема является ослабленным вариантом гипотезы 1 и, в частности, подтверждает ее в случае $m = 2$.

ТЕОРЕМА 1. Если адамарова алгебра $\mathbf{A}$ не является простой и допускает неприводимый характер степени m , то $\dim \mathbf{A} \geq m^2 + 2m$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть

$$\mathbf{A} = M_m \oplus M_{m_1} \oplus \cdots \oplus M_{m_k}, \quad \dim \mathbf{A} = n = m^2 + m_1^2 + \cdots + m_k^2.$$

Пусть $\text{Irr}(\mathbf{A}) = \{\chi, \chi_1, \dots, \chi_k\}$ – неприводимые характеры алгебры $\mathbf{A}$ такие, что

$$\chi(X) = \text{tr } X_0, \quad \chi_1(X) = \text{tr } X_1, \quad \dots, \quad \chi_k(X) = \text{tr } X_k$$

для $X = (X_0, X_1, \dots, X_k) \in \mathbf{A}$. Таким образом, $\deg \chi = m$, $\deg \chi_i = m_i$, $i = 1, \dots, k$. Пусть инволюции $A_1 = \mathbf{1}_A$, $A_2, \dots, A_n$ попарно ортогональны и образуют базис алгебры $\mathbf{A}$. Так как алгебра $\mathbf{A}$ не является простой, то $\dim \mathbf{A} > m^2$. В силу леммы 4 п. (1)

$$\dim \mathbf{A} = n = \sum_{i=1}^n (\chi(A_i))^2 = m^2 + \sum_{i=2}^n (\chi(A_i))^2 > m^2.$$

Отсюда следует, что существует $i > 1$, так что $\chi(A_i) \neq 0$. В силу леммы 3 $\deg \chi = m$ четно. Так как след инволютивной матрицы четного порядка m является четным

числом, то $|\chi(A_i)| \geq 2$. В силу ортогональности $A_1 = \mathbf{1}_A$ и A_i имеем

$$0 = m\chi(A_i) + \sum_{s=1}^k m_s \chi_s(A_i). \quad (2)$$

Так как след инволютивной матрицы не превосходит ее порядка, то $\chi_s(A_i) \leq m_s$. Из (2) получаем

$$2m \leq m|\chi(A_i)| \leq \sum_{s=1}^k m_s |\chi_s(A_i)| \leq \sum_{s=1}^k m_s^2.$$

Значит,

$$\dim \mathbf{A} = m^2 + m_1^2 + \dots + m_k^2 \geq m^2 + 2m.$$

Теорема доказана.

Перейдем теперь к подтверждению гипотезы 1 в случае $m = 4$.

ЛЕММА 9. *Алгебры $M_4 \oplus 8M_1$, $M_4 \oplus M_2 \oplus 4M_1$ и $M_4 \oplus 2M_2$ неадамаровы.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. *Случай 1.* Пусть алгебра $\mathbf{A} = M_4 \oplus 8M_1$ адамарова и допускает ортогональную систему инволюций $A_1 = \mathbf{1}_A, A_2, \dots, A_{24}$, где

$$A_i = (A_{i0}, a_{i1}, \dots, a_{i8}), \quad A_{i0} \in M_4, \quad a_{is} = \pm 1, \quad i = 1, \dots, 24, \quad s = 1, \dots, 8.$$

Пусть $\text{Irr } \mathbf{A} = \{\chi, \lambda_1, \dots, \lambda_8\}$ – неприводимые характеры такие, что $\chi(A_i) = \text{tr } A_{i0}$, $\lambda_s(A_i) = a_{is}$; при этом

$$\deg \chi = 4, \quad \deg \lambda_1 = \dots = \deg \lambda_8 = 1.$$

В силу леммы 4 п. (1) имеем

$$\sum_{i=1}^{24} \chi(A_i)^2 = 24.$$

Так как $\chi(A_1) = \text{tr}(E_4) = 4$ и так как след инволютивной матрицы четного порядка является четным числом, то существуют такие инволюции, скажем для определенности A_2 и A_3 , что $\chi(A_2) = \chi(A_3) = \pm 2$. При этом $\chi(A_i) = 0$ для $i > 3$. Заменяя в случае необходимости A_i на $-A_i$, $i = 2, 3$, можем считать без ограничения общности, что $\chi(A_2) = \chi(A_3) = -2$. Из ортогональности A_2, A_3 и $A_1 = \mathbf{1}_A = (E_4, 1, \dots, 1)$ следует, что

$$\lambda_s(A_2) = \lambda_s(A_3) = 1, \quad s = 1, \dots, 8.$$

А из ортогональности A_i , $i > 3$, и A_1 следует, что

$$\sum_{s=1}^8 \lambda_s(A_i) = 0 \quad \text{для всех } i > 3.$$

Рассмотрим сумму характеров $\xi = \lambda_1 + \dots + \lambda_8$. В силу вышесказанного имеем

$$\xi(A_1) = \xi(A_2) = \xi(A_3) = 8, \quad \xi(A_i) = 0 \quad \text{при } i > 3.$$

В силу леммы 5

$$0 = \sum_{s=1}^{24} \xi(A_s) A_{s0} = 8A_{10} + 8A_{20} + 8A_{30} = 8E_4 + 8A_{20} + 8A_{30}.$$

Значит, $E_4 = (-A_{20}) + (-A_{30})$ – представление единичного элемента алгебры матриц M_4 в виде суммы двух инволюций. Это невозможно в силу леммы 8.

Случай 2. Пусть алгебра $\mathbf{A} = M_4 \oplus M_2 \oplus 4M_1$ адамарова и допускает ортогональную систему инволюций $A_1 = \mathbf{1}_A, A_2, \dots, A_{24}$, где

$$A_i = (A_{i0}, A_{i1}, a_{i1} \dots, a_{i4}), \quad A_{i0} \in M_4, \quad A_{i1} \in M_2, \\ a_{is} = \pm 1, \quad i = 1, \dots, 24, \quad s = 1, \dots, 4.$$

Пусть $\text{Irr } \mathbf{A} = \{\chi, \phi, \lambda_1, \dots, \lambda_4\}$ – неприводимые характеры такие, что

$$\deg \chi = 4, \quad \deg \phi = 2, \quad \deg \lambda_1 = \dots = \deg \lambda_4 = 1.$$

В силу леммы 4 п. (1) имеем

$$\sum_{i=1}^{24} \chi(A_i)^2 = 24.$$

Также имеем $\chi(A_1) = \text{tr}(E_4) = 4$ и, как в случае 1, можем считать без ограничения общности, что $\chi(A_2) = \chi(A_3) = -2$. При этом $\chi(A_i) = 0$ для $i > 3$. Из ортогональности A_2, A_3 и $A_1 = \mathbf{1}_A = (E_4, E_2, 1, \dots, 1)$ следует, что

$$\phi(A_2) = \phi(A_3) = 2 \quad \text{и} \quad \lambda_s(A_2) = \lambda_s(A_3) = 1, \quad s = 1, \dots, 4.$$

А из ортогональности $A_i, i > 3$, и A_1 следует, что

$$2\phi(A_i) + \sum_{s=1}^4 \lambda_s(A_i) = 0 \quad \text{для всех} \quad i > 3.$$

Рассмотрим сумму характеров $\xi = 2\phi + \lambda_1 + \dots + \lambda_4$. В силу вышесказанного имеем

$$\xi(A_1) = \xi(A_2) = \xi(A_3) = 8, \quad \xi(A_i) = 0 \quad \text{при} \quad i > 3.$$

Далее получаем противоречие как в случае 1.

Случай 3 алгебры $M_4 \oplus 2M_2$ разбирается аналогично предыдущим. Лемма доказана.

ЛЕММА 10. *Алгебра $M_4 \oplus 3M_2$ неадамарова.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть алгебра $\mathbf{A} = M_4 \oplus 3M_2$ адамарова и допускает ортогональную систему инволюций $A_1 = \mathbf{1}_A, A_2, \dots, A_{28}$, где

$$A_i = (A_{i0}, A_{i1}, A_{i2}, A_{i3}), \quad A_{i0} \in M_4, \quad A_{is} \in M_2, \quad i = 1, \dots, 28, \quad s = 1, 2, 3.$$

Пусть $\text{Irr } \mathbf{A} = \{\chi, \phi_1, \phi_2, \phi_3\}$ – неприводимые характеры такие, что $\chi(A_i) = \text{tr } A_{i0}$, $\phi_s(A_i) = \text{tr } A_{is}$; при этом

$$\deg \chi = 4, \quad \deg \phi_s = 2, \quad s = 1, 2, 3.$$

В силу леммы 4 п. (1) имеем

$$\sum_{i=1}^{28} \chi(A_i)^2 = 28.$$

Так как $\chi(A_1) = \text{tr}(E_4) = 4$ и так как след инволютивной матрицы четного порядка является четным числом, то существуют такие инволюции, скажем для определен-

ности A_2 , A_3 и A_4 , что

$$\chi(A_2) = \chi(A_3) = \chi(A_4) = \pm 2.$$

При этом $\chi(A_i) = 0$ для $i > 4$. Заменяя в случае необходимости A_i на $-A_i$, $i = 2, 3, 4$, можем считать без ограничения общности, что $\chi(A_2) = \chi(A_3) = \chi(A_4) = 2$. Из ортогональности χ и ϕ_1 (лемма 4 п. (2)) следует, что

$$\sum_{i=1}^{28} \chi(A_i) \phi_1(A_i) = 8 + 2\phi_1(A_2) + 2\phi_1(A_3) + 2\phi_1(A_4) = 0.$$

Так как $\phi_1(A_i) = \text{tr } A_{i1} = 0, \pm 2$, то получаем, что значения ϕ_1 на каких-то двух инволюциях из множества A_2, A_3, A_4 равны -2 и на оставшейся инволюции равно 0 . Пусть для определенности $\phi_1(A_2) = \phi_1(A_3) = -2$, $\phi_1(A_4) = 0$. Так как A_{21} и A_{31} – инволютивные матрицы 2-го порядка со следом -2 , то $A_{21} = A_{31} = -E_2$. В силу леммы 5

$$\sum_{i=1}^{28} \chi(A_i) A_{i1} = 4E_2 + 2(-E_2) + 2(-E_2) + 2A_{41} = 0.$$

Противоречие, так как $A_{41} \neq 0$. Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 2. *Если адамарова алгебра $\mathbf{A}$ не является простой и допускает неприводимый характер степени 4, то $\dim \mathbf{A} \geq 32$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $\mathbf{A}$ не простая алгебра (т.е. не изоморфна матричной алгебре), то $\dim \mathbf{A} > 16$. В силу леммы 2 и теоремы 1 нам достаточно доказать, что не существует адамаровых алгебр размерности 24 или 28 и имеющих неприводимый характер степени 4. Все возможные алгебры размерности 24 рассмотрены в лемме 9. Остается рассмотреть алгебры размерности 28. Если такая алгебра допускает линейный характер, то она неадамарова в силу леммы 6. В противном случае алгебра изоморфна $M_4 \oplus 3M_2$, и она неадамарова в силу леммы 10. Теорема доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] М. Холл, *Комбинаторика*, Мир, М., 1970.
- [2] Д. Н. Иванов, “Ортогональные разложения ассоциативных алгебр и сбалансированные системы идемпотентов”, *Матем. сб.*, **189**:12 (1998), 83–102.
- [3] Д. Н. Иванов, “Однородные ортогональные разложения коммутативных алгебр и матрицы Адамара”, *Фундамент. и прикл. матем.*, **1**:4 (1995), 1107–1110.
- [4] Д. Н. Иванов, “Размерность адамаровой алгебры делится на 4”, *УМН*, **60**:2 (2005), 163–164.
- [5] Д. Н. Иванов, “Адамаровы алгебры с единственной некоммутативной простой компонентой”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 2011, № 5, 46–48.
- [6] Д. Н. Иванов, “Адамаровы алгебры”, *Матем. заметки*, **96**:2 (2014), 207–211.
- [7] Д. Н. Иванов, “Адамаровы разложения полупростых ассоциативных алгебр”, *УМН*, **58**:4 (2003), 147–148.
- [8] А. И. Кострикин, И. А. Кострикин, В. А. Уфнаровский, “Ортогональные разложения простых алгебр Ли (тип A_n)”, *Аналитическая теория чисел, математический анализ и их приложения*, Тр. МИАН СССР, **158**, 1981, 105–120.

Д. Н. Иванов

Тверской ИнноЦентр;

Тверской государственный университет

E-mail: dni@tvcom.ru

Поступило

10.11.2014