Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. И. Тимошенко, Два замечания о матрицах над групповыми кольцами, *Матем. заметки*, 2016, том 99, выпуск 1, 155–157

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10595>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.108.108

26 апреля 2023 г., 09:21:06

Два замечания о матрицах над групповыми кольцами

Е. И. Тимошенко

Хорошо известны примеры ассоциативных колец с единицей, в которых некоторые необратимые элементы имеют правые либо левые обратные. Для групповых колец ситуация иная. Пусть $\mathbb{C}$ – поле комплексных чисел, G – произвольная группа, $\mathbb{C}[G]$ – групповое кольцо группы G над полем $\mathbb{C}$. Капланский [1] доказал, что если некоторый элемент $\alpha \in \mathbb{C}[G]$ имеет левый обратный, то он обратим. Простое алгебраическое доказательство этой теоремы нашла Монтгомери [2]. Теорема Капланского справедлива, если поле $\mathbb{C}$ заменить любым полем характеристики ноль [3; с. 38]. Отметим, что для полей простой характеристики вопрос открыт.

Известно [1], [2], что каждая матрица порядка n с элементами из алгебры $\mathbb{C}[G]$, имеющая правую или левую обратную, обратима. Это свойство полезно при исследовании групп и их групповых колец. Таким образом, кольца матриц над групповыми кольцами обладают дополнительными “хорошими” свойствами по сравнению с кольцами матриц над произвольными ассоциативными кольцами. Возникает вопрос насколько широко верны подобные “хорошие” свойства. Например, совпадают ли для групповых колец понятия унимодулярных элементов, определенных с помощью левых и правых идеалов.

Напомним соответствующие определения. Пусть R – ассоциативное кольцо с единицей, n – положительное целое число, R^n – свободный левый R -модуль ранга n . Согласно определению из книги [4] элемент $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_n) \in R^n$ называется *унимодулярным*, если левый идеал, порожденный элементами $r_1, \dots, r_n$, совпадает с кольцом R . Другими словами

$$(r'_1, \dots, r'_n)(r_1, \dots, r_n)^T = 1$$

для некоторых $r'_i \in R$, $i = 1, \dots, n$. Обозначим так определенное множество унимодулярных (слева) элементов через $Um_l^n(R)$.

Естественно определить множество $Um_r^n(R)$ как множество тех элементов из R^n , для которых правый идеал кольца R , порожденный элементами r_i , $i = 1, \dots, n$, совпадает с R , т.е.

$$(r_1, \dots, r_n)(r''_1, \dots, r''_n)^T = 1$$

для некоторых $r''_i \in R$, $i = 1, \dots, n$. Именно так определены, например, унимодулярные элементы в обзоре [5] Артамонова и Бовди.

Возникает вопрос, совпадают ли множества $Um_l^n(R)$ и $Um_r^n(R)$, если в качестве R рассматривать групповые кольца $\mathbb{C}[G]$, например, над полем комплексных чисел. Из теоремы Капланского получаем $Um_l^n(\mathbb{C}[G]) = Um_r^n(\mathbb{C}[G])$ при $n = 1$. Это позволяет предположить утвердительный ответ при $n \geq 2$. Однако, как мы покажем, для широкого класса групповых колец $R = \mathbb{C}[G]$ равенство $Um_l^n(R) = Um_r^n(R)$ несправедливо при $n \geq 2$.

Группа G называется *unique-product group* (сокращенно *UP-группа*), если для любых двух непустых подмножеств X и Y из G существует элемент $g \in G$, имеющий единственную запись вида $g = xy$, $x \in X$, $y \in Y$.

UP-группами являются, например, все правоупорядоченные группы, а также локально индикабельные группы.

Если G является UP-группой, а P – поле характеристики ноль, то групповая алгебра $P[G]$ имеет только тривиальные единицы, т.е. элемент $h \in P[G]$ обратим тогда и только тогда, когда $h = \lambda g$ для некоторого $\lambda \in P \setminus \{0\}$, $g \in G$ (см., например, [3], [6]).

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 15-01-485), а также при финансовой поддержке Министерства образования и науки (государственное задание № 2014/138, проект 1052).

Будет указан еще один пример нарушения “хороших” свойств матрицы. А именно, попутно с доказательством несовпадения множеств $Um_l^n(R)$ и $Um_r^n(R)$, $n \geq 2$, для любого поля P , $\text{char} P \neq 2$, и любой неабелевой UP -группы G будет указана обратимая матрица M над алгеброй $R = P[G]$ такая, что транспонированная матрица M^T необратима.

ТЕОРЕМА 1. Пусть G – неабелева UP -группа и P – поле характеристики 0. Тогда найдется обратимая матрица M над алгеброй $P[G]$ такая, что транспонированная матрица M^T необратима.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть элементы g и h из G не перестановочны. Тогда элемент $1 + gh - hg$ необратим в кольце $P[G]$.

Рассмотрим матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & g \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ h & 1 \end{pmatrix}.$$

Их произведение

$$M = AB = \begin{pmatrix} 1 + gh & g \\ h & 1 \end{pmatrix}$$

является обратимой матрицей, так как обратимы A , B . Докажем, что транспонированная матрица M^T необратима. Пусть матрица

$$C = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

обратная к M^T . Имеем

$$\begin{pmatrix} 1 + gh & h \\ g & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = E.$$

Значит,

$$(1 + gh)a + hc = 1, \quad (1)$$

$$ga + c = 0. \quad (2)$$

Из (2) имеем

$$c = -ga.$$

Из (1) получим

$$(1 + gh)a + h(-ga) = 1.$$

Значит, элемент $1 + gh - hg$ обратим. Противоречие доказывает теорему.

ТЕОРЕМА 2. Пусть N – свободная 2-ступенно нильпотентная группа ранга 2 с базисом $\{x, y\}$, G – произвольная группа, для которой существует гомоморфизм на группу N , P – произвольное поле, характеристика которого не равна 2. Тогда при $n \geq 2$ множества элементов $Um_l^n(P[G])$ и $Um_r^n(P[G])$ различны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть g и h прообразы элементов x и y , соответственно, при указанном в теореме гомоморфизме. Рассмотрим матрицы A и B , определенные в теореме 1. Тогда

$$D = ABA = \begin{pmatrix} 1 + gh & 2g + ghg \\ h & 1 + hg \end{pmatrix}.$$

Матрица D обратима. Поэтому элемент $(1 + gh, 2g + ghg)$ принадлежит $Um_r^2(P[G])$. Предположим, что этот элемент принадлежит $Um_l^2(P[G])$. Тогда элемент $(1 + xy, 2x + xyx)$ принадлежит $Um_l^2(P[N])$. Значит, для некоторых $u_1, v_1 \in P[N]$ имеем

$$u_1(1 + xy) + v_1(2 + yx) = 1.$$

Пусть $yx = xus$. Элемент s порождает центр группы N . Получим

$$u_2(1 + xy) + v_2(2 - c) = 1$$

для некоторых $u_2, v_2 \in P[N]$. Элементы $\{xy, y\}$ образуют базис группы N . Поэтому

$$u(1+x) + v(2-c) = 1, \quad u, v \in P[N]. \quad (3)$$

Любой элемент $\gamma \in P[N]$ можно однозначно представить в виде

$$\gamma = \sum_i y^i g_i(x, c),$$

где i пробегает некоторое конечное множество целых значений, а $g_i(x, c)$ – многочлены Лорана от переменных x и c . Напомним, что многочлены Лорана содержат целые, в том числе и отрицательные, степени переменных x и c . Пусть

$$u = \sum_i y^i g_i(x, c), \quad v = \sum_j y^j f_j(x, c).$$

Тогда из (3) получаем

$$g_0(x, c)(1+x) + f_0(x, c)(2-c) = 1. \quad (4)$$

Применим к равенству (4) эндоморфизм кольца многочленов Лорана $P[x^{\pm 1}, c^{\pm 1}]$, при котором $f(x, c) \mapsto f(-1, c)$ для любого $f(x, c) \in P[x^{\pm 1}, c^{\pm 1}]$. Получим,

$$f_0(-1, c)(2-c) = 1.$$

Но элемент $2-c$ необратим в $P[N]$. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Автор благодарен рецензенту, который сообщил, что утверждение первой теоремы верно для Ω_2 -групп. Точнее, группа G называется Ω_2 -группой, если для любых двух конечных множеств $A, B \subset G$, каждое из которых состоит не менее чем из двух элементов, среди элементов ab ($a \in A, b \in B$), имеется хотя бы два элемента, не равные остальным элементам вида ab .

В [7] доказано предложение 2.4, из которого следует, что для произвольного поля P и произвольной Ω_2 -группы G групповая алгебра $P[G]$ имеет только тривиальные единицы. Поэтому утверждение теоремы 1 справедливо для произвольного поля и любой неабелевой Ω_2 -группы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] I. Kaplansky, *Fields and Rings*, The Univ. Chicago Press, Chicago, IL, 1969.
 [2] M. S. Montgomery, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **75**:3 (1969), 539–540. [3] C. Polcino Milies, S. K. Sehgal, *An Introduction to Group Rings*, Algebr. Appl., **1**, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2002. [4] X. Басс, *Алгебраическая K-теория*, Мир, М., 1973. [5] В. А. Артамонов, А. А. Бовди, *Итоги науки и техн. Сер. Алгебра. Топол. Геом.*, **27**, ВИНТИ, М., 1989, 3–43. [6] D. Passman, *The Algebraic Structure of Group Rings*, Pure Appl. Math., John Wiley & Sons, New-York, 1977. [7] А. Е. Залесский, А. В. Михалёв, *Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат.*, **2**, ВИНТИ, М., 1973, 5–118.

Е. И. Тимошенко
 Новосибирский государственный
 технический университет
 E-mail: eitim45@gmail.com

Поступило
 21.10.2014
 Исправленный вариант
 02.02.2015