Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. В. Жижиашвили, Об отсутствии слабого типа (1.1) у некоторых классических операторов, возникающих в многомерном гармоническом анализе, *Матем. заметки*, 2004, том 76, выпуск 2, 183–195

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm106>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.90.164.192

26 апреля 2023 г., 12:48:46

УДК 517.518

ОБ ОТСУТСТВИИ СЛАБОГО ТИПА (1.1) У НЕКОТОРЫХ КЛАССИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ, ВОЗНИКАЮЩИХ В МНОГОМЕРНОМ ГАРМОНИЧЕСКОМ АНАЛИЗЕ

Л. В. Жижиашвили

В настоящей статье исследуется вопрос о слабом типе (1.1) Колмогорова для многомерных операторов, встречающихся в анализе Фурье.

Библиография: 26 названий.

Работа посвящается 100-летию со дня рождения А. Н. Колмогорова.

1. Обозначения и определения. Символом $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, будем обозначать n -мерное евклидово пространство с обычными линейными операциями, $\mathbb{R}^1 \equiv]-\infty, +\infty[$. Точки $\mathbb{R}^n$ обозначаются через $x = (x_1, \dots, x_n)$, $s = (s_1, \dots, s_n)$, $t = (t_1, \dots, t_n)$, $\dots$. В частности, $m = (m_1, \dots, m_n)$, $m_i \in \mathbb{N}_0$, $p = (p_1, \dots, p_n)$, $p_i \in \mathbb{N}_0$, $r = (r_1, \dots, r_n)$, $r_i \in [0, 1[$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $\alpha_i \in]0, +\infty[$, $i = \overline{1, n}$. Ниже будут использованы некоторые обозначения из работ [1], [2]. Пусть $M = \{1, 2, \dots, n\}$ и B – его произвольное подмножество; будем считать, что $B' = M \setminus B$, $|B| = \text{Card } B$. Для любого $x \in \mathbb{R}^n$ и непустого подмножества $B \subset M$ символом x_B обозначаем точку из $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, координаты которой с индексами из множества B совпадают с соответствующими координатами точки x , координаты же с индексами из множества B' – нули, причем $x_M \equiv x$. Далее, символом $\mathbb{R}^n(B)$ обозначаем гиперплоскость, натянутую на координатные векторы, индексы которых составляют множество B . Предполагаем, что

$$\begin{aligned} \mathbb{T}^n &= [-\pi, \pi]^n, \quad \mathbb{T}^1 \equiv \mathbb{T} = [-\pi, \pi], \quad \mathbb{T}^n(B) = \mathbb{T}^n \cap \mathbb{R}^n(B), \\ \mathbb{T}^n(\varepsilon) &= \bigtimes_{i=1}^n \{[-\varepsilon, \varepsilon_i] \cup [\varepsilon_i, \pi]\}, \quad \varepsilon_i \in [0, \pi[, \quad i = \overline{1, n}, \\ \mathbb{T}^n(B, \varepsilon) &= \mathbb{T}^n(\varepsilon) \cap \mathbb{R}^n(B). \end{aligned}$$

Будем рассматривать вещественные функции $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, причем если f – функция периодическая с периодом 2π относительно каждой координаты точки x , то она рассматривается на $\mathbb{T}^n$.

Далее, если функция $f \in L(\mathbb{T}^n)$, то символом $\sigma_n[f]$ (см., например, [1, с. 124]) обозначается n -кратный тригонометрический ряд Фурье функции f , т.е.

$$\sigma_n[f] = \sum_{p \geq 0} 2^{-\lambda(p)} \sum_{B \subset M} a_p^{(B)}(f) \prod_{i \in B} \cos p_i x_i \prod_{j \in B'} \sin p_j x_j, \quad (1.1)$$

где $\lambda(p)$ – число равных нулю координат точки $p \in \mathbb{N}_0^n$, а

$$a_p^{(B)}(f) = \frac{1}{\pi^n} \int_{\mathbb{T}^n} f(x) \prod_{i \in B} \cos p_i x_i \prod_{j \in B'} \sin p_j x_j dx \quad (1.2)$$

(здесь и далее произведения по пустому множеству индексов считаются равными 1).

Если $1 \leq |B| \leq n$, то через $\bar{\sigma}_n[f, B]$ (см. [1, с. 124]) будем обозначать n -кратный сопряженный тригонометрический ряд по тем переменным, индексы которых составляют множество B (в частности, $\sigma_1[f] \equiv \sigma[f]$, $\bar{\sigma}_1[f, B] \equiv \bar{\sigma}[f]$).

Для $m \in \mathbb{N}_0^n$ символами $S_m(x, f)$ и $\bar{S}_m(x, f, B)$, $1 \leq |B| \leq n$, обозначаются соответственно прямоугольные частные суммы рядов $\sigma_n[f]$ и $\bar{\sigma}_n[f, B]$, т.е.

$$S_m(x, f) = \sum_{p \geq 0}^m A_p(x, f) = \sum_{p_1=0}^{m_1} \cdots \sum_{p_n=0}^{m_n} A_p(x, f), \quad (1.3)$$

$$\bar{S}_m(x, f, B) = \sum_{p \geq 0}^m \bar{A}_p(x, f, B) = \sum_{p_1=0}^{m_1} \cdots \sum_{p_n=0}^{m_n} \bar{A}_p(x, f, B), \quad (1.4)$$

где

$$A_p(x, f) = 2^{-\lambda(p)} \sum_{B \subset M} a_p^{(B)}(f) \prod_{i \in B} \cos p_i x_i \prod_{j \in B'} \sin p_j x_j, \quad (1.5)$$

а $\bar{A}_p(x, f, B)$ – его сопряженное по переменным с индексами из множества B . Далее, если $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $\alpha_i \in]0, +\infty[$, $i = \overline{1, n}$, то через $\sigma_m^\alpha(x, f)$ и $t_m^\alpha(x, f, B)$ будут обозначены соответственно n -кратные средние Чезаро порядка α рядов $\sigma_n[f]$ и $\bar{\sigma}_n[f, B]$:

$$\sigma_m^\alpha(x, f) = \left(\prod_{i=1}^n A_{m_i}^{\alpha_i} \right)^{-1} \sum_{p \geq 0}^m \prod_{i=1}^n A_{m_i-p_i}^{\alpha_i-1} S_p(x, f), \quad (1.6)$$

$$t_m^\alpha(x, f, B) = \left(\prod_{i=1}^n A_{m_i}^{\alpha_i} \right)^{-1} \sum_{p \geq 0}^m \prod_{i=1}^n A_{m_i-p_i}^{\alpha_i-1} \bar{S}_p(x, f, B), \quad (1.7)$$

где

$$A_\nu^0 = 1, \quad A_\nu^\beta = \frac{(\beta+1) \cdots (\beta+\nu)}{\nu!}, \quad \beta \in]0, +\infty[. \quad (1.8)$$

Используя известные обозначения (см., например, [3, с. 157–160]) и принимая во внимание (1.1)–(1.8), будем иметь

$$\sigma_m^\alpha(x, f) = \frac{1}{\pi^n} \int_{\mathbb{T}^n} f(x+s) \prod_{i=1}^n K_{m_i}^{\alpha_i}(s_i) ds, \quad (1.9)$$

$$t_m^\alpha(x, f, B) = \frac{(-1)^{|B|}}{\pi^n} \int_{\mathbb{T}^n} f(x+s) \prod_{i \in B'} K_{m_i}^{\alpha_i}(s_i) \prod_{j \in B} \tau_{m_j}^{\alpha_j}(s_j) ds, \quad (1.10)$$

где для $s_i \neq 0$, $i = \overline{1, n}$,

$$K_{m_i}^{\alpha_i}(s_i) = \frac{1}{A_{m_i}^{\alpha_i}} \sum_{p_i=0}^{m_i} A_{m_i-p_i}^{\alpha_i-1} \frac{\sin(p_i + 1/2)s_i}{2 \sin(s_i/2)}, \quad (1.11)$$

$$\tau_{m_i}^{\alpha_i}(s_i) = \frac{1}{A_{m_i}^{\alpha_i}} \sum_{p_i=0}^{m_i} A_{m_i-p_i}^{\alpha_i-1} \frac{\cos(s_i/2) - \cos(p_i + 1/2)s_i}{2 \sin(s_i/2)}. \quad (1.12)$$

Кратные средние Абеля–Пуассона рядов $\sigma_n[f]$, $\overline{\sigma}_n[f, B]$ обозначаем соответственно через $f(x, r)$, $\overline{f}(x, r, B)$:

$$f(x, r) = \frac{1}{\pi^n} \int_{\mathbb{T}^n} f(x + s) \prod_{i=1}^n \mathcal{P}(r_i, s_i) ds, \quad (1.13)$$

$$\overline{f}(x, r, B) = \frac{(-1)^{|B|}}{\pi^n} \int_{\mathbb{T}^n} f(x + s) \prod_{i \in B'} \mathcal{P}(r_i, s_i) \prod_{j \in B} \mathcal{Q}(r_j, s_j) ds, \quad (1.14)$$

где

$$\mathcal{P}(r_i, s_i) = \frac{1 - r_i^2}{2(1 - 2r_i \cos s_i + r_i^2)}, \quad (1.15)$$

$$\mathcal{Q}(r_i, s_i) = \frac{r_i \sin s_i}{1 - 2r_i \cos s_i + r_i^2}, \quad r_i \in [0, 1[, \quad i = \overline{1, n}. \quad (1.16)$$

Положим также

$$F_1(x) \equiv F_1(x, f, B, \alpha) = \sup_m |t_m^\alpha(x, f, B)|, \quad (1.17)$$

$$F_2(x) \equiv F_2(x, f, B) = \sup_r |\overline{f}(x, r, B)|. \quad (1.18)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1.1. Функции F_1 и F_2 определены формально, они могут быть бесконечными почти всюду на $\mathbb{T}^n$.

Если $p \in]0, +\infty[$ – некоторое число, а функция $f \in L^p(\mathbb{T}^n)$, то будем предполагать, что

$$\|f\|_p = \left\{ \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{T}^n} |f(x)|^p dx \right\}^{1/p}.$$

В случае $p \in [1, +\infty[$ пространство $L^p(\mathbb{T}^n)$ банахово; если же $p \in]0, 1[$, то $L^p(\mathbb{T}^n)$ ненормируемо.

Пусть функция $f \in L(\mathbb{T}^n)$. Выражение

$$\begin{aligned} \overline{f}_B(x) &= \left(-\frac{1}{2\pi}\right)^{|B|} \int_{\mathbb{T}^n(B)} f(x + s_B) \prod_{i \in B} \operatorname{ctg} \frac{s_i}{2} ds_i \\ &= \left(-\frac{1}{2\pi}\right)^{|B|} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{T}^n(B, \varepsilon)} f(x + s_B) \prod_{i \in B} \operatorname{ctg} \frac{s_i}{2} ds_i \end{aligned} \quad (1.19)$$

будем называть *сопряженной функцией* n переменных относительно тех координат точки x , индексы которых составляют множество $B \subset M$, $1 \leq |B| \leq n$. Положим

$$\overline{f}_B(x, \varepsilon) = \left(-\frac{1}{2\pi}\right)^{|B|} \int_{\mathbb{T}^n(B, \varepsilon)} f(x + s_B) \prod_{i \in B} \operatorname{ctg} \frac{s_i}{2} ds_i, \quad (1.20)$$

$$F_3(x) \equiv F_3(x, f, B) = \sup_{0 < \varepsilon_i < \pi} |\overline{f}_B(x, \varepsilon)|, \quad i \in B, \quad 1 \leq |B| \leq n. \quad (1.21)$$

Различные вопросы, связанные с $\bar{f}_B$ и F_3 (в частности, вопрос существования $\bar{f}_B$) довольно подробно изложены в работе [1]. Отметим, что в отличие от одномерного случая, где согласно результату Привалова [4] сопряженная функция $\bar{f}$ существует почти всюду для любой функции $f \in L(\mathbb{T})$, функции $\bar{f}_B(x)$ и $F_3(x, f, B)$ в (1.19) и (1.21) при $n > 1$ определены формально и могут быть бесконечными почти всюду.

Далее, как обычно, $\mathbb{C}^n$, $n \geq 2$, обозначает декартово произведение n экземпляров поля комплексных чисел $\mathbb{C}$. Точки $\mathbb{C}^n$ обозначаем через

$$z = (z_1, \dots, z_n), \quad \tau = (\tau_1, \dots, \tau_n), \quad \dots$$

В дальнейшем (см., например, [5, с. 473–474], [6, с. 9–11]) U^n обозначает открытое подмножество из $\mathbb{C}^n$, которое состоит из всех точек $\mathbb{C}^n$, для которых $|z_k| < 1$, $k = \overline{1, n}$. Граница U^n будет множеством всех декартовых произведений окружностей $|z_k| = 1$ и кругов $|z_j| < 1$, $j \neq k$. Подмножество границы U^n , определенное условием $|z_k| = 1$, $k = \overline{1, n}$, есть $\mathbb{T}^n$.

Ниже будем предполагать, что

$$z_\nu = r_\nu e^{ix_\nu}, \quad \tau_\nu = e^{is_\nu}, \quad r_\nu \in [0, 1[, \quad \nu = \overline{1, n}.$$

Оператор

$$f(z) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int_{\mathbb{T}^n} f(s) \prod_{\nu=1}^n \frac{\tau_\nu + z_\nu}{\tau_\nu - z_\nu} ds \quad (1.22)$$

называют *n-кратным оператором Шварца* с плотностью $f \in L(\mathbb{T}^n)$. Учитывая (1.13) и (1.14), оператор (1.22) можно представить так:

$$f(z) = \sum_{|B| \equiv 0 \pmod{2}} (-1)^{|B|/2} \bar{f}(x, r, B) + i \sum_{|B| \equiv 1 \pmod{2}} (-1)^{(|B|-1)/2} \bar{f}(x, r, B). \quad (1.23)$$

В дальнейшем (формально) будем предполагать, что

$$F_4(x) \equiv F_4(x, f) = \sup_r |f(z)|. \quad (1.24)$$

Если $f \in L(\mathbb{T}^n)$ и $B = \{i\}$, то через $M_B(f) \equiv M_B(x, f) = M_i(x, f)$, $1 \leq i \leq n$, обозначается максимальный оператор Харди–Литтлвуда по координате x_i , т.е.

$$\begin{aligned} M_B(f) &\equiv M_B(x, f) \equiv M_i(x, f) \\ &= \sup_{0 < |h_i| < \pi} \frac{1}{h_i} \int_{x_i}^{x_i+h_i} |f(x_1, \dots, s_i, \dots, x_n)| ds_i, \quad x_i \in \mathbb{T}. \end{aligned} \quad (1.25)$$

Если же $2 \leq |B| \leq n$, то для $B = \{i_1, i_2, \dots, i_k\} \subset M$ полагаем

$$M_B(x, f) \equiv M_B(x, f) = M_{i_1} \cdots M_{i_k}(x, f). \quad (1.26)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1.2. Харди и Литтлвуд [7] для функции $f \in L(\mathbb{T})$ определили новую функцию (оператор) $M(x, f)$ и установили ряд фундаментальных результатов. В многомерном случае аналоги оператора Харди–Литтлвуда рассматривались Зигмундом [9], Саксом [8], Иессеном, Марцинкевичем, Зигмундом [10], Сокол–Соколовским [11], Гусманом [12], Стейном [13], Стейном и Вейсом [14] и другими. В монографии Зигмунда [5, гл. 17] изложены фундаментальные утверждения в рассматриваемом направлении.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.3. В дальнейшем через $A, A(p), A(\alpha), A(n), A(p, \alpha), A(p, n), A(p, n, \alpha), A_i(p), A_i(p, \alpha), A_i(p, n, \alpha), \dots, i \in \mathbb{N}$, обозначаются положительные конечные абсолютные или же зависящие лишь от указанных параметров постоянные.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.4. Ниже предполагается, что dx – мера Лебега в пространстве $\mathbb{R}^n$, а $\mu_n(E)$ – мера множества $E \subset \mathbb{R}^n$.

2. Постановка вопроса. В 1925 г. Колмогоров [15] установил следующие фундаментальные результаты.

Если функция $f \in L(\mathbb{T})$, то

а) для любого $p \in]0, 1[$ функция $\bar{f} \in L^p(\mathbb{T})$ и

$$\|\bar{f}\|_p \leq A(p)\|f\|_1; \quad (2.1)$$

б) справедливо соотношение

$$\mu_1[\{x : |\bar{f}(x)| \geq y > 0, x \in \mathbb{T}\}] \leq \frac{A\|f\|_1}{y}. \quad (2.2)$$

Эти результаты стали источниками последующих глубоких исследований. Если $n = 1$ и функции $F_1, F_2, F_3, F_4, M_B(f)$ определены согласно (1.17), (1.18), (1.21), (1.24), (1.26), то (см., например, [3, с. 442–444], [12, с. 40], [16, с. 129–135]) соотношения (2.1) и (2.2) остаются в силе и для $F_i, i = 1, 2, 3, 4, M_B(f)$. Таким образом, операторы $\bar{f}_B, F_i, i = 1, 2, 3, 4, M_B(f)$ при $n = 1$ имеют слабый тип (1.1).

Естественно возник вопрос о наличии слабого типа (1.1) у операторов $\bar{f}_B, F_i, i = 1, 2, 3, 4, M_B(f)$ в многомерном случае при $n \geq 2$.

Из результатов работы [1, с. 119–160, 182–201] следует, что при $\beta \in [0, n - 1[$ для функции $f \in L(\log^+ L)^\beta(\mathbb{T}^n)$ сопряженная функция $\bar{f}_B$ (стало быть, и F_3) с $|B| \in]\beta + 1, n]$ может не существовать почти всюду на $\mathbb{T}^n$. Что касается операторов F_1, F_2, F_4 , они могут быть бесконечными почти всюду на $\mathbb{T}^n$ при произвольном непустом $B \subset M$. Опираясь на результаты работы [10], заключаем, что оператор $M_B(f)$ с $|B| \in]\beta + 1, n]$ может не существовать почти всюду на $\mathbb{T}^n$.

Допустим, для некоторой функции $f \in L(\mathbb{T}^n)$ все операторы $\bar{f}_B, F_i, i = 1, 2, 3, 4, M_B(f)$ существуют почти всюду на $\mathbb{T}^n$. Тогда имеет ли место хотя бы для одного из этих операторов оценка слабого типа?

Для $\bar{f}_B$ этот вопрос исследован в работах [17], [18], [1, с. 161–162], а в настоящей работе он исследуется для всех отмеченных операторов.

3. Основные теоремы. Ниже будем использовать следующие обозначения:

$$E(\bar{f}_B, y, \mathbb{T}^n) = \{x : |\bar{f}_B(x)| \geq y > 0, x \in \mathbb{T}^n\}, \quad (3.1)$$

$$E(F_i, y, \mathbb{T}^n) = \{x : |F_i(x)| \geq y > 0, x \in \mathbb{T}^n\}, \quad i = 1, 2, 3, 4, \quad (3.2)$$

$$E(M_B(f, x), y, \mathbb{T}^n) = \{x : M_B(f, x) \geq y > 0, x \in \mathbb{T}^n\}. \quad (3.3)$$

Затем, будем предполагать, что

$$\varphi(B, y) = \frac{(\ln y)^{|B|-1}}{(\ln \ln y)^n}, \quad 1 \leq |B| \leq n, \quad (3.4)$$

$$\varphi(y) \equiv \varphi(M, y) = \frac{(\ln y)^{n-1}}{(\ln \ln y)^n}, \quad 0 < y_0 \leq y \leq +\infty. \quad (3.5)$$

Справедлива следующая

ТЕОРЕМА 3.1. *Существует функция $f \in L(\mathbb{T}^n)$, для которой все операторы $\overline{f}_B$, F_i , $i = 1, 2, 3, 4$, $M_B(f)$ с $2 \leq |B| \leq n$ существуют и конечны почти всюду на $\mathbb{T}^n$, причем для любого числа $p \in]0, 1[$ они принадлежат классу $L^p(\mathbb{T}^n)$,*

$$\|F_1\|_p \leq A(p, n, \alpha) \|f\|_1, \quad (3.6)$$

$$\|F_i\|_p \leq A(p, n) \|f\|_1, \quad i = 2, 3, 4, \quad (3.7)$$

$$\|M_B(f)\|_p \leq A(p, n) \|f\|_1, \quad (3.8)$$

однако

$$\mu_n[E(\overline{f}_B, y, \mathbb{T}^n)] \geq A(n) \frac{\varphi(B, y)}{y} \|f\|_1, \quad (3.9)$$

$$\mu_n[E(F_i, y, \mathbb{T}^n)] \geq A(n) \frac{\varphi(y)}{y} \|f\|_1, \quad i = 1, 2, 3, 4, \quad (3.10)$$

$$\mu_n[E(M_B(f), y, \mathbb{T}^n)] \geq A(n) \frac{\varphi(B, y)}{y} \|f\|_1. \quad (3.11)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала заметим, что в силу (1.21) и (3.9) будет верным и соотношение

$$\mu_n[E(F_3, y, \mathbb{T}^n)] \geq A(n) \frac{\varphi(B, y)}{y} \|f\|_1. \quad (3.12)$$

Пусть

$$A(\alpha) = \max_{1 \leq i \leq n} \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{T}} |K_{m_i}^{\alpha_i}(t_i)| dt_i,$$

где $K_{m_i}^{\alpha_i}(t_i)$, $\alpha_i \in]0, +\infty[$, $i = \overline{1, n}$, определено согласно (1.11) (для неотрицательных ядер Чезаро число $A(\alpha) = 1$). Положим

$$\delta \equiv \delta(\alpha) = \exp[-\exp(32\pi^2 A(\alpha))]. \quad (3.13)$$

Если $x_i \in]0, \delta]$, $i = \overline{1, n}$, то

$$1 - \frac{16\pi^2 A(\alpha)}{\ln \ln(1/x_i)} \geq \frac{1}{2}. \quad (3.14)$$

Предположим, что функция $g: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ определена соотношением

$$g(t) = \begin{cases} \frac{1}{t \ln(1/t) (\ln \ln(1/t))^2}, & t \in]0, \delta], \\ 0, & t \in \{[-\pi, \pi] \setminus]0, \delta]\}, \end{cases} \quad (3.15)$$

и $g(t + 2\pi) = g(t)$ для всех t . Положим

$$f(x) = \prod_{i=1}^n g(x_i). \quad (3.16)$$

Согласно (3.15) будем иметь $f(x) > 1$ на $]0, \delta]^n$, $n \geq 2$, $f \in L(\mathbb{T}^n)$ и $\|f\|_1 < 1$.

Имеем

$$\bar{f}_B(x) = \left(-\frac{1}{2\pi}\right)^{|B|} \prod_{i \in B} \bar{g}(x_i) \prod_{j \in B'} g(x_j). \quad (3.17)$$

Пусть $\sigma_{m_i}^{\alpha_i}(\cdot, g)$ и $t_{m_i}^{\alpha_i}(\cdot, g)$ обозначают соответственно (C, α_i) -средние рядов $\sigma[g]$ и $\bar{\sigma}[g]$, $\alpha_i \in]0, +\infty[$, $i = \overline{1, n}$, а $f(\cdot, r_i)$ и $\bar{f}(\cdot, r_i)$ – средние Абеля–Пуассона этих рядов. Согласно (1.14), (1.23) будем иметь

$$t_m^\alpha(x, f, B) = \prod_{i \in B} t_{m_i}^{\alpha_i}(x_i, g) \prod_{j \in B'} \sigma_{m_j}^{\alpha_j}(x_j, g), \quad (3.18)$$

$$\bar{f}(x, r, B) = \prod_{i \in B} \bar{f}(x_i, r_i) \prod_{j \in B'} f(x_j, r_j), \quad (3.19)$$

$$f(z) = \prod_{i=1}^n g(z_i). \quad (3.20)$$

Используя результаты, установленные в одномерном случае (см. [7] и [3, с. 249–253, 242–244]), согласно (3.17), (3.18)–(3.20) и (1.17), (1.18), (1.21), (1.23), (1.24), (1.26), заключаем справедливость соотношений (3.6)–(3.8).

Далее, если $x_i \in]0, \delta]$, то

$$\begin{aligned} |\bar{g}(-x_i)| &\geq \frac{1}{2\pi} \int_0^{x_i} g(t_i) \operatorname{ctg} \frac{t_i + x_i}{2} dt_i \\ &> \frac{1}{4\pi x_i} \int_0^{x_i} g(t_i) dt_i = \frac{1}{4\pi x_i \ln \ln(1/x_i)}, \quad i = \overline{1, n}. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Предположим, что $x_0 \equiv x_{B'} + (-x)_B$. Тогда в силу (3.17) и (3.21) находим

$$|\bar{f}_B(x_0)| > \frac{1}{(4\pi)^{|B|}} \prod_{i \in B} \frac{1}{x_i \ln \ln(1/x_i)} \prod_{j \in B'} g(x_j). \quad (3.22)$$

Если $|B| = 1$, то согласно (2.2) и (3.22) с применением теоремы Фубини (см., например, [19, с. 118–135]) заключаем

$$\mu_n[E(\bar{f}_B, y, \mathbb{T}^n)] \leq A(n) \frac{\|f\|_1}{y}.$$

Аналогично, опираясь на хорошо известные результаты (см., например, [3, с. 442–444], [12, с. 40], [16, с. 129–135]) и теорему Фубини, заключаем, что при $|B| = 1$ верны следующие соотношения

$$\begin{aligned} \mu_n[E(F_1, y, \mathbb{T}^n)] &\leq \frac{A(n, \alpha)}{y} \|f\|_1, \\ \mu_n[E(F_i, y, \mathbb{T}^n)] &\leq \frac{A(n)}{y} \|f\|_1, \quad i = 2, 3, 4, \\ \mu_n[E(M_B(f), y, \mathbb{T}^n)] &\leq \frac{A(n)}{y} \|f\|_1. \end{aligned}$$

Таким образом, для $n \geq 2$ существенными являются те случаи, когда $2 \leq |B| \leq n$.

При $n = 2$, $|B| = 2$ и в силу (3.22) будем иметь

$$\begin{aligned} E(\bar{f}_B, y, \mathbb{T}^2) &= E(\bar{f}_M, y, \mathbb{T}^2) \\ &\supset \left\{ x : \frac{1}{16\pi^2 x_1 x_2 \ln \ln(1/x_1) \ln \ln(1/x_2)} \geq y > 0, x \in \mathbb{T}^2 \right\} \\ &= \left\{ x : x_2 \leq \frac{1}{16\pi^2 y x_1 \ln \ln(1/x_1) \ln \ln(1/x_2)}, x \in \mathbb{T}^2 \right\}. \end{aligned}$$

Положим

$$u(x, y, \mathbb{T}^2) = \left\{ x : x_2 \leq \frac{1}{16\pi^2 y x_1 \ln \ln(1/x_1) \ln \ln(1/x_2)}, x \in \mathbb{T}^2 \right\}, \quad (3.23)$$

$$u_1(x, y, \mathbb{T}^2) = \left\{ x : x_2 \leq \frac{1}{16\pi^2 y x_1 \ln \ln(1/x_1) \ln \ln(1/x_2)}, x_2 \leq x_1, x \in \mathbb{T}^2 \right\}, \quad (3.24)$$

$$u_2(x, y, \mathbb{T}^2) = \left\{ x : x_2 \leq \frac{1}{16\pi^2 y x_1 \ln \ln(1/x_1) \ln \ln(1/x_2)}, x_2 > x_1, x \in \mathbb{T}^2 \right\}, \quad (3.25)$$

$$u_3(x, y, \mathbb{T}^2) = \left\{ x : x_2 \leq \frac{1}{16\pi^2 y x_1 (\ln \ln(1/x_1))^2}, x \in \mathbb{T}^2 \right\}. \quad (3.26)$$

Нетрудно заметить, что

$$\mu_2[u_i(x, y, \mathbb{T}^2)] \leq \mu_2[u(x, y, \mathbb{T}^2)], \quad i = 1, 2, \quad (3.27)$$

$$\mu_2[u_3(x, y, \mathbb{T}^2)] \leq \mu_2[u_2(x, y, \mathbb{T}^2)]. \quad (3.28)$$

Обозначим через $c_1(y)$ наименьшее положительное число, для которого

$$\delta = \frac{1}{16\pi^2 y c_1(y) (\ln \ln(1/c_1(y)))^2},$$

а через $c_2(y)$ наименьшее положительное число, для которого

$$c_2^2(y) \left(\ln \ln \frac{1}{c_2(y)} \right)^2 = \frac{1}{16\pi^2 y}.$$

Легко видеть, что

$$c_1(y) < \frac{1}{16\pi^2 y \delta}, \quad c_2(y) > \frac{1}{4\pi \sqrt[3]{y}}, \quad 0 < y_0 \leq y < +\infty.$$

Стало быть, справедливо следующее соотношение:

$$\begin{aligned} \mu_2[u_3(x, y, \mathbb{T}^2)] &\geq A \int_{1/(\pi \delta y)}^{1/(4\pi \sqrt[3]{y})} \left[\frac{1}{y x_1 (\ln \ln(1/x_1))^2} - x_1 \right] dx_1 \\ &\geq A_1 \frac{\ln y}{y (\ln \ln y)^2}, \quad 0 < y_0 \leq y < +\infty. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Таким образом, согласно (3.23), (3.26), (3.28) и (3.29) находим

$$\mu_2[E(\bar{f}_B, y, \mathbb{T}^2)] \geq A \frac{\ln y}{y(\ln \ln y)^2}, \quad 0 < y_0 \leq y < +\infty. \quad (3.30)$$

Пусть теперь $n \geq 3$ и $|B| = 2$. Учитывая (3.15)–(3.17) и схему доказательства для случая $n = |B| = 2$, по теореме Фубини

$$\mu_n[E(\bar{f}_B, y, \mathbb{T}^n)] \geq A(n) \frac{\ln y}{y(\ln \ln y)^n}, \quad 0 < y_0 \leq y < +\infty.$$

Если же $2 < |B| \leq n$, то, анализируя схему доказательства в случае $|B| = 2$, заключаем справедливость (3.9).

Для $x_i \in]0, \delta]$, $i = \overline{1, n}$, согласно (3.18) будем иметь

$$\sup_m |t_m^\alpha(-x, f, B)| = \sup_{m_i} \left| \prod_{i \in B} t_{m_i}^{\alpha_i}(-x_i, g) \right| \sup_{m_j} \left| \prod_{j \in B'} \sigma_{m_j}^{\alpha_j}(-x_j, g) \right|. \quad (3.31)$$

Выбираем $m_j \in \mathbb{N}$, $j \in B'$ так, что

$$\frac{1}{m_j + 1} < 4x_j < \frac{1}{m_j}, \quad j \in B'. \quad (3.32)$$

Стало быть, $4(m_j + 1/2)x_j < \pi/2$. Тогда учитывая (1.8), (1.11), (3.13)–(3.15) и (3.32), находим

$$\begin{aligned} \sup_{m_j} |\sigma_{m_j}^{\alpha_j}(-x_j, g)| &= \sup_{m_j} \left| \frac{1}{\pi} \int_0^{x_j} g(t_j) K_{m_j}^{\alpha_j}(t_j + x_j) dt_j + \frac{1}{\pi} \int_{x_j}^{\delta} g(t_j) K_{m_j}^{\alpha_j}(t_j + x_j) dt_j \right| \\ &\geq \sup_{m_j} \left| \frac{2}{\pi^2 A_{m_j}^{\alpha_j}} \sum_{p_j=0}^{m_j} A_{m_j-p_j}^{\alpha_j-1} \left(p_j + \frac{1}{2}\right) \int_0^{x_j} g(t_j) dt_j \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\pi} \int_{x_j}^{\delta} g(t_j) |K_{m_j}^{\alpha_j}(t_j + x_j)| dt_j \right| \\ &> \sup_{m_j} \left[\frac{m_j}{2\pi^2} \int_0^{x_j} g(t_j) dt - \frac{A(\alpha)}{x_j(\ln \ln(1/x_j))^2} \right] \\ &> \frac{1}{16\pi^2 x_j \ln \ln(1/x_j)} - \frac{A(\alpha)}{x_j(\ln \ln(1/x_j))^2} \\ &\geq \frac{1}{32\pi^2 \ln \ln(1/x_j)}, \quad x_j \in]0, \delta], \quad j \in B'. \end{aligned} \quad (3.33)$$

С другой стороны, почти всюду имеем

$$\sup_{m_i} \left| \prod_{i \in B} t_{m_i}^{\alpha_i}(-x_i, g) \right| \geq \prod_{i \in B} |\bar{g}(-x_i)|.$$

Тогда, опираясь на (1.17), (3.21), (3.31) и (3.33), заключаем

$$F_1(-x) > \frac{A(n)}{\prod_{i=1}^n x_i \ln \ln(1/x_i)}, \quad x_i \in]0, \delta], \quad i = \overline{1, n}, \quad (3.34)$$

где

$$A(n) = \frac{1}{(4\pi)^{|B|} (32\pi^2)^{|B'|}}.$$

Хорошо известно (см., например, [3, с. 160–161], [20, с. 153–155]), что $\mathcal{P}(r_i, t_i) > 0$, $t_i \in \mathbb{T}$, $i = \overline{1, n}$, и

$$\mathcal{P}(r_i, t_i) = \frac{1 - r_i^2}{2[(1 - r_i)^2 + 4r_i \sin^2(t_i/2)]}, \quad r_i \in [0, 1[.$$

Выберем $x_j, j \in B'$, так, чтобы

$$\frac{1 - r_j}{2} < x_j < 1 - r_j.$$

Тогда

$$(1 - r_j)^2 + 4r_j \sin^2 x_j < 8x_j^2$$

и, стало быть,

$$\mathcal{P}(r_j, t_j + x_j) > \frac{1}{16x_j}, \quad j \in B'.$$

Таким образом, согласно (1.18) и (3.19) будем иметь

$$F_2(-x) > \frac{A(n)}{\prod_{i=1}^n x_i \ln \ln(1/x_i)}, \quad x_i \in]0, \delta], \quad i = \overline{1, n}, \quad (3.35)$$

причем

$$A(n) = \frac{1}{\pi^{n/4} 4^{|B|} (16)^{|B'|}}.$$

Нетрудно заметить, что

$$\sup_{r_i} |g(z_i)| \geq |\overline{g}(x_i)|, \quad i = \overline{1, n}.$$

Стало быть, в силу (1.24), (3.19) и (3.21)

$$F_4(-x) > \frac{1}{(4\pi)^n \prod_{i=1}^n x_i \ln \ln(1/x_i)}, \quad x_i \in]0, \delta], \quad i = \overline{1, n}. \quad (3.36)$$

Затем, учитывая (1.25), (1.26) и (3.16), находим

$$M_B(f) \equiv M_B(-x_0, f) > \frac{1}{4^{|B|}} \prod_{i \in B} \left(x_i \ln \ln \frac{1}{x_i} \right)^{-1} \prod_{j \in B'} g(x_j). \quad (3.37)$$

Таким образом, анализируя схему доказательства (3.9) и учитывая (3.34)–(3.37), заключаем справедливость соотношений (3.10) и (3.11).

Теорема 3.1 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. Если в (3.15) выражение $t \ln(1/t)(\ln \ln(1/t))^2$ заменим на

$$t \ln \frac{1}{t} \ln \ln \frac{1}{t} \cdots \left(\ln \ln \cdots \ln \frac{1}{t} \right)^2,$$

где в последней итерации $\ln$ содержится ν раз, $\nu > 2$, то в выражениях $\varphi(B, y)$ и $\varphi(y)$, определенных согласно (3.4), (3.5) и содержащихся в соотношениях (3.9)–(3.12), вместо $(\ln \ln y)^n$ будет $(\ln \ln \cdots \ln y)^n$.

Используя соответствующие результаты из работ [5, с. 458–464, 473–496], [20], [21], [1, с. 119–160, 182–201], можно заключить, что верна

ТЕОРЕМА 3.2. а) Пусть $B \subset M$, $1 \leq |B| \leq n$. Если функция $f \in L(\log^+ L)^{|B|-1}(\mathbb{T}^n)$, то

$$\begin{aligned} \mu_n[E(F_3, y, \mathbb{T}^n)] &\leq \frac{A(B)}{y} \left\{ \int_{\mathbb{T}^n} |f(x)| [\log^+ |f(x)|]^{|B|-1} dx + 1 \right\}, \\ \mu_n[E(M_B(f), y, \mathbb{T}^n)] &\leq \frac{A(B)}{y} \left\{ \int_{\mathbb{T}^n} |f(x)| [\log^+ |f(x)|]^{|B|-1} dx + 1 \right\}. \end{aligned}$$

б) Если же функция $f \in L(\log^+ L)^{n-1}(\mathbb{T}^n)$, то для любого $B \subset M$, $1 \leq |B| \leq n$, верны следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \mu_n[E(F_1, y, \mathbb{T}^n)] &\leq \frac{A(n, \alpha)}{y} \left\{ \int_{\mathbb{T}^n} |f(x)| [\log^+ |f(x)|]^{n-1} dx + 1 \right\}, \\ \mu_n[E(F_i, y, \mathbb{T}^n)] &\leq \frac{A(n)}{y} \left\{ \int_{\mathbb{T}^n} |f(x)| [\log^+ |f(x)|]^{n-1} dx + 1 \right\}, \quad i = 2, 4. \end{aligned}$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3.2. Слабый тип (1.1) отсутствует и у других операторов, встречающихся в теории кратных рядов по тригонометрической системе, системам Уолша, Хаара и др. Объем данной работы не позволяет изложить все подробнее. Коснемся только операторов, связанных с кратными рядами Фурье–Хаара.

Инициатором подробного исследования рядов по системе Хаара считается П. Л. Ульянов. Именно Ульянов и его ученики установили основополагающие результаты, относящиеся к рядам по системе Хаара (достаточно сослаться хотя бы на те из них, которые изложены в работах [23]–[26]). В работе [2] содержится обзор результатов, которые установлены относительно кратных рядов Хаара.

Пусть $(\chi_j)_{j=1}^\infty$ – ортонормированная система Хаара на $[0, 1]$; n -кратная ОНС Хаара на кубе $[0, 1]^n$ определяется так:

$$\chi_m(x) = \prod_{i=1}^n \chi_{m_i}(x_i).$$

Если функция $f \in L([0, 1]^n)$, то числа

$$a_m(f) \equiv a_{m_1 \dots m_n}(f) = \int_{[0, 1]^n} f(x) \chi_m(x) dx$$

называют n -кратными коэффициентами Фурье–Хаара функции f , а n -кратный ряд

$$\sum_{m \geq 1} a_m(f) \chi_m(x) \quad (3.38)$$

– ее рядом Фурье–Хаара. Если $q \in \mathbb{N}^n$, то прямоугольные частичные суммы ряда (3.38) определяются так:

$$S_q(x, f) \equiv S_{q_1 \dots q_n}(x, f) = \sum_{m_1=1}^{q_1} \dots \sum_{m_n=1}^{q_n} a_m(f) \chi_m(x). \quad (3.39)$$

Положим

$$F_5(x) \equiv F_5(x, f) = \sup_q |S_q(x, f)|. \quad (3.40)$$

В случае $n = 1$ хорошо известен [25, с. 83] следующий результат.

Если функция $f \in L([0, 1])$, то

$$\mu_1 \{x : F_5(x) \geq y > 0, x \in [0, 1]\} \leq \frac{A}{y} \|f\|_1.$$

В случае $n \geq 2$ подобное утверждение не имеет места. Точнее, следуя схеме доказательства теоремы 3.1, приходим к заключению, что справедлива

ТЕОРЕМА 3.3. *Существует функция $f \in L([0, 1]^n)$ такая, что для произвольного $p \in]0, 1[$*

$$\|F_5\|_p \leq A(p) \|f\|_1,$$

однако

$$\mu_n[E(F_5, y, [0, 1]^n)] \geq \frac{A(n)}{y} \varphi(y) \|f\|_1, \quad 0 < y_0 \leq y < +\infty,$$

где

$$E(F_5, y, [0, 1]^n) = \{x : F_5(x) \geq y > 0, x \in [0, 1]^n\},$$

а $\varphi(y)$ определено согласно (3.4).

Из свойств системы Хаара легко следует, что

$$F_5(x, f) \leq A(n) M_1 \dots M_n(x, f).$$

Стало быть, опираясь на известные результаты (см. [10] и [5, с. 461–462]), заключаем: если функция $f \in L(\log^+ L)^{n-1}([0, 1]^n)$, то для любого $p \in]0, 1[$

$$\|F_5\|_p \leq A(p, n) \|f\|_1,$$

и

$$\mu_n[E(F_5, y, [0, 1]^n)] \leq \frac{A(n)}{y} \left\{ \int_{[0, 1]^n} |f(x)| [\log^+ |f(x)|]^{n-1} dx + 1 \right\}.$$

Подобные утверждения верны и для n -кратного оператора Пэли для кратных рядов Фурье–Хаара.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Zhizhiashvili L. Trigonometric Fourier Series and their Conjugates. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1996.
- [2] Жижиашвили Л. В. Некоторые вопросы многомерного гармонического анализа. Тбилиси: ТГУ, 1996.
- [3] Зигмунд А. Тригонометрические ряды. Т. 1. М.: Мир, 1965.
- [4] Привалов И. И. Интеграл Коши. Саратов, 1919.
- [5] Зигмунд А. Тригонометрические ряды. Т. 2. М.: Мир, 1965.
- [6] Рудин У. Теория функций в единичном шаре из $\mathbb{C}^n$. М.: Мир, 1984.
- [7] Hardy G. H., Littlewood J. E. A maximal theorem with function-theoretic applications // Acta Math. 1930. V. 54. P. 81–116.
- [8] Saks S. Remark on the differentiability of the Lebesgue integral // Fund. Math. 1934. V. 22. P. 257–261.
- [9] Zygmund A. On the differentiability of multiple integrals // Fund. Math. 1934. V. 23. P. 143–149.
- [10] Jessen B., Marcinkiewicz J., Zygmund A. Note on the differentiability of multiple integrals // Fund. Math. 1935. V. 25. P. 217–234.
- [11] Sokol-Sokolowski K. On trigonometric series conjugate to Fourier series of two variables // Fund. Math. 1947. V. 34. P. 166–182.
- [12] Гусман М. Дифференцирование интегралов в $\mathbb{R}^n$. М.: Мир, 1978.
- [13] Стейн И. Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. М.: Мир, 1973.
- [14] Стейн И., Вейс Г. Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. М.: Мир, 1974.
- [15] Kolmogoroff A. Sur les fonctions harmoniques conjuguées et les séries de Fourier // Fund. Math. 1925. V. 7. P. 23–28.
- [16] Гарнетт Дж. Ограниченные аналитические функции. М.: Мир, 1984.
- [17] Жижиашвили Л. В. О сопряженных функциях и n -переменных // Докл. АН СССР. 1974. Т. 218. № 3. С. 517–518.
- [18] Жижиашвили Л. В. О справедливости теоремы А. Н. Колмогорова для сопряженных функций многих переменных // Матем. заметки. 1982. Т. 32. № 1. С. 13–21.
- [19] Сакс С. Теория интеграла. М.: ИЛ, 1949.
- [20] Бари Н. К. Тригонометрические ряды. М.: Физматгиз, 1961.
- [21] Zygmund A. On the boundary values of functions of several complex variables // Fund. Math. 1949. V. 36. P. 207–235.
- [22] Fefferman Ch. Estimates for double Hilbert transforms // Studia Math. 1972. V. 44. № 1. P. 1–15.
- [23] Uljanov P. L. Haar series and related questions // Alfred Haar Memorial Conf. Budapest (Hungary). Colloq. Math. Soc. Janos Bolyai. V. 49/I, 1985. P. 57–96.
- [24] Голубов В. И. Ряды по системе Хаара // Математический анализ. 1970. Итоги науки и техники ВИНТИ АН СССР. М.: ВИНТИ, 1971. С. 109–146.
- [25] Капин Б. С., Саакян А. А. Ортогональные ряды. М.: Наука, 1984.
- [26] Wade W. R. Recent developments in the theory of Haar series // Colloq. Math. 1987. V. 52. № 2. P. 213–238.

Тбилисский государственный университет им. И. Джавахишвили
 E-mail: giabarel@geo.net.ge

Поступило
 22.01.2003