Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Н. Царицанский, Задача о распространении волн в неоднородной среде с памятью, *Матем. заметки*, 2015, том 98, выпуск 3, 436–447

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10598>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.205.19.152

26 апреля 2023 г., 18:21:36

Задача о распространении волн в неоднородной среде с памятью

А. Н. Царицанский

Рассматривается некоторое волновое уравнение для среды с памятью. Для него строится классическое решение через классическое решение системы переноса с помощью формулы распространяющихся волн.

Библиография: 4 названия.

DOI: 10.4213/mzm10598

1. Постановка задачи в дискретном случае. Рассматривается один из вариантов волнового уравнения для среды с памятью [1]

$$u_{tt} = h^2 u_{xx} + \sum_{i=1}^n c_i \int_0^t \exp\{-\lambda_i(t-\tau)\} u_{xx}(\tau, x) d\tau, \quad n \geq 1, \quad (1.1)$$

полученного при рассмотрении усредненных моделей комбинированных сред и описывающего одномерный вариант закона Кельвина–Фойгхта вязкоупругих колебаний комбинированных сред. В этом уравнении необходимо по известным постоянным коэффициентам c_i и показателям λ_i определить среднее смещение материала $u(t, x)$. В данной работе для уравнения (1.1) делается попытка построить аналог формулы распространяющихся волн. Формула распространяющихся волн позволяет представить решение системы дифференциальных уравнений явным образом через общее решение системы первого порядка, в которой каждое уравнение является уравнением переноса вдоль соответствующей характеристики.

Например, для волнового уравнения в неоднородной среде $k(s)u_{tt} = (k(s)u_s)_s$ в [2] было получено представление

$$u(t, s) = k^{-1/2}(s)f^-(t, s) + k^{-1/2}(s)f^+(t, s), \quad (1.2)$$

в котором правая и левая волны $f^-(t, s)$ и $f^+(t, s)$ являются общим решением системы линейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка

$$\begin{aligned} f_t^-(t, s) + f_s^-(t, s) &= \psi(s)f^+(t, s), \\ f_t^+(t, s) - f_s^+(t, s) &= -\psi(s)f^-(t, s), \end{aligned} \quad (1.3)$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 12-01-00155).

где $\psi(s) = k'(s)/(2k(s))$. Кроме того, было установлено, что решение системы (1.3) имеет вид

$$\begin{aligned} f^-(t, s) &= \sqrt{k(s-t)}f^-(s-t) + \frac{1}{2} \int_{s-t}^{s+t} \sqrt{k(y)}f^-(y)J\left(\frac{s+y-t}{2}, \frac{s-y-t}{2}, s\right) dy \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{s-t}^{s+t} \sqrt{k(y)}f^+(y)\tilde{J}\left(\frac{s+y-t}{2}, \frac{s-y-t}{2}, s\right) dy, \\ f^+(t, s) &= \sqrt{k(s+t)}f^+(s+t) - \frac{1}{2} \int_{s-t}^{s+t} \sqrt{k(y)}f^+(y)J\left(\frac{s+y+t}{2}, \frac{s-y+t}{2}, s\right) dy \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_{s-t}^{s+t} \sqrt{k(y)}f^-(y)\tilde{J}\left(\frac{s+y+t}{2}, \frac{s-y+t}{2}, s\right) dy, \end{aligned}$$

в котором $f^-(s)$, $f^+(s)$ – произвольные дважды непрерывно дифференцируемые функции, связанные с начальными условиями $u_0(s) = u(0, s)$, $u_1(s) = u_t(0, s)$ соотношениями

$$f^-(s) + f^+(s) = u_0(s), \quad -[k(s)f^-(s)]' + [k(s)f^+(s)]' = k(s)u_1(s).$$

Через $J(\alpha, \beta, \gamma)$ и $\tilde{J}(\alpha, \beta, \gamma)$ обозначены функции, которые являются решением системы интегральных уравнений

$$\begin{aligned} J(\alpha, \beta, \gamma) &= - \int_{\alpha}^{\gamma} \phi(\sigma - \beta)\tilde{J}(\sigma, \beta, \gamma) d\sigma, \\ \tilde{J}(\alpha, \beta, \gamma) &= \phi(\alpha) + \int_{\beta}^0 \phi(\alpha - \tau)J(\alpha, \tau, \gamma) d\tau. \end{aligned}$$

Представление, аналогичное (1.2), (1.3), было получено в [3], [4] для уравнения

$$\begin{aligned} \rho_s(z)u_{tt} &= (\mu(z)u_z)_z - \chi(z)\rho_l^2(z)u_t + \chi^2(z)\rho_l^3(z)u \\ &\quad - \chi^3(z)\rho_l^4(z) \int_0^t \exp(-\chi(z)\rho_l(z)(t-\tau))u(\tau, z) d\tau, \end{aligned}$$

классическое решение которого было найдено в виде

$$\begin{aligned} u(t, s) &= k^{-1/2}(s)f^-(t, s) + k^{-1/2}(s)f^+(t, s), \\ v(t, s) &= k^{-1/2}(s)f^0(t, s), \end{aligned} \tag{1.4}$$

где

$$v(t, z) = \chi(z)\rho_l(z) \int_0^t \exp(-\chi(z)\rho_l(z)(t-\tau))u(\tau, z) d\tau,$$

а $f^\alpha(t, s)$ ($\alpha \in \{+, -, 0\}$) являются классическим решением системы линейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка

$$\begin{aligned} f_t^-(t, s) + f_s^-(t, s) &= \phi(s)f^-(t, s) + (\phi(s) + \psi(s))f^+(t, s) - \phi(s)f^0(t, s), \\ f_t^+(t, s) - f_s^+(t, s) &= (\phi(s) - \psi(s))f^-(t, s) + \phi(s)f^+(t, s) - \phi(s)f^0(t, s), \\ f_t^0(t, s) &= \varkappa(s)f^-(t, s) + \varkappa(s)f^+(t, s) - \varkappa(s)f^0(t, s) \end{aligned}$$

и удовлетворяют некоторому дополнительному условию.

Для получения формулы распространяющихся волн уравнения (1.1) преобразуем его для простоты к дифференциальной форме. Для этого обозначим

$$v^{\{i\}}(t, x) = h^2 \int_0^t \exp\{-\lambda_i(t - \tau)\} u_{xx}(\tau, x) d\tau, \quad i = 1, \dots, n,$$

после чего (1.1) оказывается эквивалентно системе

$$u_{tt} = u_{ss} + \sum_{i=1}^n \delta_i v^{\{i\}}, \quad u_{ss} = v_t^{\{i\}} + \lambda_i v^{\{i\}}, \quad i = 1, \dots, n \quad (1.5)$$

в предположении $v^{\{i\}}(0, s) = 0$ и обозначениях $\delta_i = c_i/h^2$, $i = 1, \dots, n$.

2. Основные результаты в дискретном случае. Оказывается, что представление решения системы (1.5) несколько отличается от (1.2) и (1.4), что продемонстрирует следующий результат, для формулировки которого введем обозначения: $\delta = \sum_{i=1}^n \delta_i$ и $S = \sum_{i=1}^n (\delta_i/\lambda_i)$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $S \neq -1$. Тогда если функции $f^\alpha(t, s)$ ($\alpha \in \{+, -, 1, \dots, n\}$) являются классическим решением системы дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} f_t^-(t, s) + f_s^-(t, s) &= \frac{\delta}{2} f^-(t, s) + \frac{\delta}{2} f^+(t, s) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \delta_i f^{\{i\}}(t, s), \\ f_t^+(t, s) - f_s^+(t, s) &= \frac{\delta}{2} f^-(t, s) + \frac{\delta}{2} f^+(t, s) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \delta_i f^{\{i\}}(t, s), \\ f_t^{\{i\}}(t, s) &= (\lambda_i + \delta) f^-(t, s) + (\lambda_i + \delta) f^+(t, s) - \lambda_i f^{\{i\}}(t, s) - \sum_{j=1}^n \delta_j f^{\{j\}}(t, s), \\ &\quad i = 1, \dots, n, \end{aligned} \quad (2.1)$$

удовлетворяющим дополнительному условию

$$\begin{cases} f^-(t, s) + f^+(t, s) \in C^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}), \\ \lambda_i f^{\{i\}}(t, s) - f_s^-(t, s) + f_s^+(t, s) \in C^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}), \end{cases} \quad i = 1, \dots, n, \quad (2.2)$$

то функции

$$\begin{aligned} u(t, s) &= f^-(t, s) + f^+(t, s), \\ v^{\{i\}}(t, s) &= -\lambda_i f^-(t, s) - \lambda_i f^+(t, s) + \lambda_i f^{\{i\}}(t, s) - f_s^-(t, s) + f_s^+(t, s), \quad i = 1, \dots, n, \end{aligned} \quad (2.3)$$

являются классическим решением (1.5). Обратно: если функции $u(t, s)$, $v^{\{i\}}(t, s)$, $i = 1, \dots, n$ являются классическим решением (1.5), то функции

$$\begin{aligned} f^-(t, s) &= \frac{1}{2} u(t, s) - \frac{1}{2(1+S)} \int_0^s (u_t(t, x) + V(t, x)) dx - \frac{1}{2} \int_0^t u_s(\tau, 0) d\tau - C, \\ f^+(t, s) &= \frac{1}{2} u(t, s) + \frac{1}{2(1+S)} \int_0^s (u_t(t, x) + V(t, x)) dx + \frac{1}{2} \int_0^t u_s(\tau, 0) d\tau + C, \\ f^{\{i\}}(t, s) &= \frac{1}{\lambda_i} v^{\{i\}}(t, s) + u(t, s) - \frac{u_t(t, s) + V(t, s)}{\lambda_i(1+S)}, \quad i = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (2.4)$$

с произвольной константой C и введенной функцией $V(t, s) = \sum_{i=1}^n (\delta_i / \lambda_i) v^{\{i\}}(t, s)$ являются классическим решением (2.1) и удовлетворяют дополнительному условию (2.2).

В случае же $S = -1$ взаимно однозначное соответствие между начальными условиями систем (1.5) и (2.1) теряется. Однако, после вычитания из первого уравнения системы (1.5) последующих уравнений системы, предварительно умноженных на δ_i / λ_i , получаем уравнение

$$u_{tt} = - \sum_{i=1}^n \frac{\delta_i}{\lambda_i} v_t^{\{i\}},$$

которое можно явно проинтегрировать по времени. После этого при $n = 1$ удается решить систему (1.5), в которой функции $v^{\{i\}}(t, s)$, в отличие от (2.3), выражаются уже не через первые производные по пространственной переменной от функций $f^\alpha(t, s)$, а через вторые. Это наблюдение подводит нас к следующему результату.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $S = -1$. Тогда если функции $f^\alpha(t, s)$ ($\alpha \in \{+, -, 1, \dots, n\}$) являются классическим решением системы дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} f_t^-(t, s) + f_s^-(t, s) &= \frac{\delta}{2} f^-(t, s) + \frac{\delta}{2} f^+(t, s) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \delta_i (\lambda_i + \delta) f^{\{i\}}(t, s), \\ f_t^+(t, s) - f_s^+(t, s) &= \frac{\delta}{2} f^-(t, s) + \frac{\delta}{2} f^+(t, s) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \delta_i (\lambda_i + \delta) f^{\{i\}}(t, s), \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$f_t^{\{i\}}(t, s) = f^-(t, s) + f^+(t, s) - \lambda_i f^{\{i\}}(t, s) - \sum_{j=1}^n \delta_j f^{\{j\}}(t, s), \quad i = 1, \dots, n,$$

удовлетворяющим дополнительному условию

$$f^-(t, s) + f^+(t, s) \in C^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}), \quad f_{ss}^{\{i\}}(t, s) \in C^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}), \quad i = 1, \dots, n, \quad (2.6)$$

то функции

$$\begin{aligned} u(t, s) &= f^-(t, s) + f^+(t, s) - \sum_{i=1}^n \delta_i f^{\{i\}}(t, s), \\ v^{\{i\}}(t, s) &= f_{ss}^{\{i\}}(t, s), \quad i = 1, \dots, n, \end{aligned} \quad (2.7)$$

являются классическим решением (1.5). Обратно: если функции $u(t, s)$, $v^{\{i\}}(t, s)$, $i = 1, \dots, n$, являются классическим решением (1.5), то функции

$$\begin{aligned} f^-(t, s) &= \frac{1}{2} u(t, s) - \frac{1}{2} \int_0^s u_t(t, x) dx + \frac{1}{2} \int_0^s \int_0^y V(t, x) dx dy - \frac{1}{2} \int_0^t u_s(\tau, 0) d\tau \\ &\quad + \frac{s}{2} \sum_{i=1}^n \delta_i \int_0^t u_s(\tau, 0) e^{-\lambda_i(t-\tau)} d\tau + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \delta_i \int_0^t u(\tau, 0) e^{-\lambda_i(t-\tau)} d\tau \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \delta_i \int_0^t \int_0^\tau u_s(\theta, 0) e^{-\lambda_i(\tau-\theta)} d\theta d\tau + \frac{s}{2} \sum_{i=1}^n \delta_i C_i e^{-\lambda_i t} \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \delta_i \left(D_i + \frac{1}{\lambda_i} C_i \right) e^{-\lambda_i t} - E, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f^+(t, s) &= \frac{1}{2} u(t, s) + \frac{1}{2} \int_0^s u_t(t, x) dx + \frac{1}{2} \int_0^s \int_0^y V(t, x) dx dy + \frac{1}{2} \int_0^t u_s(\tau, 0) d\tau \\
&\quad + \frac{s}{2} \sum_{i=1}^n \delta_i \int_0^t u_s(\tau, 0) e^{-\lambda_i(t-\tau)} d\tau + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \delta_i \int_0^t u(\tau, 0) e^{-\lambda_i(t-\tau)} d\tau \\
&\quad + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \delta_i \int_0^t \int_0^\tau u_s(\theta, 0) e^{-\lambda_i(\tau-\theta)} d\theta d\tau + \frac{s}{2} \sum_{i=1}^n \delta_i C_i e^{-\lambda_i t} \\
&\quad + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \delta_i \left(D_i - \frac{1}{\lambda_i} C_i \right) e^{-\lambda_i t} + E, \\
f^{\{i\}}(t, s) &= \int_0^s \int_0^y v^{\{i\}}(t, x) dx dy + s \int_0^t u_s(\tau, 0) e^{-\lambda_i(t-\tau)} d\tau \\
&\quad + \int_0^t u(\tau, 0) e^{-\lambda_i(t-\tau)} d\tau + s C_i e^{-\lambda_i t} + D_i e^{-\lambda_i t}, \quad i = 1, \dots, n,
\end{aligned}$$

с произвольными константами $E, C_i, D_i, i = 1, \dots, n$, и введенной функцией

$$V(t, s) = \sum_{i=1}^n \delta_i v^{\{i\}}(t, s)$$

являются классическим решением (2.5) и удовлетворяют дополнительному условию (2.6).

Системы (2.1), (2.5) описывают перенос и перераспределение между собой $n + 2$ волн $f^\alpha(t, s)$ – одной “левой”, одной “правой” и n “прямых” (волн “памяти”).

Как мы видим, в отличие от (1.2) и (1.4), в (2.3), (2.7) присутствуют не только функции $f^\alpha(t, s)$, но и их производные по пространственной переменной (в (2.3) – первого порядка, а в (2.7) – второго).

3. Доказательство теоремы 1. Непосредственной подстановкой выражений (2.3) в (1.5) убеждаемся в том, что (2.3) с функциями $f^\alpha(t, s)$ ($\alpha \in \{+, -, 1, \dots, n\}$), являющимися классическим решением (2.1), при $S \neq -1$ удовлетворяет системе (1.5). Кроме того, если выполняются условия (2.2), то в соответствии с (2.3) $u(t, s), v(t, s) \in C^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$. Таким образом, функции (2.3) являются классическим решением (1.5), и первая часть теоремы доказана.

Покажем справедливость второго утверждения теоремы. Рассмотрим произвольное решение (1.5). Данное решение при каждом t однозначно определяет значения

$$u(t, s), \quad u_t(t, s), \quad v^{\{i\}}(t, s), \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.1)$$

Построим решение системы переноса (2.1) так, чтобы функции (2.3) удовлетворяли (3.1):

$$\begin{aligned}
f^-(t, s) + f^+(t, s) &= u(t, s), \\
f_t^-(t, s) + f_t^+(t, s) &= u_t(t, s),
\end{aligned}$$

$$-\lambda_i f^-(t, s) - \lambda_i f^+(t, s) + \lambda_i f^{\{i\}}(t, s) - f_s^-(t, s) + f_s^+(t, s) = v^{\{i\}}(t, s), \quad i = 1, \dots, n.$$

Входящие в эти условия функции $f^\alpha(t, s)$ ($\alpha \in \{+, -, 1, \dots, n\}$), удовлетворяющие (2.1), определяются однозначно (с точностью до аддитивной константы C) и имеют вид (2.4).

Непосредственная подстановка подтверждает, что определенные в (2.4) функции $f^\alpha(t, s)$ удовлетворяют системе (2.1). А ввиду того, что $u(t, s)$, $v^{\{i\}}(t, s)$, $i = 1, \dots, n$, являются классическим решением (1.5), согласно выражениям (2.4) дополнительное условие (2.2) выполняется, что и завершает доказательство теоремы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы 2 повторяет доказательство теоремы 1.

4. Вывод основных результатов в дискретном случае. Несмотря на то, что доказательство теоремы кажется довольно простым, главная сложность при получении результата заключается в нахождении уравнений (2.1), (2.3) и (2.5), (2.7). Для того, чтобы пояснить откуда и как появились данные соотношения, мы приведем их вывод.

Случай $n = 1$. Первоначально рассмотрим случай $n = 1$, в котором применение метода распространяющихся волн, опирающегося на представление функций $u(t, s)$ и $v(t, s)$ в виде комбинации трех волн, соответствующих характеристикам системы (1.5) ($s \pm t = \text{const}$, $s = \text{const}$), дает анзац

$$\begin{aligned} u(t, s) &= a^- f^-(t, s) + a^+ f^+(t, s) + a^1 f^1(t, s), \\ v(t, s) &= b^- f^-(t, s) + b^+ f^+(t, s) + b^1 f^1(t, s), \end{aligned} \quad (4.1)$$

где функции $f^-(t, s)$, $f^+(t, s)$, $f^1(t, s)$ (“левая”, “правая” и “прямая” волны) являются общим решением системы линейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка

$$\begin{aligned} f_t^-(t, s) + f_s^-(t, s) &= c^{--} f^-(t, s) + c^{-+} f^+(t, s) + c^{-1} f^1(t, s), \\ f_t^+(t, s) - f_s^+(t, s) &= c^{+-} f^-(t, s) + c^{++} f^+(t, s) + c^{+1} f^1(t, s), \\ f_t^1(t, s) &= c^{1-} f^-(t, s) + c^{1+} f^+(t, s) + c^{11} f^1(t, s). \end{aligned} \quad (4.2)$$

К сожалению, подстановка (4.1), в которой функции $f^\alpha(t, s)$ являются общим решением системы (4.2), в систему (1.5) дает только нулевое решение, поэтому мы модифицируем форму (4.1), представив $u(t, s)$ и $v(t, s)$ в виде

$$\begin{aligned} u(t, s) &= a^- f^-(t, s) + a^+ f^+(t, s) + a^1 f^1(t, s), \\ v(t, s) &= b^- f^-(t, s) + b^+ f^+(t, s) + b^1 f^1(t, s) + d^- f_s^-(t, s) + d^+ f_s^+(t, s) + d^1 f_s^1(t, s). \end{aligned} \quad (4.3)$$

Подставляя выражения из (4.3) в систему (1.5), используя равенства (4.2) и затем упрощая, получаем

$$\begin{aligned} &(a^-(c^{-+}c^{+-} + c^{-1}c^{1-} + c^{--2}) + a^+(c^{+1}c^{1-} + c^{++}c^{+-} + c^{--}c^{+-}) - \delta_1 b^-)f^- \\ &+ (a^-(c^{-1}c^{1+} + c^{--}c^{-+} + c^{++}c^{-+}) + a^+(c^{+-}c^{-+} + c^{+1}c^{1+} + c^{++2}) - \delta_1 b^+)f^+ \\ &+ (a^-(c^{-+}c^{+1} + c^{-1}c^{11} + c^{--}c^{-1}) + a^+(c^{+-}c^{-1} + c^{+1}c^{11} + c^{++}c^{+1}) - \delta_1 b^1)f^1 \\ &+ a^1(c^{1+}c^{+-} + c^{11}c^{1-} + c^{--}c^{1-})f^- + a^1(c^{1-}c^{-+} + c^{11}c^{1+} + c^{++}c^{1+})f^+ \\ &+ a^1(c^{1-}c^{-1} + c^{1+}c^{+1} + (c^{11})^2)f^1 \\ &= a^1 f_{ss}^1 + (\delta_1 d^- + 2a^- c^{--} + a^1 c^{1-})f_s^- \\ &+ (\delta_1 d^+ - 2a^+ c^{++} - a^1 c^{1+})f_s^+ + (\delta_1 d^1 + a^- c^{-1} - a^+ c^{+1})f_s^1, \end{aligned} \quad (4.4)$$

$$\begin{aligned}
& (a^- + d^-)f_{ss}^- + (b^- - \lambda_1 d^- - d^- c^{--} - d^+ c^{+-} - d^1 c^{1-})f_s^- \\
& + (a^+ - d^+)f_{ss}^+ + (-b^+ - \lambda_1 d^+ - d^- c^{-+} - d^+ c^{++} - d^1 c^{1+})f_s^+ \\
& + a^1 f_{ss}^1 + (-d^- c^{-1} - \lambda_1 d^1 - d^+ c^{+1} - d^1 c^{11})f_s^1 \\
& = (b^- c^{--} + b^+ c^{+-} + b^1 c^{1-} + \lambda_1 b^-)f^- + (b^- c^{-+} + b^+ c^{++} + b^1 c^{1+} + \lambda_1 b^+)f^+ \\
& + (b^- c^{-1} + b^+ c^{+1} + b^1 c^{11} + \lambda_1 b^1)f^1.
\end{aligned} \tag{4.5}$$

Рассмотрим систему (4.4), (4.5). Равенства, входящие в нее, должны выполняться тождественно для всех (t, s) и любых решений f^α ($\alpha \in \{+, -, 1\}$) системы (4.2). Для того, чтобы пользоваться этой произвольностью, получить уравнения на коэффициенты, зафиксируем на время произвольный момент времени t и произвольную точку пространства s . Тогда равенства (4.4), (4.5) превратятся в алгебраические, выполненные тождественно для всех f^α , f_s^α , f_t^α . Причем эти величины независимы между собой и могут принимать произвольные значения (для любого набора этих величин найдутся функции $f^\alpha(s)$, имеющие в зафиксированной нами точке эти значения и значения производных, а взяв ее в качестве начального условия системы (4.2) при выбранном нами t , мы получим решение (4.2), имеющее в (t, s) соответствующие значения функций $f^\alpha(t, s)$ и их производных), поэтому коэффициенты при этих величинах должны обращаться в 0. Исходя из этого, получаем следующие соотношения:

$$\begin{aligned}
A &= -F \cdot D, \\
C \cdot B &= -\lambda_1 \cdot B, \\
C^2 \cdot A &= \delta_1 \cdot B, \\
C \cdot D &= -\lambda_1 \cdot D + F \cdot B, \\
G \cdot D &= \delta_1 \cdot D,
\end{aligned} \tag{4.6}$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned}
A &:= \begin{pmatrix} a^- \\ a^+ \\ a^1 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} b^- \\ b^+ \\ b^1 \end{pmatrix}, \quad C := \begin{pmatrix} c^{--} & c^{+-} & c^{1-} \\ c^{-+} & c^{++} & c^{1+} \\ c^{-1} & c^{+1} & c^{11} \end{pmatrix}, \quad D := \begin{pmatrix} d^- \\ d^+ \\ d^1 \end{pmatrix}, \\
F &:= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad G := \begin{pmatrix} 2c^{--} & 0 & 0 \\ 0 & 2c^{++} & 0 \\ c^{-1} & c^{+1} & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{4.7}$$

Воспользуемся тем, что анзац (4.3), (4.2) в некотором смысле избыточен: одно и тоже решение (u, v) можно представить в виде (4.3), (4.2) разными способами. Очевидно, что при замене $\hat{s} = -s$ получится такое же представление (4.3), (4.2) только с другими коэффициентами $\hat{c}^{--} = c^{++}$, $\hat{c}^{-+} = c^{+-}$, $\hat{c}^{-1} = c^{+1}$, $\hat{c}^{1-} = c^{1+}$, $\hat{b}^- = b^+$, $\hat{d}^- = -d^+$, $\hat{d}^1 = -d^1$. Поэтому, не ограничивая общности, можно сразу задать как указанную симметрию в данных значениях, так и $d^1 = 0$.

Кроме того, замена $f^-(t, s) = p\hat{f}^-(t, s)$ также оставляет (4.3), (4.2) в таком виде, но с другими коэффициентами: c^{+-} , c^{1-} , a^- , b^- , d^- умножаются на p , а c^{-+} , c^{-1} делятся на p . Таким образом, целесообразно ограничиться предположением $d^- = -1$ (в силу того, что нас интересуют ненулевые решения). Аналогично можно зафиксировать c^{+1} . Нам будет удобно положить $c^{+1} = -\delta_1/2$.

Решая, с учетом вышесказанного, систему алгебраических уравнений (4.6) (с помощью программы Maple 18), получаем два представления. Первое представление имеет вид

$$\begin{aligned} u(t, s) &= f^-(t, s) + f^+(t, s), \\ v(t, s) &= -\lambda_1 f^-(t, s) - \lambda_1 f^+(t, s) + \lambda_1 f^1(t, s) - f_s^-(t, s) + f_s^+(t, s), \end{aligned} \quad (4.8)$$

где функции $f^-(t, s)$, $f^+(t, s)$, $f^1(t, s)$ являются общим решением системы линейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка

$$\begin{aligned} f_t^-(t, s) + f_s^-(t, s) &= \frac{\delta_1}{2} f^-(t, s) + \frac{\delta_1}{2} f^+(t, s) - \frac{\delta_1}{2} f^1(t, s), \\ f_t^+(t, s) - f_s^+(t, s) &= \frac{\delta_1}{2} f^-(t, s) + \frac{\delta_1}{2} f^+(t, s) - \frac{\delta_1}{2} f^1(t, s), \\ f_t^1(t, s) &= (\lambda_1 + \delta_1) f^-(t, s) + (\lambda_1 + \delta_1) f^+(t, s) - (\lambda_1 + \delta_1) f^1(t, s). \end{aligned} \quad (4.9)$$

Второе представление выглядит, на первый взгляд, более простым:

$$\begin{aligned} u(t, s) &= f^-(t, s) + f^+(t, s), \\ v(t, s) &= -f_s^-(t, s) + f_s^+(t, s), \end{aligned}$$

функции $f^-(t, s)$, $f^+(t, s)$, $f^1(t, s)$ являются общим решением системы линейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка

$$\begin{aligned} f_t^-(t, s) + f_s^-(t, s) &= \frac{\delta_1}{2} f^-(t, s) + \frac{2\lambda_1 + \delta_1}{2} f^+(t, s) - \frac{\delta_1}{2\lambda_1} f^1(t, s), \\ f_t^+(t, s) - f_s^+(t, s) &= \frac{2\lambda_1 + \delta_1}{2} f^-(t, s) + \frac{\delta_1}{2} f^+(t, s) - \frac{\delta_1}{2\lambda_1} f^1(t, s), \\ f_t^1(t, s) &= \lambda_1 \frac{(\lambda_1 + \delta_1)^2}{\delta_1} f^-(t, s) + \lambda_1 \frac{(\lambda_1 + \delta_1)^2}{\delta_1} f^+(t, s) - (\lambda_1 + \delta_1) f^1(t, s). \end{aligned}$$

Тем не менее, в дальнейшем оно оказывается не востребуемым, так как не подлежит обобщению при $n \geq 2$.

5. Случай $n = 2$. В случае $n = 2$ решение системы (1.5) ищется в виде, подобном (4.3), (4.2):

$$\begin{aligned} u(t, s) &= a^- f^-(t, s) + a^+ f^+(t, s) + a^1 f^{\{1\}}(t, s) + a^2 f^{\{2\}}(t, s), \\ v^{\{1\}}(t, s) &= b^{1-} f^-(t, s) + b^{1+} f^+(t, s) + b^{11} f^{\{1\}}(t, s) + b^{12} f^{\{2\}}(t, s) \\ &\quad + d^{1-} f_s^-(t, s) + d^{1+} f_s^+(t, s) + d^{11} f_s^{\{1\}}(t, s) + d^{12} f_s^{\{2\}}(t, s), \\ v^{\{2\}}(t, s) &= b^{2-} f^-(t, s) + b^{2+} f^+(t, s) + b^{21} f^{\{1\}}(t, s) + b^{22} f^{\{2\}}(t, s) \\ &\quad + d^{2-} f_s^-(t, s) + d^{2+} f_s^+(t, s) + d^{21} f_s^{\{1\}}(t, s) + d^{22} f_s^{\{2\}}(t, s), \end{aligned} \quad (5.1)$$

где функции $f^\alpha(t, s)$ ($\alpha \in \{+, -, 1, 2\}$) являются общим решением системы линейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка

$$\begin{aligned} f_t^-(t, s) + f_s^-(t, s) &= c^{-} f^-(t, s) + c^{-+} f^+(t, s) + c^{-1} f^{\{1\}}(t, s) + c^{-2} f^{\{2\}}(t, s), \\ f_t^+(t, s) - f_s^+(t, s) &= c^{+-} f^-(t, s) + c^{++} f^+(t, s) + c^{+1} f^{\{1\}}(t, s) + c^{+2} f^{\{2\}}(t, s), \\ f_t^{\{1\}}(t, s) &= c^{1-} f^-(t, s) + c^{1+} f^+(t, s) + c^{11} f^{\{1\}}(t, s) + c^{12} f^{\{2\}}(t, s), \\ f_t^{\{2\}}(t, s) &= c^{2-} f^-(t, s) + c^{2+} f^+(t, s) + c^{21} f^{\{1\}}(t, s) + c^{22} f^{\{2\}}(t, s). \end{aligned} \quad (5.2)$$

Аналогично случаю $n = 1$, данный случай сводится к системе алгебраических уравнений, являющейся естественным обобщением (4.6):

$$\begin{aligned} A &= -F \cdot D_i, \\ C \cdot B_i &= -\lambda_i \cdot B_i, \quad i = 1, \dots, 2, \\ C^2 \cdot A &= \sum_{i=1}^2 \delta_i \cdot B_i, \\ C \cdot D_i &= -\lambda_i \cdot D_i + F \cdot B_i, \quad i = 1, \dots, 2, \\ G \cdot D_i &= \sum_{j=1}^2 \delta_j D_j, \quad i = 1, \dots, 2, \end{aligned} \quad (5.3)$$

где, подобно (4.7), введены обозначения

$$\begin{aligned} A &:= \begin{pmatrix} a^- \\ a^+ \\ a^1 \\ a^2 \end{pmatrix}, \quad B_i := \begin{pmatrix} b^{i-} \\ b^{i+} \\ b^{i1} \\ b^{i2} \end{pmatrix}, \quad C := \begin{pmatrix} c^{--} & c^{+-} & c^{1-} & c^{2-} \\ c^{-+} & c^{++} & c^{1+} & c^{2+} \\ c^{-1} & c^{+1} & c^{11} & c^{21} \\ c^{-2} & c^{+2} & c^{12} & c^{22} \end{pmatrix}, \quad D_i := \begin{pmatrix} d^{i-} \\ d^{i+} \\ d^{i1} \\ d^{i2} \end{pmatrix}, \\ F &:= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad G := \begin{pmatrix} 2c^{--} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2c^{++} & 0 & 0 \\ c^{-1} & c^{+1} & 0 & 0 \\ c^{-2} & c^{+2} & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Избегая избыточности представления (5.1)–(5.2) (аналогично случаю $n = 1$), решаем систему (5.3) (с помощью программы Maple 18), в результате чего получаем единственное решение

$$\begin{aligned} u(t, s) &= f^-(t, s) + f^+(t, s), \\ v^{\{1\}}(t, s) &= -\lambda_1 f^-(t, s) - \lambda_1 f^+(t, s) + \lambda_1 f^{\{1\}}(t, s) - f_s^-(t, s) + f_s^+(t, s), \\ v^{\{2\}}(t, s) &= -\lambda_2 f^-(t, s) - \lambda_2 f^+(t, s) + \lambda_2 f^{\{2\}}(t, s) - f_s^-(t, s) + f_s^+(t, s). \end{aligned} \quad (5.4)$$

Здесь функции $f^-(t, s)$, $f^+(t, s)$, $f^{\{i\}}(t, s)$ ($i \in \{1, 2\}$) (“левая”, “правая” и “прямые” волны) являются общим решением системы линейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка

$$\begin{aligned} f_t^-(t, s) + f_s^-(t, s) &= \frac{\delta_1 + \delta_2}{2} (f^-(t, s) + f^+(t, s)) - \frac{\delta_1}{2} f^{\{1\}}(t, s) - \frac{\delta_2}{2} f^{\{2\}}(t, s), \\ f_t^+(t, s) - f_s^+(t, s) &= \frac{\delta_1 + \delta_2}{2} (f^-(t, s) + f^+(t, s)) - \frac{\delta_1}{2} f^{\{1\}}(t, s) - \frac{\delta_2}{2} f^{\{2\}}(t, s), \\ f_t^{\{1\}}(t, s) &= (\lambda_1 + \delta_1 + \delta_2) (f^-(t, s) + f^+(t, s)) - (\lambda_1 + \delta_1) f^{\{1\}}(t, s) - \delta_2 f^{\{2\}}(t, s), \\ f_t^{\{2\}}(t, s) &= (\lambda_2 + \delta_1 + \delta_2) (f^-(t, s) + f^+(t, s)) - \delta_1 f^{\{1\}}(t, s) - (\lambda_2 + \delta_2) f^{\{2\}}(t, s). \end{aligned} \quad (5.5)$$

Замечаем, что в случаях $n = 1$ и $n = 2$ системы (4.8), (4.9) и (5.4), (5.5) имеют схожий вид, что и дает основания для анзаца (2.1)–(2.3).

6. Постановка задачи в непрерывном случае. Рассмотрим непрерывное (при $n \rightarrow \infty$) обобщение уравнения (1.1)

$$u_{tt} = h^2 u_{xx} + \int_0^\infty \int_0^t \exp\{-\lambda(t-\tau)\} u_{xx}(\tau, x) d\tau d\gamma(\lambda). \quad (6.1)$$

Подобно дискретному случаю введение функции

$$v(t, x, \lambda) = h^2 \int_0^t \exp\{-\lambda(t-\tau)\} u_{xx}(\tau, x) d\tau \quad (6.2)$$

сводит (6.1) к дифференциальной форме, которая заменой пространственной переменной приводится к виду

$$u_{tt} = u_{ss} + \int_0^\infty v d\sigma(\lambda), \quad u_{ss} = v_t + \lambda v, \quad (6.3)$$

где $v(0, s, \lambda) = 0$ и $d\sigma(\lambda) = d\gamma(\lambda)/h^2$.

7. Основные результаты в непрерывном случае. Введем следующие обозначения: $\delta = \int_0^\infty d\sigma(\lambda)$ и $S = \int_0^\infty \lambda^{-1} d\sigma(\lambda)$. Кроме того, предположим, что мера $d\sigma(\lambda)$ такова, что допускает перестановку интегралов, т.е.

$$\int_0^s \int_0^\infty p(x, \lambda) d\sigma(\lambda) dx = \int_0^\infty \int_0^s p(x, \lambda) dx d\sigma(\lambda).$$

ТЕОРЕМА 3. Пусть $S \neq -1$. Тогда если функции $f^\pm(t, s)$, $f^0(t, s, \lambda)$ являются классическим решением системы дифференциальных уравнений

$$f_t^-(t, s) + f_s^-(t, s) = \frac{\delta}{2} f^-(t, s) + \frac{\delta}{2} f^+(t, s) - \frac{1}{2} \int_0^\infty f^0(t, s, \lambda) d\sigma(\lambda),$$

$$f_t^+(t, s) - f_s^+(t, s) = \frac{\delta}{2} f^-(t, s) + \frac{\delta}{2} f^+(t, s) - \frac{1}{2} \int_0^\infty f^0(t, s, \lambda) d\sigma(\lambda),$$

$$f_t^0(t, s, \lambda) = (\lambda + \delta) f^-(t, s) + (\lambda + \delta) f^+(t, s) - \lambda f^0(t, s, \lambda) - \int_0^\infty f^0(t, s, \lambda_1) d\sigma(\lambda_1), \quad (7.1)$$

удовлетворяющим дополнительному условию

$$f^-(t, s) + f^+(t, s) \in C^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}), \quad \lambda f^0(t, s, \lambda) - f_s^-(t, s) + f_s^+(t, s) \in C^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}), \quad (7.2)$$

то функции

$$\begin{aligned} u(t, s) &= f^-(t, s) + f^+(t, s), \\ v(t, s, \lambda) &= -\lambda f^-(t, s) - \lambda f^+(t, s) + \lambda f^0(t, s, \lambda) - f_s^-(t, s) + f_s^+(t, s) \end{aligned} \quad (7.3)$$

являются классическим решением (6.3). Обратно: если функции $u(t, s)$, $v(t, s, \lambda)$ являются классическим решением (6.3), то функции

$$\begin{aligned} f^-(t, s) &= \frac{1}{2} u(t, s) - \frac{1}{2(1+S)} \int_0^s (u_t(t, x) + V(t, x)) dx - \frac{1}{2} \int_0^t u_s(\tau, 0) d\tau - C, \\ f^+(t, s) &= \frac{1}{2} u(t, s) + \frac{1}{2(1+S)} \int_0^s (u_t(t, x) + V(t, x)) dx + \frac{1}{2} \int_0^t u_s(\tau, 0) d\tau + C, \\ f^0(t, s, \lambda) &= \frac{1}{\lambda} v(t, s, \lambda) + u(t, s) - \frac{u_t(t, s) + V(t, s)}{\lambda(1+S)} \end{aligned} \quad (7.4)$$

с произвольной константой C и введенной функцией $V(t, s) = \int_0^\infty \lambda^{-1} v(t, s, \lambda) d\sigma(\lambda)$ являются классическим решением (7.1) и удовлетворяют дополнительному условию (7.2).

В случае $S = -1$ подобно дискретному случаю взаимно однозначное соответствие между начальными условиями систем (6.3) и (7.1) теряется, но полученные результаты дискретного случая подводят нас к получению следующего результата.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $S = -1$. Тогда если функции $f^\pm(t, s)$, $f^0(t, s, \lambda)$ являются классическим решением системы дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} f_t^-(t, s) + f_s^-(t, s) &= \frac{\delta}{2} f^-(t, s) + \frac{\delta}{2} f^+(t, s) - \frac{1}{2} \int_0^\infty (\lambda + \delta) f^0(t, s, \lambda) d\sigma(\lambda), \\ f_t^+(t, s) - f_s^+(t, s) &= \frac{\delta}{2} f^-(t, s) + \frac{\delta}{2} f^+(t, s) - \frac{1}{2} \int_0^\infty (\lambda + \delta) f^0(t, s, \lambda) d\sigma(\lambda), \\ f_t^0(t, s, \lambda) &= f^-(t, s) + f^+(t, s) - \lambda f^0(t, s, \lambda) - \int_0^\infty f^0(t, s, \lambda_1) d\sigma(\lambda_1), \end{aligned} \quad (7.5)$$

удовлетворяющим дополнительному условию

$$f^-(t, s) + f^+(t, s) \in C^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}), \quad f_{ss}^0(t, s, \lambda) \in C^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}), \quad (7.6)$$

то функции

$$\begin{aligned} u(t, s) &= f^-(t, s) + f^+(t, s) - \int_0^\infty f^0(t, s, \lambda) d\sigma(\lambda), \\ v(t, s, \lambda) &= f_{ss}^0(t, s, \lambda) \end{aligned} \quad (7.7)$$

являются классическим решением (6.3). Обратно: если функции $u(t, s)$, $v(t, s, \lambda)$ являются классическим решением (6.3), то функции

$$\begin{aligned} f^-(t, s) &= \frac{1}{2} u(t, s) - \frac{1}{2} \int_0^s u_t(t, x) dx + \frac{1}{2} \int_0^s \int_0^y V(t, x) dx dy - \frac{1}{2} \int_0^t u_s(\tau, 0) d\tau \\ &\quad + \frac{s}{2} \int_0^\infty \int_0^t u_s(\tau, 0) e^{-\lambda(t-\tau)} d\tau d\sigma(\lambda) + \frac{1}{2} \int_0^\infty \int_0^t u(\tau, 0) e^{-\lambda(t-\tau)} d\tau d\sigma(\lambda) \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_0^\infty \int_0^t \int_0^\tau u_s(\theta, 0) e^{-\lambda(\tau-\theta)} d\theta d\tau d\sigma(\lambda) + \frac{s}{2} \int_0^\infty C(\lambda) e^{-\lambda t} d\sigma(\lambda) \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^\infty \left(D(\lambda) + \frac{1}{\lambda} C(\lambda) \right) e^{-\lambda t} d\sigma(\lambda) - E, \\ f^+(t, s) &= \frac{1}{2} u(t, s) + \frac{1}{2} \int_0^s u_t(t, x) dx + \frac{1}{2} \int_0^s \int_0^y V(t, x) dx dy + \frac{1}{2} \int_0^t u_s(\tau, 0) d\tau \\ &\quad + \frac{s}{2} \int_0^\infty \int_0^t u_s(\tau, 0) e^{-\lambda(t-\tau)} d\tau d\sigma(\lambda) + \frac{1}{2} \int_0^\infty \int_0^t u(\tau, 0) e^{-\lambda(t-\tau)} d\tau d\sigma(\lambda) \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^\infty \int_0^t \int_0^\tau u_s(\theta, 0) e^{-\lambda(\tau-\theta)} d\theta d\tau d\sigma(\lambda) + \frac{s}{2} \int_0^\infty C(\lambda) e^{-\lambda t} d\sigma(\lambda) \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^\infty \left(D(\lambda) - \frac{1}{\lambda} C(\lambda) \right) e^{-\lambda t} d\sigma(\lambda) + E, \end{aligned}$$

$$f^0(t, s, \lambda) = \int_0^s \int_0^y v(t, x, \lambda) dx dy + s \int_0^t u_s(\tau, 0) e^{-\lambda(t-\tau)} d\tau + \int_0^t u(\tau, 0) e^{-\lambda(t-\tau)} d\tau + sC(\lambda)e^{-\lambda t} + D(\lambda)e^{-\lambda t},$$

с произвольной константой E , произвольными функциями $C(\lambda)$, $D(\lambda)$ и введенной функцией $V(t, s) = \int_0^\infty v(t, s, \lambda) d\sigma(\lambda)$ являются классическим решением (7.5) и удовлетворяют дополнительному условию (7.6).

Системы (7.1), (7.5) описывают перенос и перераспределение между собой волн $f^\alpha(t, s)$ – одной “левой”, одной “правой” и континуального количества “прямых” (волн “памяти”), непрерывно зависящих от параметра λ .

8. Доказательства теорем 3 и 4. Аналогичны доказательству теоремы 1.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] А. А. Гавриков, А. С. Шамаев, “Некоторые вопросы акустики эмульсий”, Тр. сем. им. И. Г. Петровского, **28**, Изд-во Моск. ун-та, М., 2011, 114–146.
- [2] А. В. Боровских, “Метод распространяющихся волн для одномерной неоднородной среды”, Тр. сем. им. И. Г. Петровского, **24**, Изд-во Моск. ун-та, М., 2004, 3–43.
- [3] А. В. Боровских, А. Н. Царицанский, “Формула распространяющихся волн для среды с памятью”, *Дифференц. уравнения*, **48** (2012), 901–902.
- [4] А. Н. Царицанский, “Формула распространяющихся волн для неоднородной среды с памятью”, *Дифференц. уравнения* (в печати).

А. Н. Царицанский

Московский государственный университет
имени М.В.Ломоносова

E-mail: TsaritsanskiiAN@gmail.com

Поступило

26.10.2014