Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. В. Петрова, Количество и устойчивость нелинейных параметрических колебаний в системе слабо связанных осцилляторов с маятниковой нелинейностью, *Матем. заметки*, 1999, том 65, выпуск 3, 369–376

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1060>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.239.49.27

26 апреля 2023 г., 05:22:58

УДК 517.9

КОЛИЧЕСТВО И УСТОЙЧИВОСТЬ НЕЛИНЕЙНЫХ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ В СИСТЕМЕ СЛАБО СВЯЗАННЫХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ С МАЯТНИКОВОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

Е. В. Петрова

Выделен диапазон изменения параметров, когда рассматриваемая нелинейная система имеет три устойчивых цикла с определенными свойствами симметрии.

Библиография: 2 названия.

Проблема сводится к анализу количества и устойчивости состояний равновесия нормальной формы. Вводится понятие, предложенное Ю. С. Колесовым, ее простого состояния равновесия. В рамках, очерченных этим понятием, поставленная задача решается в полном объеме.

1. Постановка задачи и описание результатов. Объектом нашего анализа является система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}\ddot{u}_1 + \varepsilon \dot{u}_1 + (1 + \varepsilon \alpha \cos 2\tau) \sin u_1 &= \varepsilon a^2 (u_2 - u_1), \\ \ddot{u}_2 + \varepsilon \dot{u}_2 + (1 + \varepsilon \alpha \cos 2\tau) \sin u_2 &= \varepsilon a^2 (u_1 - u_2),\end{aligned}\quad (1)$$

где положительный параметр ε мал, $\tau = (1 + \varepsilon \delta)t$, α и δ – характеристики параметрического воздействия, параметр $a > 0$.

Отметим, что система (1) – билокальная модель сингулярно возмущенного телеграфного уравнения при условиях непроницаемости в концах отрезка.

Обозначим через u вектор с компонентами u_1, u_2 . Рассматривая (1) как уравнение в $\mathbb{R}^2$, его решение $u(s, \tau)$, $s = \varepsilon t$, будем искать в виде

$$u = \varepsilon^{1/2} u_0(\varepsilon, \tau) + \varepsilon^{3/2} u_1(\varepsilon, \tau) + \dots, \quad (2)$$

где $u_0 = \xi(s)e^{i\tau} + \text{к.с.}$ Здесь и далее ξ – вектор с компонентами ξ_1, ξ_2 . Подставляя (2) в (1) и приравнявая коэффициенты при степенях $\varepsilon^{3/2}$, приходим к неоднородному линейному дифференциальному уравнению в $\mathbb{R}^2$. Условия его разрешимости в классе тригонометрических по τ многочленов приводят к системе дифференциальных уравнений, векторная форма которой имеет вид

$$\frac{d\xi}{ds} = -\frac{i}{2}a^2 L\xi - \left(\frac{1}{2} + i\delta\right)\xi + \frac{i}{4}\alpha\bar{\xi} - \frac{i}{4}\xi|\xi|^2. \quad (3)$$

Здесь

$$L = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad |\xi|^2 = \begin{pmatrix} |\xi_1|^2 \\ |\xi_2|^2 \end{pmatrix},$$

а умножение векторов покомпонатное. Уравнение (3), дополненное комплексно сопряженным для $\bar{\xi}$, — главная часть нормальной формы исходной системы, которую в последующем условимся называть *нормальной формой уравнения* (3).

Нас будет интересовать вопрос о количестве и устойчивости нетривиальных состояний равновесия у уравнения (3). Хотя уравнение (3) достаточно конкретно, без дополнительных предположений затруднено аналитическое рассмотрение поставленной проблемы. Всюду ниже будем предполагать выполненными следующие два условия. Первое из них — это неравенство

$$\frac{1}{4} + \delta^2 < \frac{\alpha^2}{16}, \quad (4)$$

обычное в данной тематике. Оно означает, что неустойчиво нулевое состояние равновесия уравнения (3) (а значит, и исходной системы (1)), т.е. происходит смена устойчивости за счет параметрического воздействия. Второе ограничение носит качественный характер, так как связано со следующим понятием.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Состояние равновесия ξ уравнения (3) назовем *простым*, если $\xi = \rho e^{i\varphi}$, где ρ — вещественный вектор с компонентами ρ_1, ρ_2 , а φ — фаза состояния равновесия, предполагаемая, естественно, вещественной.

Таким образом, у компонент простого состояния равновесия одна и та же фаза. В дальнейшем нас будут интересовать только простые состояния равновесия уравнения (3).

Пусть ξ — произвольное простое состояние равновесия уравнения (3). Очевидно, тогда ρ_1, ρ_2 и φ связаны равенствами

$$\begin{aligned} -\frac{i}{2}a^2(\rho_2 - \rho_1) - \left(\frac{1}{2} + i\delta\right)\rho_1 + \frac{i}{4}\alpha\rho_1 e^{-2i\varphi} - \frac{i}{4}\rho_1^3 &= 0, \\ -\frac{i}{2}a^2(\rho_1 - \rho_2) - \left(\frac{1}{2} + i\delta\right)\rho_2 + \frac{i}{4}\alpha\rho_1 e^{-2i\varphi} - \frac{i}{4}\rho_2^3 &= 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Равенство нулю вещественных частей в (5) приводит к одному равенству

$$\sin 2\varphi = \frac{2}{\alpha}, \quad (6)$$

поэтому

$$\cos 2\varphi = \sqrt{1 - \frac{4}{\alpha^2}} \quad \text{или} \quad \cos 2\varphi = -\sqrt{1 - \frac{4}{\alpha^2}}. \quad (7)$$

Оказывается, что второе равенство (7) малоинтересно. Еще менее очевидно, что на динамику существенное влияние оказывает знак расстройки δ . Наиболее интересен случай, когда $\delta < 0$.

Чтобы приступить к описанию (на качественном уровне) наших основных результатов, удобно сначала условиться о терминологии.

Простое состояние равновесия назовем *синхронным* (*асинхронным*), если $\rho_1 = \rho_2$ ($\rho_1 = -\rho_2$). Во всех других случаях, т.е. когда $|\rho_1| \neq |\rho_2|$, его будем называть *несимметричным*.

Предположим, что выполнено первое равенство (7) и $\delta < 0$. Тогда асинхронное состояние равновесия существует и устойчиво при любом допустимом изменении параметров. В части существования аналогичное имеет место и для синхронного состояния равновесия. Однако при

$$\sqrt{\frac{\alpha^2}{4} - 1} < a^2 < \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} - 1} - 2\delta$$

оно неустойчиво. Несимметричные состояния равновесия возникают (с точностью до знака их количество равно двум), отвлекаясь от синхронного состояния равновесия, когда параметр a^2 при уменьшении проходит через значение $\sqrt{\alpha^2/4 - 1} - 2\delta$. Они сохраняются при любом уменьшении a^2 , но при излишне малых значениях этого параметра становятся неустойчивыми.

2. Специфический прием выявления свойств устойчивости простых состояний равновесия. Линеаризуя на каком-то простом состоянии равновесия правую часть уравнения (3) (и комплексно сопряженного к нему), приходим к спектральной задаче

$$\begin{aligned} -\frac{i}{2}a^2Lv_1 - \left(\frac{1}{2} + i\delta\right)v_1 + \frac{i}{4}\alpha v_2 - \frac{i}{4}(2\rho^2v_1 + \xi^2v_2) &= \lambda v_1, \\ \frac{i}{2}a^2Lv_2 - \left(\frac{1}{2} - i\delta\right)v_2 - \frac{i}{4}\alpha v_1 + \frac{i}{4}(2\rho^2v_2 + \bar{\xi}^2v_1) &= \lambda v_2 \end{aligned} \quad (8)$$

для отыскания точек спектра устойчивости λ . В (8) ρ^2 – вектор с координатами ρ_1^2, ρ_2^2 ; v_1, v_2 – двумерные векторы, а умножение векторов, как и ранее, покоординатное. В (8) выполним замены

$$v_1 \mapsto v_1 e^{i\varphi}, \quad v_2 \mapsto v_2 e^{-i\varphi}$$

и учтем формулы (6) и (7). Приходим к новой спектральной задаче

$$\begin{aligned} -\frac{i}{2}a^2Lv_1 - \left(\frac{1}{2} + i\delta\right)v_1 + \frac{i}{4}\sqrt{\alpha^2 - 4}v_2 + \frac{1}{2}v_2 - \frac{i}{4}\rho^2(2v_1 + v_2) &= \lambda v_1, \\ \frac{i}{2}a^2Lv_2 - \left(\frac{1}{2} - i\delta\right)v_2 - \frac{i}{4}\sqrt{\alpha^2 - 4}v_1 + \frac{1}{2}v_1 + \frac{i}{4}\rho^2(2v_2 + v_1) &= \lambda v_2. \end{aligned} \quad (9)$$

В (9) удобно перейти к переменным $z_1 = v_1 + v_2$, $z_2 = v_1 - v_2$. Последовательно складывая и вычитая равенства (9), убеждаемся, что в новых переменных они принимают вид

$$\begin{aligned} -\frac{i}{2}a^2Lz_2 - i\delta z_2 - \frac{i}{4}\sqrt{\alpha^2 - 4}z_2 - \frac{i}{4}\rho^2z_2 &= \lambda z_1, \\ -\frac{i}{2}a^2Lz_1 - i\delta z_1 + \frac{i}{4}\sqrt{\alpha^2 - 4}z_1 - \frac{3i}{4}\rho^2z_1 &= (\lambda + 1)z_2. \end{aligned} \quad (10)$$

Положим

$$\begin{aligned} A &= -a^2L - \left(2\delta + \frac{1}{2}\sqrt{\alpha^2 - 4} + \frac{1}{2}\rho^2\right)I, \\ B &= -a^2L - \left(2\delta - \frac{1}{2}\sqrt{\alpha^2 - 4} + \frac{3}{2}\rho^2\right)I. \end{aligned} \quad (11)$$

Используя (10) обозначения (11), заключаем, что нас должна интересовать спектральная задача

$$Az_2 = -2i\lambda z_1, \quad Bz_1 = -2i(\lambda + 1)z_2. \quad (12)$$

Из (12) вытекает, что

$$ABz = -4\lambda(\lambda + 1)z, \quad (13)$$

где $z = z_1$. Обозначим через μ произвольное собственное число матрицы AB . Из (13) следует, что точки спектра устойчивости простого состояния равновесия – корни уравнения

$$\left(\lambda(\lambda + 1) + \frac{\mu}{4}\right)\left(\lambda(\lambda + 1) + \frac{\bar{\mu}}{4}\right) = 0. \quad (14)$$

ЛЕММА. *Корни уравнения (14) расположены в левой комплексной полуплоскости в том и только том случае, если $4\operatorname{Re} \mu > (\operatorname{Im} \mu)^2$.*

Доказательство следует из хорошо известного критерия Рауса–Гурвица.

Однако ниже при рассмотрении симметричных состояний равновесия (т.е. синхронных и асинхронных) симметричные матрицы A и B выходят такими, что $AB = BA$. Отсюда вытекает, что матрица AB также симметрична. Отсюда и из леммы следует, что в случае симметричных состояний равновесия критерий устойчивости формулируется так: для справедливости заключения леммы необходимо и достаточно, чтобы $\det A \det B > 0$.

3. Существование и устойчивость симметричных состояний равновесия.

Рассмотрим какое-то синхронное состояние равновесия, когда $\rho_1 = \rho_2 = \rho$. При выполнении (6) и второго равенства (7) имеем

$$\rho^2 = -4\delta - \sqrt{\alpha^2 - 4}. \quad (15)$$

В силу неравенства (4) правая часть в (15) отрицательна. Поэтому такое состояние равновесия не существует при сформулированных ограничениях.

Теперь пусть выполнено (6) и первое равенство (7). Тогда

$$\rho^2 = -4\delta + \sqrt{\alpha^2 - 4}. \quad (16)$$

В (16) правая часть положительна при любом допустимом изменении параметров. В этом случае матрицы (11) можно записать в виде

$$A = -a^2 L - \sqrt{\alpha^2 - 4}I, \quad B = -a^2 L - \rho^2 I. \quad (17)$$

Из (17) следует, что

$$\begin{aligned} AB &= a^4 L + a^2 \sqrt{\alpha^2 - 4}L + a^2 \rho^2 L + \rho^2 \sqrt{\alpha^2 - 4}I, \\ BA &= a^4 L + a^2 \sqrt{\alpha^2 - 4}L + a^2 \rho^2 L + \rho^2 \sqrt{\alpha^2 - 4}I. \end{aligned} \quad (18)$$

Из (18) выводим, что $AB = BA$, а значит, $(AB)^* = AB$. То есть потеря устойчивости возможна только дивергентная, когда происходит изменение знака $\det A$ или $\det B$. Отметим, что в соответствии с (17)

$$\det A = \sqrt{\alpha^2 - 4}(\sqrt{\alpha^2 - 4} - 2a^2), \quad \det B = \rho^2(\sqrt{\alpha^2 - 4} - 4\delta - 2a^2).$$

ТЕОРЕМА 1. Пусть выполнено равенство (6) и первое равенство (7). Тогда синхронное состояние равновесия существует при любом допустимом изменении параметров, становясь неустойчивым в том и только том случае, если

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} - 1} < a^2 < \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} - 1} - 2\delta, \quad \delta < 0, \\ \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} - 1} - 2\delta < a^2 < \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} - 1}, \quad \delta > 0. \end{aligned}$$

Перейдем к рассмотрению асинхронных состояний равновесия, когда $\rho_1 = -\rho_2 = \rho$. Если выполнено (6) и первое равенство (7), то

$$\rho^2 = 4(a^2 - \delta) + \sqrt{\alpha^2 - 4}. \quad (19)$$

В равенстве (19) правая часть положительна при любом допустимом изменении параметров. Кроме того, в данном случае справедливы формулы

$$A = c_1 I - a^2 J, \quad c_1 = -\sqrt{\alpha^2 - 4} - a^2, \quad B = c_2 I - a^2 J, \quad c_2 = -\sqrt{\alpha^2 - 4} + 4\delta - 5a^2, \quad (20)$$

где $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Из (20) выводим равенства

$$AB = (c_1 c_2 + a^4)I - a^2(c_1 + c_2)J, \quad BA = (c_1 c_2 + a^4)I - a^2(c_1 + c_2)J,$$

позволяющие заключить, что $AB = BA$. Поэтому в данном случае потеря устойчивости также происходит, когда изменяется знак $\det A$ или $\det B$.

Согласно формулам (20)

$$\begin{aligned} \det A &= \sqrt{\alpha^2 - 4}(\sqrt{\alpha^2 - 4} + 2a^2), \\ \det B &= (4\delta - \sqrt{\alpha^2 - 4})^2 + 2a^2(12a^2 + 5(\sqrt{\alpha^2 - 4} - 4\delta)). \end{aligned} \quad (21)$$

Из (21) следует, что $\det A > 0$, $\det B > 0$, а значит, асинхронное состояние равновесия устойчиво в рассматриваемом диапазоне изменения параметров.

Если же выполнено равенство (6) и второе равенство (7), то

$$\rho^2 = 4(a^2 - \delta) - \sqrt{\alpha^2 - 4}. \quad (22)$$

Правая часть в (22) положительна в том случае, если

$$a^2 > \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\alpha^2}{4} - 1} + \delta. \quad (23)$$

При ограничении (23) интересующие нас матрицы A и B имеют вид

$$A = c_1 I - a^2 J, \quad c_1 = \sqrt{\alpha^2 - 4} - a^2, \quad B = c_2 I - a^2 J, \quad c_2 = \sqrt{\alpha^2 - 4} + 4\delta - 5a^2, \quad (24)$$

где через J обозначена та же матрица, что и в (20). Достаточно ясно, что и в данном случае $AB = BA$. Поэтому проблема устойчивости связана со знаками определителей матриц (24). Для них справедливы формулы

$$\begin{aligned} \det A &= \sqrt{\alpha^2 - 4}(\sqrt{\alpha^2 - 4} - 2a^2), \\ \det B &= (4\delta + \sqrt{\alpha^2 - 4})^2 + \sqrt{\alpha^2 - 4}(12\sqrt{\alpha^2 - 4} - 5(\sqrt{\alpha^2 - 4} + 4\delta)). \end{aligned} \quad (25)$$

Из (25) и неравенств (4), (23) следует, что $\det A \det B < 0$. Последнее неравенство означает, что рассматриваемое состояние равновесия неустойчиво.

ТЕОРЕМА 2. Пусть выполнено (6) и первое равенство (7). Тогда асинхронное состояние равновесия существует и устойчиво при любом допустимом изменении параметров. Если выполнено (6) и второе равенство (7), то это состояние равновесия существует только при выполнении неравенства (23), причем оно неустойчиво.

4. Существование и свойства устойчивости несимметричных состояний равновесия. Приравнивая мнимые части в (5), получаем равенства

$$\begin{aligned} -\frac{a^2}{2}(\rho_2 - \rho_1) - \delta\rho_1 + \frac{\alpha}{4}\rho_1 \cos 2\varphi - \frac{1}{4}\rho_1^3 &= 0, \\ -\frac{a^2}{2}(\rho_1 - \rho_2) - \delta\rho_2 + \frac{\alpha}{4}\rho_2 \cos 2\varphi - \frac{1}{4}\rho_2^3 &= 0. \end{aligned} \quad (26)$$

Складывая и вычитая их, приходим к вытекающим из (26) соотношениям

$$-a^2 + \frac{1}{2}\rho_1\rho_2 = 0, \quad -a^2 + 2\delta - \frac{\alpha}{2}\cos 2\varphi + \frac{1}{2}(\rho_1^2 + \rho_2^2) = 0. \quad (27)$$

В (27) удобно ввести полярные переменные $\rho_1 = r \cos \gamma$, $\rho_2 = r \sin \gamma$. В итоге после некоторых преобразований получаем равенства

$$\sin 2\gamma = \frac{4a^2}{r^2}, \quad (28)$$

$$r^2 = 2a^2 - 4\delta + \alpha \cos 2\varphi. \quad (29)$$

Если выполнено второе равенство (7), то $\sin 2\gamma > 1$, а значит, дальнейшему анализу подлежит случай, когда выполнено первое равенство (7). Учитывая его в (29), убеждаемся, что

$$r^2 = 2a^2 - 4\delta + \sqrt{\alpha^2 - 4}. \quad (30)$$

Из (30) вытекает, что равенство (28) корректно только в том случае, если

$$a^2 < \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} - 1} - 2\delta. \quad (31)$$

Перейдем к рассмотрению вопроса об устойчивости несимметричных состояний равновесия. В данном случае для матриц A и B справедливы представления

$$A = \begin{pmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix} - a^2 J, \quad c_{1,2} = \frac{a^2}{2} - \delta - \frac{3}{4}\sqrt{\alpha^2 - 4} \mp \frac{1}{4}k, \quad (32)$$

$$B = \begin{pmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix} - a^2 J, \quad b_{1,2} = -\frac{a^2}{2} + \delta - \frac{1}{4}\sqrt{\alpha^2 - 4} \mp \frac{3}{4}k, \quad (33)$$

где

$$k = \sqrt{(2a^2 - 4\delta + \sqrt{\alpha^2 - 4})^2 - 16a^4},$$

а J – та же матрица, что и в предыдущем пункте. Формулы (32), (33) достаточно сложные. Поэтому удобно ввести промежуточные обозначения.

Положим

$$A_0 = \begin{pmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix}, \quad B_0 = \begin{pmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix}.$$

Тогда из (32) и (33) вытекает, что

$$AB = A_0 B_0 - a^2(A_0 J + J B_0) + a^4 I, \quad BA = B_0 A_0 - a^2(J A_0 + B_0 J) + a^4 I. \quad (34)$$

Отметим, что

$$c_2 + b_1 = -\sqrt{\alpha^2 - 4} - \frac{1}{2}k, \quad c_1 + b_2 = -\sqrt{\alpha^2 - 4} + \frac{1}{2}k.$$

Поэтому равенства (34) можно записать в виде

$$\begin{aligned} AB &= A_0 B_0 + a^4 I + a^2 \sqrt{\alpha^2 - 4} J + \frac{a^4}{2} k J_0, \\ BA &= B_0 A_0 + a^4 I + a^2 \sqrt{\alpha^2 - 4} J - \frac{a^4}{2} k J_0, \end{aligned} \quad (35)$$

где $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Так как $A_0 B_0 = B_0 A_0$, то из формул (35) вытекает, что

$$AB - BA = a^4 k J_0. \quad (36)$$

Из формулы (36) следует, что матрица AB к числу симметричных не относится. Тем не менее разберемся со знаками определителей матриц A и B .

Из (33) следует, что

$$\det B = 8a^4 - 2\left(a^2 - 2\delta + \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} - 1}\right)^2. \quad (37)$$

Достаточно просто убедиться, что левая часть в равенстве (37) отрицательна при любом уменьшении a^2 . Однако $\det A < 0$ только в том случае, если

$$a^2 > \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} - 1} + 2\delta, \quad (38)$$

что следует из формулы

$$\det A = \sqrt{\alpha^2 - 4} \left(\sqrt{\frac{\alpha^2}{4} - 1} + 2\delta - a^2 \right).$$

Итак, при условии $\delta < 0$ несимметричные состояния равновесия заведомо теряют устойчивость при подходящем уменьшении a^2 . Не исключено, однако, что еще при больших значениях a^2 они теряют устойчивость колебательным образом. Напомним, что в соответствии с леммой колебательная неустойчивость наблюдается, когда матрица AB имеет комплексное собственное значение μ такое, что выполнено строгое неравенство $4 \operatorname{Re} \mu < (\operatorname{Im} \mu)^2$.

Через a_0^2 обозначим число такое, что при $a^2 < a_0^2$ заведомо неустойчивы несимметричные состояния равновесия. Тогда из (38) вытекает, что

$$a_0^2 \geq \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} - 1} + 2\delta. \quad (39)$$

Теперь сформулируем суммирующее предложение.

ТЕОРЕМА 3. При ограничении (6) и при выполнении первого равенства (7) с точностью до знака ровно два несимметричных состояния равновесия возникают в том и только том случае, если справедливо неравенство (31). При $\delta < 0$ они устойчивы, если

$$a_0^2 < a^2 < \sqrt{\frac{a^2}{4} - 1 - 2\delta},$$

а при $\delta > 0$ они неустойчивы.

Для нас остался неясным только один вопрос: может ли в (39) иметь место строгое неравенство. Другими словами: может ли несимметричное состояние равновесия терять устойчивость колебательным образом. Причина затруднения понятна – излишне сложно устроена матрица AB .

5. Заключение. Теория линейного параметрического резонанса была создана в работах Матье, Хилла, Манделштама, Папалекси и др. Из более современных работ отметим монографию [1], в которой явление параметрического резонанса рассмотрено в некоторых системах с распределенными параметрами. Нелинейный параметрический резонанс к настоящему времени подробно изучен только для одночастотных систем [2]. Наше исследование – одно из немногих, в котором данный вопрос рассмотрен для резонансной двухчастотной системы. На этом примере нами показано, что многочастотный случай принципиально отличается от одночастотного: существует диапазон изменения параметров, когда нормальная форма имеет устойчивое асинхронное состояние равновесия и два устойчивых несимметричных состояния равновесия.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Фомин В. Н. Математическая теория параметрического резонанса в линейных распределенных системах. Л.: Изд-во ЛГУ, 1972.
- [2] Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974.

Ярославский государственный университет
E-mail: nis@uniyar.ac.ru

Поступило
24.10.97