Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Ю. Кокурин, О множествах единственности для гармонических и аналитических функций и обратных задачах для волновых уравнений, *Матем. заметки*, 2015, том 97, выпуск 3, 397–406

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10599>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.187.69

26 апреля 2023 г., 15:49:39

О множествах единственности для гармонических и аналитических функций и обратных задачах для волновых уравнений

М. Ю. Кокурин

Приводятся примеры одномерных аналитических множеств единственности на сфере в $\mathbb{R}^3$ для гармонических функций и примеры аналитических множеств на сфере в $\mathbb{R}^n$, которые не могут содержать множества единственности. Строятся аналитические кривые, являющиеся множествами единственности для вещественно аналитических функций в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$. Результаты используются для обоснования схем зондирования неоднородностей при решении обратной задачи акустического рассеяния в условиях совпадения координат источников и детекторов.

Библиография: 17 названий.

DOI: 10.4213/mzm10599

1. Постановка задачи. Ряд практически важных проблем вычислительной диагностики неоднородных сред приводит к задачам, связанным с нахождением коэффициентов уравнений гиперболического типа по известному набору решений этих уравнений. Указанные задачи относятся к классу коэффициентных обратных задач математической физики. Как правило они некорректно поставлены, и один из основных вопросов при их исследовании состоит в установлении единственности решения. Такого рода результаты необходимы для обоснования практических экспериментальных схем акустического или электромагнитного зондирования в смысле достаточности набора получаемых данных для однозначной реконструкции искомых параметров зондируемой среды. При наличии единственности следующим является вопрос о численном отыскании функций, характеризующих исследуемую среду, по данным измерений рассеянных акустических или электромагнитных полей. Последняя задача формализуется в виде уравнения с оператором, сопоставляющим параметрам среды данные рассеяния. Трудоемкость решения этого уравнения целиком определяется свойствами оператора задачи. В типичных случаях оператор данной обратной задачи оказывается нелинейным и нерегулярным, что и обуславливает трудности численного решения прикладных обратных задач зондирования, особенно в трехмерной постановке [1; гл. 3].

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 12-01-00239а).

В качестве модельного примера рассмотрим обратную задачу акустического зондирования ограниченной неоднородности набором точечных источников, расположенных вне этой неоднородности. Акустическое поле $u(x; t) = u_y(x; t)$, возбуждаемое в момент $t = 0$ источником, находящимся в точке y , определяется решением задачи Коши

$$\frac{1}{c^2(x)} \frac{\partial^2 u(x; t)}{\partial t^2} = \Delta u(x; t) - \delta(x - y) \delta(t), \quad x \in \mathbb{R}^3, \quad t \geq 0, \quad (1.1)$$

$$u(x; 0)|_{t < 0} = 0, \quad x \in \mathbb{R}^3.$$

Здесь $c(x) > 0$ – скорость звука (коэффициент рефракции) в точке $x \in \mathbb{R}^3$ и предполагается, что $c(x) \equiv c_0$ вне априори заданной ограниченной области $D \subset \mathbb{R}^3$ с известной постоянной c_0 , а значения $c(x)$ при $x \in D$ неизвестны. Для отыскания $c(x)$, $x \in D$, рассеянное поле $u_y(x; t)$ измеряется при $t > 0$ в точках $x = z \in Z$, где $Z \subset \mathbb{R}^3$ – множество детекторов, $Z \cap \bar{D} = \emptyset$. При исследовании таких задач широко распространен подход, согласно которому исходными данными для реконструкции $c(x)$ служат наблюдения поля $u_y(z; t)$ вблизи характеристического конуса, т.е. при $\tau(y; z) < t \leq \tau(y; z) + \tau_0$, где $\tau_0 > 0$, $\tau(y; z)$ есть время прихода сигнала из точки y в точку наблюдения $z \in Z$ (см. [2], [3] и указанные там ссылки). В рамках этого подхода устанавливается однозначная определенность коэффициента $c(x)$ результатами наблюдений поля $u_y(z; t)$ с фиксированным источником y при двумерной области наблюдений Z [2]. Тем самым рассматриваемая постановка оказывается непереоопределенной в том смысле, что функция трех независимых переменных $c(x)$, $x \in D$ восстанавливается по известной функции $u_y(z; t)$, $z \in Z$, $t \in [0, T]$, $T = \max_{z \in Z} \tau(y; z) + \tau_0$, также зависящей от трех переменных. Однако, отображение F , сопоставляющее $c(\cdot)$ функцию $u_y(\cdot, \cdot)$, оказывается здесь нелинейным, что существенно затрудняет практическое решение операторного уравнения $F(c) = u_y$.

Альтернативный подход к обсуждаемой обратной задаче связан с использованием вместо одного источника множества источников $y \in Y$, $Y \cap \bar{D} = \emptyset$ при неограниченном времени наблюдения $t \in (\tau(y; z), \infty)$, $z \in Z$ [4], [5]. Многообразия Y и Z в этой постановке могут пересекаться или совпадать. Результатом такого расширения пространственно-временной области наблюдения является возможность редукции рассматриваемой нелинейной обратной задачи к линейному интегральному уравнению

$$\int_D \frac{\xi(x) dx}{|y - x||z - x|} = g(y; z), \quad (y; z) \in Y \times Z, \quad (1.2)$$

в котором

$$\xi(x) = \frac{1}{c^2(x)} - \frac{1}{c_0^2}, \quad x \in D,$$

функция $g(y; z)$ вычисляется по данным наблюдения

$$\{u_y(z; t) : t > \tau(y; z), y \in Y, z \in Z\}.$$

В случае однозначной разрешимости уравнения (1.2) имеет место эквивалентная редукция исходной нелинейной задачи к этому линейному интегральному уравнению. Представленные выше схемы распространяются и на некоторые другие типы обратных коэффициентных задач, в частности, возбуждающее поле может иметь

гармонический по времени вид, а сам волновой процесс может протекать в ограниченной области с надлежащими граничными условиями и описываться более общими, чем (1.1) уравнениями [3], [6]–[8]. Во многих случаях, однако, уравнение (1.2) сохраняет свой вид. Отдельно отметим группу задач, связанных с экспериментами обратного рассеяния, в которых точки $y = z$ меняются вдоль некоторого многообразия Y . В этом случае измерение рассеянного неоднородностью поля происходит в той же точке, где находится возбуждающий источник. Возможно и более общее по сравнению с (1.2) совместное изменение положений источников и приемников, так что $(y; z) \in \mathcal{L}$, где $\mathcal{L}$ – некоторое многообразие в $\mathbb{R}^6$. Сказанное выше мотивирует изучение однозначной разрешимости уравнения (1.2) и его модификаций при $(y; z) \in \mathcal{L}$ с точки зрения минимизации размерностей многообразий Y , Z и $\mathcal{L}$. Очевидно, что вопрос сводится к получению условий на эти многообразия, при которых соответствующее (1.2) линейное однородное уравнение имеет лишь тривиальное решение. С практической точки зрения достаточно иметь однозначную разрешимость в классе кусочно-непрерывных функций ξ . Далее ограничимся случаем, когда Y , Z , $\mathcal{L}$ являются аналитическими многообразиями соответствующих размерностей. Всюду в работе под аналитическими понимаются вещественно аналитические функции, множества и многообразия [9], [10].

Структура работы следующая. В разделе 2 обсуждается связь однозначной разрешимости уравнения (1.2) и свойства однозначного продолжения гармонических функций в $\mathbb{R}^3$ с многообразий меньшей размерности. Описаны одномерные многообразия со свойством однозначного продолжения и показана существенность условий, их определяющих. В разделе 3 строятся аналитические кривые со свойством единственности для аналитических функций в областях пространства $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$. В разделе 4 на основе предыдущей теории обосновывается новая схема эксперимента зондирования, использующая обратное рассеяние с совпадающим местоположением источников поля и детекторов и обеспечивающая однозначную разрешимость уравнения (1.2).

2. Множества единственности и неединственности на сфере для гармонических функций. Введем обозначения

$$B^n = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq 1\}, \quad S^{n-1} = \partial B^n, \quad B_0^n = \text{int } B^n.$$

Отыскание многообразий Y , Z , для которых имеет место однозначная разрешимость уравнения (1.2), естественным образом связано с построением множеств единственности для гармонических функций в $\mathbb{R}^3 \setminus \overline{D}$. Пусть Ω – область в $\mathbb{R}^n$. Будем говорить, что $M \subset \Omega$ есть множество единственности для гармонических функций в Ω (множество единственности для Ω), если для любой гармонической в Ω функции u ($u \in C^2(\Omega)$, $\Delta u(x) = 0$, $x \in \Omega$), равенство $u|_M = 0$ влечет $u \equiv 0$ в Ω . Таким образом, гармоническая в Ω функция однозначно восстанавливается по своим значениям на M . Отмеченную выше связь устанавливает

ТЕОРЕМА 2.1 [11]. Пусть Y и Z являются множествами единственности для гармонических функций в области $\Omega \subset \mathbb{R}^3 \setminus \overline{D}$. Тогда уравнение (1.2) имеет не более одного решения.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. Утверждение теоремы 2.1 остается в силе, если несколько расширить класс множеств единственности, добавив в определение этих множеств к условию $u|_M = 0$ требование $u(\infty) = 0$ в случае неограниченной области Ω .

Тривиальными примерами множеств единственности Y , Z являются двумерные замкнутые поверхности такие как сферы или эллипсоиды, не пересекающие $\overline{D}$. На этих поверхностях можно указать и одномерные гладкие многообразия со свойством единственности. Для определенности будем говорить о единичной сфере S^2 , лежащей вместе с шаром B^3 вне $\overline{D}$.

ПРИМЕР 2.1. Рассмотрим кривую $\gamma \subset S^2$, определенную равенствами

$$\begin{cases} x_1 = X_1(t) \equiv \cos t \cos\left(\frac{\pi}{2} \sin \pi t\right), \\ x_2 = X_2(t) \equiv \sin t \cos\left(\frac{\pi}{2} \sin \pi t\right), \\ x_3 = X_3(t) \equiv \sin\left(\frac{\pi}{2} \sin \pi t\right), \quad t > 0. \end{cases}$$

Нетрудно видеть, что γ всюду плотна на S^2 , поэтому любой ее отрезок

$$M = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_j = X_j(t), t \in (t_1, t_2), 1 \leq j \leq 3\}, \quad 0 < t_1 < t_2$$

является множеством единственности для любой области $\Omega \supset B^3$.

ПРИМЕР 2.2. Кривая

$$M = \left\{x \in S^2 : x_2 = x_1 \sin\left(\frac{1}{x_1}\right), x_1 \in (x_{1,0}, x_{1,1})\right\}, \quad 0 < x_{1,0} < x_{1,1} < \frac{1}{\sqrt{2}},$$

является множеством единственности для Ω , где $\Omega \supset B^3$. Для доказательства заметим, что гармоническая функция f , обращающаяся в нуль на M , является в силу аналитичности нулевой и всюду на аналитической кривой

$$\widetilde{M} = \left\{x \in S^2 : x_2 = x_1 \sin\left(\frac{1}{x_1}\right), x_1 \in (0, x_{1,1})\right\}.$$

Далее, дуга большого круга на S^2 , соединяющая точку $(0; 0; 1)$ с произвольной точкой $(x_1; x_2; 0)$ такой, что $x_1^2 + x_2^2 = 1$, $0 < x_2 < x_1$, являющаяся аналитической кривой, пересекает $\widetilde{M}$ в последовательности точек, сходящейся к $(0; 0; 1)$. Поэтому рассматриваемая аналитическая функция является нулевой на каждой такой дуге [9; с. 14]. Поскольку точки этих дуг образуют на S^2 множество, содержащее открытое подмножество сферы, функция f должна быть нулевой всюду на S^2 . В силу единственности решения задачи Дирихле для сферы отсюда получаем $f|_{B^3} = 0$ и, значит, $f|_{\Omega} = 0$.

В примерах 2.1, 2.2 одномерные аналитические многообразия единственности локально, т.е. в некоторой окрестности U любой своей точки, имеют вид

$$M = \{x \in S^2 : f(x) = 0\},$$

где f – аналитическая функция в U . При этом f не допускает однозначного аналитического продолжения в окрестность всей сферы S^2 и в этом смысле устроена достаточно сложно. Возникает вопрос, нельзя ли множество единственности, лежащее на S^2 , определить аналитической в окрестности S^2 функцией, например, полиномом. Приводимые далее утверждения показывают, что конструкция множеств

единственности по сравнению с примерами 2.1, 2.2 не может быть в этом смысле существенно упрощена.

Обобщая предыдущие построения, будем интересоваться непустыми аналитическими множествами на сфере $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, вида

$$\Sigma_f = \{x \in S^{n-1} : f(x) = 0\}, \quad \dim(\Sigma_f) \leq n - 2, \quad (2.1)$$

содержащими множества единственности для областей $\Omega \supset B^n$. Здесь f – аналитическая в Ω функция.

ТЕОРЕМА 2.2. Пусть Ω – звездная область относительно начала координат, $B^n \subset \Omega$ и в (2.1) функция f полигармонична в Ω , т.е. $\Delta^m f(x) = 0$, $x \in \Omega$, для некоторого $m \geq 1$. Тогда найдется отличная от тождественного нуля и гармоническая в Ω функция $h(x)$ такая, что $h|_{\Sigma_f} = 0$.

Таким образом, никакое множество единственности для указанных в теореме областей Ω не может принадлежать множеству Σ_f с полигармонической в Ω функцией f . Поскольку любой полином является полигармонической функцией с достаточно большим значением m , приходим к следующему утверждению.

СЛЕДСТВИЕ 2.1. Алгебраическое множество $\{x \in S^{n-1} : P(x) = 0\}$, где P – полином, не может содержать множества единственности для области Ω из теоремы 2.2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.2. Пользуясь теоремой Альманзи [12; с. 531], построим для полигармонической в Ω функции f разложение

$$f(x) = h_0(x) + |x|^2 h_1(x) + \dots + |x|^{2(m-1)} h_{m-1}(x), \quad x \in \Omega,$$

где $h_j(x)$, $0 \leq j \leq m-1$, – гармонические в Ω функции. Гармоническая в Ω функция

$$h(x) = h_0(x) + h_1(x) + \dots + h_{m-1}(x)$$

совпадает с $f(x)$ при $x \in S^{n-1}$, поэтому h обращается в нуль всюду на S^{n-1} , где $f(x) = 0$. Следовательно, $h|_{\Sigma_f} = 0$. Остается заметить, что h в Ω не равна нулю тождественно. В противном случае h была бы тождественным нулем на S^{n-1} и потому мы имели бы $f|_{S^{n-1}} = 0$, $\Sigma_f = S^{n-1}$, $\dim(\Sigma_f) = n - 1$ вопреки условию (2.1). Теорема доказана.

Следующая теорема показывает, что ситуация не меняется при замене полигармонической функции f в (2.1) на произвольную целую функцию.

ТЕОРЕМА 2.3. Пусть $B^n \subset \Omega$ и f – целая аналитическая функция в $\mathbb{R}^n$, отличная от тождественного нуля. Тогда найдется отличная от тождественного нуля и гармоническая в Ω функция $h(x)$ такая, что $h|_{\Sigma_f} = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим задачу Дирихле

$$\Delta h(x) = 0, \quad x \in B_0^n, \quad h|_{S^{n-1}} = f|_{S^{n-1}},$$

которая имеет единственное решение, представимое интегралом Дирихле. Согласно [13; с. 91], [14], функция h продолжается из B^n на $\mathbb{R}^n$ как целая гармоническая

функция. Поэтому ее сужение на Ω является гармонической функцией, совпадающей с f на S^{n-1} . Последнее означает, что $h|_{\Sigma_f} = 0$. Поскольку f отлична от тождественного нуля на S^{n-1} , функция h также не есть тождественный нуль в Ω . Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.2. Аналогичное теореме 2.3 утверждение справедливо при замене шара B^n на произвольный эллипсоид [14].

Кривые единственности M , указанные в примерах 2.1, 2.2, обладают тем свойством, что обращение в нуль на M произвольной гармонической в $\Omega \supset M$ функции f влечет $f \equiv 0$ в Ω . В [15] обсуждается близкая по формулировке, но более сложная задача построения линии M , имеющей с Ω несвязное пересечение, при условии, что обращение в нуль произвольной гармонической в Ω функции f на одной из компонент связности $\Omega \cap M$ влечет $f \equiv 0$ на всем $\Omega \cap M$.

3. Многообразия единственности для аналитических функций в $\mathbb{R}^n$. В этом разделе обратимся к построению одномерных аналитических многообразий единственности M для произвольных аналитических функций в области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. По определению, для искомого множества $M \subset \Omega$ равенство $f|_M = 0$, где f – аналитическая в Ω функция, влечет $f \equiv 0$ в Ω . Предлагаемую схему построения таких многообразий поясним на примере области в $\mathbb{R}^3$. Для простоты ограничимся случаем $\Omega = B_0^3$.

ПРИМЕР 3.1. Рассмотрим в Ω цилиндрическую поверхность

$$\Pi_2 = \left\{ x \in B_0^3 : x_2 = x_1 \sin\left(\frac{1}{x_1}\right), x_1 \in \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \right\}$$

и выберем точку $x^{(0)} \in \Pi_2$. Обозначим через $T_2(x^{(0)})$ касательную плоскость к Π_2 в точке $x^{(0)}$ и введем в $T_2(x^{(0)})$ евклидову координатную систему $x'' = (x'_1; x'_2)$ с центром в $x^{(0)}$. Пусть x'_3 – направление нормали к Π_2 в точке $x^{(0)}$, тогда в евклидовых координатах $x' = (x'_1; x'_2; x'_3)$ для подходящей окрестности $\Omega' \subset B_0^3$ точки $x^{(0)}$ и достаточно малого $\varepsilon > 0$ имеет место представление

$$\Pi_2 \cap \Omega' = \{x' \in \mathbb{R}^3 : x'_3 = g(x'_1; x'_2), |x'_1|, |x'_2| < \varepsilon\}$$

с аналитической функцией g . Зафиксируем величины $0 < \varepsilon_0 < \varepsilon_1 < \varepsilon$ и положим

$$M = \left\{ x' \in \mathbb{R}^3 : x'_2 = x'_1 \sin\left(\frac{1}{x'_1}\right), x'_3 = g\left(x'_1; x'_1 \sin\left(\frac{1}{x'_1}\right)\right), x'_1 \in (\varepsilon_0, \varepsilon_1) \right\}.$$

ТЕОРЕМА 3.1. Кривая $M \subset \Pi_2$ является множеством единственности для аналитических функций в B_0^3 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть для аналитической в B_0^3 функции f выполнено $f|_M = 0$, т.е.

$$f\left(x'_1; x'_1 \sin\left(\frac{1}{x'_1}\right); g\left(x'_1; x'_1 \sin\left(\frac{1}{x'_1}\right)\right)\right) = 0, \quad x'_1 \in (\varepsilon_0, \varepsilon_1).$$

Функция в левой части последнего равенства аналитична при $x'_1 \in (0, \varepsilon)$, поэтому имеем

$$f\left(x'_1; x'_1 \sin\left(\frac{1}{x'_1}\right); g\left(x'_1; x'_1 \sin\left(\frac{1}{x'_1}\right)\right)\right) = 0, \quad x'_1 \in (0, \varepsilon). \quad (3.1)$$

Из (3.1) следует, что для каждого $\alpha \in (-1, 1)$ уравнение

$$f(x'_1; \alpha x'_1; g(x'_1; \alpha x'_1)) = 0 \quad (3.2)$$

имеет последовательность положительных решений $\{x'_{1,l}(\alpha)\}_{l=1}^{\infty}$,

$$\sin\left(\frac{1}{x'_{1,l}(\alpha)}\right) = \alpha,$$

причем $\lim_{l \rightarrow \infty} x'_{1,l}(\alpha) = 0$. Поскольку функция в левой части (3.2) аналитична при $x'_1 \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, она есть тождественный нуль при этих значениях x'_1 [7; с. 14]. Таким образом,

$$f(x'_1; \alpha x'_1; g(x'_1; \alpha x'_1)) = 0, \quad x'_1 \in (-\varepsilon, \varepsilon), \quad \alpha \in (-1, 1). \quad (3.3)$$

Из (3.3) следует, что f обращается в нуль на открытом подмножестве

$$\{(x'_1; \alpha x'_1; g(x'_1; \alpha x'_1)) : x'_1 \in (0, \varepsilon), \alpha \in (-1, 1)\}$$

поверхности Π_2 . Поскольку Π_2 есть аналитическая поверхность, выполнено $f|_{\Pi_2} = 0$, т.е. в частности

$$f\left(x_1; x_1 \sin\left(\frac{1}{x_1}\right); x_3\right) = 0, \quad x_1 \in \left(0, \frac{1}{\sqrt{3}}\right), \quad x_3 \in \left(0, \frac{1}{\sqrt{3}}\right). \quad (3.4)$$

С произвольными фиксированными $\beta \in (-1, 1)$, $\bar{x}_3 \in (0, 1/\sqrt{3})$ рассмотрим уравнение $f(x_1; \beta x_1; \bar{x}_3) = 0$. Ввиду (3.4), при каждом $\bar{x}_3 \in (0, 1/\sqrt{3})$ указанное уравнение имеет относительно x_1 последовательность решений $\{x_{1,l}(\beta)\}_{l=1}^{\infty}$, где $\sin(1/x_{1,l}(\beta)) = \beta$, $\lim_{l \rightarrow \infty} x_{1,l}(\beta) = 0$. Поскольку функция $f(x_1; \beta x_1; \bar{x}_3)$ аналитична по x_1 в окрестности точки $x_1 = 0$, отсюда как и выше заключаем, что

$$f(x_1; \beta x_1; \bar{x}_3) = 0, \quad x_1 \in \left(0, \frac{1}{\sqrt{3}}\right), \quad \bar{x}_3 \in \left(0, \frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

Остается заметить, что точки $(x_1; \beta x_1; \bar{x}_3)$, где $x_1 \in (0, 1/\sqrt{3})$, $\bar{x}_3 \in (0, 1/\sqrt{3})$ и $\beta \in (-1, 1)$ образуют открытое подмножество в B_0^3 и, значит, $f \equiv 0$ в B_0^3 . Теорема доказана.

Предыдущее построение допускает обобщение на области любой размерности.

ПРИМЕР 3.2. Рассмотрим для определенности случай $\Omega = B_0^n$, $n \geq 4$. Можем считать, что уже построено одномерное аналитическое многообразие $M_{[n-1]}$, являющееся множеством единственности для аналитических функций в шаре B_0^{n-1} . В примере 3.1 такое построение осуществлено для $n - 1 = 3$. Рассмотрим $(n - 1)$ -мерную цилиндрическую поверхность

$$\Pi_{n-1} = \left\{ x \in B_0^n : x_{n-1} = (x_1 + \dots + x_{n-2}) \sin\left(\frac{1}{(x_1 + \dots + x_{n-2})}\right), \right. \\ \left. x_j > 0, 1 \leq j \leq n-2, x_1^2 + \dots + x_{n-2}^2 + (x_1 + \dots + x_{n-2})^2 < \frac{1}{\sqrt{2}} \right\} \quad (3.5)$$

и выберем точку $x^{(0)} \in \Pi_{n-1}$. Пусть $T_{n-1}(x^{(0)}) = \{x'' = (x'_1, \dots, x'_{n-1})\}$ – касательная гиперплоскость к Π_{n-1} в $x^{(0)}$. В локальных евклидовых координатах $x' = (x''; x'_n)$ с центром в $x^{(0)}$ поверхность Π_{n-1} задается уравнением $x'_n = g_n(x'')$ с аналитической в окрестности нуля функцией g_n . Полагая $\pi_{n-1}(x'') = (x''; g_n(x''))$, получаем аналитическое биективное отображение малой окрестности $B_0^{n-1}(\varepsilon_0) = \{x'' \in T_{n-1}(x^{(0)}) : |x''| < \varepsilon_0\}$ точки $x^{(0)}$ в $T_{n-1}(x^{(0)})$ на открытую окрестность этой точки в Π_{n-1} . Отождествляя гиперплоскость $T_{n-1}(x^{(0)})$ с $\mathbb{R}^{n-1}$, видим, что $\varepsilon_0 M_{[n-1]}$ есть множество единственности для аналитических функций в $B_0^{n-1}(\varepsilon_0)$. Определим одномерное аналитическое многообразие $M_{[n]} = \pi_{n-1}(\varepsilon_0 M_{[n-1]})$.

ТЕОРЕМА 3.2. *Многообразие $M_{[n]} \subset \Pi_{n-1}$ является множеством единственности для аналитических функций в B_0^n .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть для аналитической в B_0^n функции f выполняется равенство $f|_{M_{[n]}} = 0$. Тогда $(f \circ \pi_{n-1})|_{\varepsilon_0 M_{[n-1]}} = 0$, откуда в силу аналитичности функции $f \circ \pi_{n-1} : T_{n-1}(x^{(0)}) \rightarrow \mathbb{R}$ следует $(f \circ \pi_{n-1})|_{B_0^{n-1}(\varepsilon_0)} = 0$. Поэтому

$$f|_{\pi_{n-1}(B_0^{n-1}(\varepsilon_0))} = 0.$$

Поскольку $\pi_{n-1}(B_0^{n-1}(\varepsilon_0))$ – открытое подмножество аналитической поверхности Π_{n-1} , имеем $f|_{\Pi_{n-1}} = 0$. Таким образом,

$$f\left(x_1; \dots; x_{n-2}; (x_1 + \dots + x_{n-2}) \sin\left(\frac{1}{(x_1 + \dots + x_{n-2})}\right); x_n\right) = 0 \quad (3.6)$$

для всех указанных в (3.5) значений $x_1, \dots, x_{n-2}$ и значений $x_n \in (0, 1/\sqrt{2})$. Ограничения на $x_1, \dots, x_n$ здесь выбраны так, что $(x_1; \dots; x_n) \in B_0^n$. Из (3.6) следует, что для любого фиксированного $\bar{x}_n \in (0, 1/\sqrt{2})$ и любого набора $(\beta_1; \dots; \beta_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$ такого, что

$$\beta_j > 0, \quad 1 \leq j \leq n-1, \quad \sum_{j=1}^{n-1} \beta_j^2 = 1, \quad \beta_{n-1} < \sum_{j=1}^{n-2} \beta_j, \quad (3.7)$$

уравнение

$$f(\beta_1 t; \dots; \beta_{n-2} t; \beta_{n-1} t; \bar{x}_n) = 0 \quad (3.8)$$

имеет последовательность корней $\{t_l(\beta_1; \dots; \beta_{n-1})\}_{l=1}^\infty$, где

$$\sin\left(\frac{1}{(\beta_1 + \dots + \beta_{n-2})t_l(\beta_1; \dots; \beta_{n-1})}\right) = \frac{\beta_{n-1}}{\beta_1 + \dots + \beta_{n-2}}, \quad \lim_{l \rightarrow \infty} t_l(\beta_1; \dots; \beta_{n-1}) = 0.$$

Поскольку функция $f(\beta_1 t; \dots; \beta_{n-2} t; \beta_{n-1} t; \bar{x}_n)$ аналитична при $|t| < \varepsilon_1$ с некоторым $\varepsilon_1 > 0$, это означает, что равенство (3.8) имеет место тождественно по $t \in (0, \varepsilon_1)$ для всех $\bar{x}_n \in (0, 1/\sqrt{2})$ и всех указанных в (3.7) векторов $(\beta_1; \dots; \beta_{n-1})$. Остается заметить, что соответствующие точки $\{(\beta_1 t; \dots; \beta_{n-2} t; \beta_{n-1} t; \bar{x}_n)\}$ образуют открытое подмножество шара B_0^n . Теорема доказана.

Нетрудно видеть, что кривая $M_{[n]}$ является также многообразием единственности для комплекснозначных функций в $\mathbb{C}^n = \mathbb{R}^n + i\mathbb{R}^n$, голоморфных в комплексной окрестности шара $B_0^n \subset \mathbb{C}^n$ [16; с. 91]. В этом смысле конструкция примера 3.2 дополняет известные схемы построения одномерных многообразий единственности для голоморфных функций в областях $\mathbb{C}^n$, см., например, [17; с. 93].

4. Приложение. Обратимся вновь к уравнению (1.2), считая теперь, что $y = z \in Y$, т.е. что местоположения источника и приемника совпадают, и оба они пробегают многообразие Y . Таким образом, здесь

$$(y; z) \in \mathcal{L} \equiv \{(\eta; \zeta) \in \mathbb{R}^6 : \eta = \zeta \in Y\}.$$

На практике это соответствует эксперименту по обратному рассеянию, проводимому с использованием подвижного источника-детектора. Известно, что в случае, когда Y есть плоскость в $\mathbb{R}^3$, $Y \cap \overline{D} = \emptyset$, соответствующее уравнение

$$\int_D \frac{\xi(x) dx}{|y - x|^2} = g(y; y), \quad y \in Y, \quad (4.1)$$

имеет бесконечно много нетривиальных решений. Таким образом, схема эксперимента по зондированию неоднородности с выбором в качестве Y плоскости недостаточно информативна. В то же время, если точка y в (4.1) пробегает трехмерное открытое множество в $\mathbb{R}^3 \setminus \overline{D}$, то уравнение (4.1) имеет не более одного решения [6; с. 167]. Заметим, что функция в левой части (4.1) является аналитической по $y \in \mathbb{R}^3 \setminus \overline{D}$. Изложенное в примере 3.1 и теореме 3.1 позволяет понизить до единицы размерность аналитического многообразия источников-детекторов. Без ограничения общности можем считать, что $B^3 \cap \overline{D} = \emptyset$. Пусть $M \subset B^3$ – кривая единственности для аналитических функций в B_0^3 , построенная в примере 3.1. Тогда уравнение (4.1) с $y \in Y = M$ имеет не более одного решения. Действительно, если ξ_1 и ξ_2 есть два различных кусочно-непрерывных решения, то

$$\int_D \frac{(\xi_1(x) - \xi_2(x)) dx}{|y - x|^2} = 0, \quad y \in M. \quad (4.2)$$

По построению M , аналитическая функция в левой части (4.2) обращается в нуль и для всех $y \in \mathbb{R}^3 \setminus \overline{D}$. Поэтому в силу упомянутого выше результата из [6], $\xi_1(x) = \xi_2(x)$ для п.в. $x \in D$. Тот же вывод сохраняется и в случае, когда в (4.1) $y \in Y \equiv \{y_l\}_{l=1}^\infty$, где $\{y_l\}_{l=1}^\infty \subset M$ – произвольная последовательность точек, имеющая в M предельную точку. В последнем случае источники-детекторы последовательно пробегают счетное число позиций.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] А. Б. Бакушинский, М. Ю. Кокурин, *Итерационные методы решения некорректных операторных уравнений с гладкими операторами*, Едиториал УРСС, М., 2002.
- [2] В. Г. Романов, “Теоремы единственности для некоторых обратных задач”, *Докл. РАН*, **380**:5 (2001), 596–598.
- [3] В. Г. Романов, *Устойчивость в обратных задачах*, Научный Мир, М., 2005.
- [4] М. М. Лаврентьев, В. Г. Романов, С. П. Шипатский, *Некорректные задачи математической физики и анализа*, Наука, М., 1980.
- [5] М. М. Лаврентьев, “Об одном классе обратных задач для дифференциальных уравнений”, *Докл. АН СССР*, **160**:1 (1965), 32–35.
- [6] А. Г. Рамм, *Многомерные обратные задачи рассеяния*, Мир, М., 1994.
- [7] М. Ю. Кокурин, С. К. Паймеров, “Об обратной коэффициентной задаче для волнового уравнения в ограниченной области”, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **48**:1 (2008), 115–126.

- [8] М. Ю. Кокурин, “О корреляционном методе исследования случайных волновых полей”, *Сиб. журн. индустр. матем.*, **14**:4 (2011), 24–31.
- [9] S. G. Krantz, H. R. Parks, *A Primer of Real Analytic Functions*, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 2002.
- [10] А. И. Янушаускас, *Аналитические и гармонические функции многих переменных*, Наука, Новосибирск, 1981.
- [11] М. Yu. Kokurin, “On a multidimensional integral equation with data supported by low-dimensional analytic manifolds”, *J. Inverse Ill-Posed Probl.*, **21**:1 (2013), 125–140.
- [12] С. Л. Соболев, *Введение в теорию кубатурных формул*, Наука, М., 1974.
- [13] D. Khavinson, *Holomorphic Partial Differential Equations and Classical Potential Theory*, Universidad de La Laguna, La Laguna, 1996.
- [14] D. Khavinson, H. S. Shapiro, “Dirichlet’s problem when the data is an entire function”, *Bull. London Math. Soc.*, **24**:5 (1992), 456–468.
- [15] D. Khavinson, H. S. Shapiro, “On a uniqueness property of harmonic functions”, *Comput. Methods Funct. Theory*, **8**:1 (2008), 143–150.
- [16] Б. В. Шабат, *Введение в комплексный анализ. Ч. 2. Функции нескольких переменных*, Наука, М., 1976.
- [17] У. Рудин, *Теория функций в полукруге*, Мир, М., 1974.

М. Ю. Кокурин

Марийский государственный университет,

г. Йошкар-Ола

E-mail: kokurinm@yandex.ru

Поступило

22.02.2014

Исправленный вариант

28.10.2014