Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Г. Кротов, А. И. Порабкович, Оценки L^p -осцилляций функций при $p > 0$, *Матем. заметки*, 2015, том 97, выпуск 3, 407–420

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10600>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.67.100

26 апреля 2023 г., 14:27:06

Оценки L^p -осцилляций функций при $p > 0$

В. Г. Кротов, А. И. Порабкович

В работе доказывается ряд неравенств для средних осцилляций

$$\mathcal{O}_\theta(f, B, I) = \left(\frac{1}{\mu(B)} \int_B |f(y) - I|^\theta d\mu(y) \right)^{1/\theta},$$

где $\theta > 0$, B – шар в метрическом пространстве с мерой μ , удовлетворяющей условию удвоения, число I выбирается одним из следующих способов: $I = f(x)$ ($x \in B$), I – среднее значение функции f по шару B , I – наилучшее приближение f постоянными в метрике $L^\theta(B)$. Эти неравенства используются для получения L^p -оценок ($p > 0$) максимальных операторов, измеряющих локальную гладкость, описания пространств соболевского типа и исследования свойства самоулучшения неравенств типа Пуанкаре–Соболева.

Библиография: 17 названий.

DOI: 10.4213/mzm10600

1. Введение. Примерами оценок средних L^p -осцилляций функции могут служить классические неравенства (см., например, [1; п. 4.5])¹

$$\left(\int_B \left| f(x) - \frac{1}{|B|} \int_B f dx \right|^q dx \right)^{1/q} \lesssim r \left(\int_B |\nabla f(x)|^p dx \right)^{1/p} \quad (1.1)$$

($B \subset \mathbb{R}^n$ – шар радиуса r , $|B|$ – мера Лебега B), которые называют обычно неравенствами Пуанкаре (при $q = 1$) и Пуанкаре–Соболева (при $1/q = 1/p - 1/n$). Они играют важную роль в многомерном анализе и его приложениях к уравнениям в частных производных. Правые части этих неравенств конечны для функций из классов Соболева $W_k^p(\mathbb{R}^n)$ (см., например, [2; гл. V, § 2]), что и определяет сферу их применения.

Целью нашей работы является доказательство неравенств для L^θ -осцилляций

$$\mathcal{O}_\theta(f, B, I) = \left(\frac{1}{\mu(B)} \int_B |f(y) - I|^\theta d\mu(y) \right)^{1/\theta} \quad (1.2)$$

(здесь $I \in \mathbb{R}$ – некоторое число, которое можно выбирать различными способами) функции по шарам B на произвольном метрическом пространстве с мерой (X, d, μ) ,

¹Запись $A \lesssim B$ всегда будет означать, что $A \leq cB$, где c – некоторые положительные постоянные, зависящие, возможно, от определенных параметров, но эти зависимости для нас несущественны.

в частности, будут получены аналоги неравенств (1.1). В такой более общей ситуации подходящими заменами модуля градиента являются некоторые максимальные операторы, которые сейчас будут определены после некоторой порции обозначений.

Пусть (X, d, μ) – хаусдорфово пространство с регулярной борелевской мерой μ и квазиметрикой d , т.е. функция $d: X \times X \rightarrow [0, \infty)$ удовлетворяет условиям

$$d(x, y) = 0 \iff x = y, \quad d(x, y) = d(y, x),$$

и существует такая постоянная $a_d \geq 1$, что

$$d(x, y) \leq a_d[d(x, z) + d(z, y)] \quad (1.3)$$

для любых $x, y, z \in X$. Кроме того, семейство открытых шаров

$$B(x, r) = \{y \in X : d(x, y) < r\}$$

образует базу окрестностей топологии X и

$$0 < \mu(B(x, r)) < +\infty, \quad x \in X, \quad r > 0.$$

Для шара $B \subset X$ обозначаем r_B и x_B соответственно его радиус и центр; кроме того, λB – шар, концентрический с B , радиуса λr_B .

На протяжении всей работы будут использоваться обозначения

$$f_B = \int_B f d\mu = \frac{1}{\mu(B)} \int_B f d\mu$$

для среднего значения функции $f \in L^1_{\text{loc}}(X)$ по шару $B \subset X$.

Мы рассматриваем следующие максимальные операторы:

$$\mathcal{N}_\eta^{(\theta)} f(x) = \sup_{B \ni x, r_B < 1} \frac{\mathcal{O}_\theta(f, B, f(x))}{\eta(r_B)}, \quad (1.4)$$

$$\mathcal{S}_\eta^{(\theta)} f(x) = \sup_{B \ni x, r_B < 1} \frac{\mathcal{O}_\theta(f, B, f_B)}{\eta(r_B)}, \quad (1.5)$$

$$\mathcal{A}_\eta^{(\theta)} f(x) = \sup_{B \ni x, r_B < 1} \frac{A_\theta(f, B)}{\eta(r_B)}, \quad A_\theta(f, B) = \inf_I \mathcal{O}_\theta(f, B, I), \quad (1.6)$$

где $\eta: (0, 1] \rightarrow (0, 1]$ – положительная возрастающая функция (более точно классы используемых функций η будут указаны ниже). В случае $\theta = 1$ верхний индекс в обозначениях (1.4)–(1.6) будем опускать. Кроме того, если $\eta(t) = t^\alpha$, то в нижнем индексе вместо η будем писать α . Конечно, в (1.4)–(1.6) следует предполагать, что $f \in L^1_{\text{loc}}(X)$, а при $\theta < 1$ в (1.5) нужно дополнительное требование $f \in L^1_{\text{loc}}(X)$.

Операторы $\mathcal{N}_\alpha^{(\theta)}$, $0 < \alpha \leq 1$, в случае $X = \mathbb{R}^n$ впервые появились в работе Кальдерона [3], в этой же ситуации операторы $\mathcal{S}_\alpha^{(\theta)}$ были введены в [4]. Следует отметить важный и интересный частный случай $f^\sharp = S_0$ операторов (1.5) – шарп-максимальная функция Фейффермана–Стейна, введенная раньше [5].

Одним из важнейших результатов работы [3] является следующее утверждение, дающее описание классических пространств Соболева $W^p_1(\mathbb{R}^n)$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $p > 1$ и $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Тогда условия $f \in W_1^p(\mathbb{R}^n)$ и $\mathcal{N}_1 f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ равносильны.

В работах Коляды [6], [7] функции $\mathcal{N}_\eta$ были введены (в случае $X = [0, 1]^n$) для произвольной функции η , для которой $\eta(t)/t$ убывает. Мотивировкой для рассмотрения такого спектра характеристик η в [6], [7] было расширение возможностей для более тонкой классификации функций по их локальной гладкости, которую измеряют максимальные функции $\mathcal{N}_\eta^{(\theta)}$. Это видно из простого неравенства

$$|f(x) - f(y)| \lesssim \eta(d(x, y))[\mathcal{N}_\eta^{(\theta)} f(x) + \mathcal{N}_\eta^{(\theta)} f(y)], \quad x, y \in X, \quad d(x, y) < 1. \quad (1.7)$$

Отметим также, что в случае $X = [0, 1]$ операторы $\mathcal{N}_\eta$ в неявном виде использовались ранее в работе Осколкова [8] при изучении задачи Ульянова о количественных оценках C -свойства Лузина в терминах L^p -модулей непрерывности. В цитированных выше работах Коляды эти результаты Осколкова обобщались на многомерный случай. Более подробно о максимальных операторах (1.4) и (1.5) см. обзор [9].

Отметим ряд простых связей между максимальными функциями (1.4)–(1.6). Из неравенства Гёльдера следует, что все они возрастают вместе с θ . Далее, справедливы следующие очевидные неравенства

$$\mathcal{A}_\eta^{(\theta)} f(x) \leq \mathcal{S}_\eta^{(\theta)} f(x), \quad \mathcal{A}_\eta^{(\theta)} f(x) \leq \mathcal{N}_\eta^{(\theta)} f(x), \quad \theta > 0, \quad (1.8)$$

и, кроме того,

$$\mathcal{S}_\eta^{(\theta)} f(x) \lesssim \mathcal{A}_\eta^{(\theta)} f(x), \quad \mathcal{S}_\eta^{(\theta)} f(x) \lesssim \mathcal{N}_\eta^{(\theta)} f(x), \quad \theta \geq 1. \quad (1.9)$$

Неравенства (1.9) вытекают из легко доказываемого соотношения

$$\mathcal{O}_\theta(f, B, f_B) \leq 2A_\theta(f, B), \quad \theta \geq 1. \quad (1.10)$$

Наш основной результат (теорема 2) дает ряд неравенств для осцилляций, входящих в определения (1.4)–(1.6) при различных $\theta > 0$, при этом принципиально новым является случай $0 < \theta < 1$. В качестве следствий из него приводятся менее тривиальные соотношения между операторами (1.4)–(1.6), чем (1.8) и (1.9) (теорема 3 и неравенство (6.1)), а также новые описания пространств соболевского типа (теорема 4), некоторое усиление теоремы 1 (теорема 5) и свойство самоулучшения неравенств типа Пуанкаре–Соболева (теорема 6).

2. Вспомогательные утверждения. Говорят, что мера μ удовлетворяет *условию удвоения*, если существует такое число $a_\mu > 0$, что

$$\mu(B(x, 2r)) \leq a_\mu \mu(B(x, r)), \quad x \in X, \quad r > 0. \quad (2.1)$$

Условию (2.1) можно придать количественный вид – при условии (2.1) для некоторого $\gamma > 0$ (можно взять $\gamma = \log_2 a_\mu$) выполнено неравенство

$$\mu(B(x, R)) \leq a_\mu \left(\frac{R}{r}\right)^\gamma \mu(B(x, r)), \quad x \in X, \quad 0 < r \leq R. \quad (2.2)$$

Это условие предполагается выполненным на протяжении всей работы. В таком случае тройка (X, d, μ) называется пространством однородного типа [10]. Основные сведения о них можно найти в [11].

Определим классы, из которых будет выбираться функция η в (1.4)–(1.6). Говорят, что функция $\eta: (0, 1] \rightarrow (0, 1]$ почти возрастает (убывает), если при всех $0 < t_1 < t_2 \leq 1$ выполнено неравенство $\eta(t_1) \lesssim \eta(t_2)$ (соответственно $\eta(t_1) \gtrsim \eta(t_2)$), где $\lesssim$ не зависит от t_1 и t_2 .

Для $0 \leq \alpha < \beta < \infty$ определим $\Omega[\alpha, \beta]$ как множество положительных возрастающих функций $\eta: (0, 1] \rightarrow (0, 1]$, для которых $\eta(t)t^{-\alpha}$ почти возрастает и $\eta(t)t^{-\beta}$ почти убывает. Пусть еще

$$\Omega[\alpha, \beta) = \bigcup_{\beta' \in [\alpha, \beta)} \Omega[\alpha, \beta'], \quad \Omega[\alpha, \infty) = \bigcup_{\beta > \alpha} \Omega[\alpha, \beta). \quad (2.3)$$

Отметим для дальнейшего, что для любой функции $\eta \in \Omega[\alpha, \beta)$, $0 < \alpha < \beta$, выполнены неравенства

$$\sum_{k=n}^{\infty} \eta(2^{-k}) \lesssim \eta(2^{-n}), \quad \sum_{k=0}^n 2^{k\alpha} \eta(2^{-k}) \lesssim 2^{n\alpha} \eta(2^{-n}). \quad (2.4)$$

Пусть $\theta > 0$ и

$$M_{\theta} f(x) = \sup_{B \ni x} \left(\int_B |f|^{\theta} d\mu \right)^{1/\theta}$$

– модифицированная функция Харди–Литтлвуда. В нужной нам общности ее свойства описаны в [10].

ЛЕММА 1. При всех $0 < \theta < p$ справедливо неравенство

$$\|M_{\theta} f\|_{L^p(X)} \lesssim \|f\|_{L^p(X)}, \quad f \in L^p(X),$$

где $\lesssim$ не зависит от f .

Следующая лемма имеется, например, в [12; лемма 1].

ЛЕММА 2. Пусть $B_1 \subset B_2 \subset X$ – два шара, причем $0 < r_{B_1} \leq r_{B_2}$. Тогда

$$\frac{\mu(B_2)}{\mu(B_1)} \lesssim \left(\frac{r_{B_2}}{r_{B_1}} \right)^{\gamma}.$$

ЛЕММА 3. Пусть $B \subset X$, $f \in L^{\theta}(B)$, $\theta > 0$. Тогда существует такое число $I_B^{(\theta)} f \in \mathbb{R}$, что

$$A_{\theta}(f, B) = \left(\int_B |f(y) - I_B^{(\theta)} f|^{\theta} d\mu(y) \right)^{1/\theta}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Функция

$$g(I) = \int_B |f(y) - I|^{\theta} d\mu(y), \quad I \in \mathbb{R}.$$

непрерывна на $\mathbb{R}$ и $g(I) \rightarrow +\infty$ при $I \rightarrow \infty$. Поэтому вне некоторого отрезка $[-I_0, I_0]$ ее значения больше, чем $2 \inf_I g(I)$. По теореме Вейерштрасса на этом отрезке функция g принимает свое минимальное значение.

Число $I_B^{(\theta)} f$ из леммы 3 определяется неоднозначно (например, если $\theta < 1$), в дальнейшем под $I_B^{(\theta)} f$ понимаем любое из его возможных значений. Приведем необходимые свойства наилучших приближений $I_B^{(\theta)} f$ и связанных с ними осцилляций $A_{\theta}(f, B)$ (см. (1.6)).

ЛЕММА 4. Для любых $\theta, p > 0$, $B \subset X$, $f \in L^\theta(B)$ и $\eta \in \Omega[0, \infty)$ справедливо неравенство

$$A_\theta(f, B) \leq \eta(r_B) \min \left\{ \mathcal{A}_\eta^{(\theta)} f(x), \left(\int_{B(x, r)} [\mathcal{A}_\eta^{(\theta)} f]^p d\mu \right)^{1/p} \right\}. \quad (2.5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО получается усреднением по $y \in B$ неравенства.

$$[A_\theta(f, B)]^p \leq \eta^p(r_B) [\mathcal{A}_\eta^{(\theta)} f(y)]^p.$$

ЛЕММА 5. Пусть $f \in L^\theta_{\text{loc}}(X)$, $\theta > 0$, $B_1, B_2 \subset X$ — два шара, причем $0 < r_{B_1} \leq r_{B_2}$. Тогда

1) если $B_1 \subset B_2$, то

$$|I_{B_1}^{(\theta)} f - I_{B_2}^{(\theta)} f| \lesssim A_\theta(f, B_1) + \left(\frac{r_{B_2}}{r_{B_1}} \right)^{\gamma/\theta} A_\theta(f, B_2);$$

2) если $B_1 \cap B_2 \neq \emptyset$, то для любой точки $x_0 \in B_1 \cap B_2$ выполнено неравенство

$$|I_{B_1}^{(\theta)} f - I_{B_2}^{(\theta)} f| \lesssim A_\theta(f, B_1) + A_\theta(f, B_2) + \left(\frac{r_{B_2}}{r_{B_1}} \right)^{\gamma/\theta} A_\theta(f, B(x_0, R)),$$

где $R = 2a_d r_2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Усредним неравенство

$$|I_{B_1}^{(\theta)} f - I_{B_2}^{(\theta)} f|^\theta \lesssim |I_{B_1}^{(\theta)} f - f(y)|^\theta + |f(y) - I_{B_2}^{(\theta)} f|^\theta$$

по $y \in B_1$. Получим

$$\begin{aligned} |I_{B_1}^{(\theta)} f - I_{B_2}^{(\theta)} f|^\theta &\lesssim \int_{B_1} |I_{B_1}^{(\theta)} f - f(y)|^\theta d\mu + \int_{B_1} |f(y) - I_{B_2}^{(\theta)} f|^\theta d\mu \\ &\lesssim \int_{B_1} |I_{B_1}^{(\theta)} f - f(y)|^\theta d\mu + \frac{\mu(B_2)}{\mu(B_1)} \int_{B_2} |f(y) - I_{B_2}^{(\theta)} f|^\theta d\mu \end{aligned}$$

и используем лемму 2.

Для доказательства 2) отметим, что в силу (1.3) $B_1 \cup B_2 \subset B(x_0, R)$; запишем неравенство

$$|I_{B_1}^{(\theta)} f - I_{B_2}^{(\theta)} f|^\theta \lesssim |I_{B_1}^{(\theta)} f - I_{B(x_0, R)}^{(\theta)} f|^\theta + |I_{B(x_0, R)}^{(\theta)} f - I_{B_2}^{(\theta)} f|^\theta$$

и воспользуемся уже доказанным утверждением 1).

В следующей лемме используется слабое L^p -пространство

$$L^p_{\text{weak}}(X) = \left\{ f : \|f\|_{L^p_{\text{weak}}(X)} = \sup_{\lambda > 0} \lambda(\mu\{|f| > \lambda\})^{1/p} < \infty \right\}.$$

ЛЕММА 6. Пусть $f \in L^\theta(X)$, $\theta > 0$. Тогда существует такая функция $\eta \in \Omega[0, \infty)$, $\lim_{t \rightarrow +0} \eta(t) = 0$, что $\mathcal{N}_\eta^{(\theta)} f \in L^\theta_{\text{weak}}(X)$, в частности, $\mathcal{N}_\eta^{(\theta)} f(x) < +\infty$ для почти всех $x \in X$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проходит точно так же, как и в [13; теорема 2], где показано, что при тех же условиях существует такая функция $\eta \in \Omega[0, \infty)$, что $\mathcal{N}_\eta^{(\theta')} f \in L^\theta(X)$ при $\theta' < \theta$ (см. также [14; лемма 2]). Изменение состоит только лишь в том, что вместо квазинормы в $L^\theta(X)$ нужно использовать квазинорму в $L_{\text{weak}}^\theta(X)$.

ЛЕММА 7. Для любой функции $f \in L_{\text{loc}}^\theta(X)$

$$\lim_{r \rightarrow +0} I_{B(x,r)}^{(\theta)} = f(x) \quad (2.6)$$

для почти всех $x \in X$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $B \subset X$ — произвольный шар. Запишем неравенство

$$|f(x) - I_B^{(\theta)} f|^\theta \lesssim |f(x) - f(y)|^\theta + |f(y) - I_B^{(\theta)} f|^\theta$$

и усредним его по $y \in B$, получая

$$\begin{aligned} |f(x) - I_B^{(\theta)} f|^\theta &\lesssim \int_B |f(x) - f(y)|^\theta d\mu(y) + \int_B |f(y) - I_B^{(\theta)} f|^\theta d\mu(y) \\ &\lesssim 2 \int_B |f(x) - f(y)|^\theta d\mu(y) \leq 2\eta^\theta(r_B) [\mathcal{N}_\eta^{(\theta)} f(x)]^\theta \rightarrow 0 \end{aligned}$$

при $r_B \rightarrow +0$ для почти всех $x \in X$. Здесь функция $\eta \in \Omega[0, \infty)$ выбрана так, чтобы $\mathcal{N}_\eta^{(\theta)} f(x) < +\infty$ почти всюду (см. лемму 6).

Точки, которых выполнено соотношение (2.6), будем называть θ -точками Лебега.

3. Основная теорема.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\theta, p > 0$, $0 < \alpha < \gamma/p$, $\eta \in \Omega[\alpha, \gamma/p)$, $f \in L_{\text{loc}}^\theta(X)$. Если x — θ -точка Лебега, то

$$|f(x) - I_{B(x,r)}^{(\theta)} f| \lesssim \eta(r) [\mathcal{A}_\eta^{(\theta)} f(x)]^{1-\alpha p/\gamma} \left(\int_{B(x,r)} [\mathcal{A}_\eta^{(\theta)} f]^p d\mu \right)^{\alpha/\gamma}. \quad (3.1)$$

Кроме того, для любого шара $B \subset X$

$$\left(\int_B |f - I_B^{(\theta)} f|^q d\mu \right)^{1/q} \lesssim \eta(r_B) \left(\int_{2a_d B} [\mathcal{A}_\eta^{(\theta)} f]^p d\mu \right)^{1/p} \quad (3.2)$$

и для каждой θ -точки Лебега $x \in B$ функции f

$$\left(\int_B |f - f(x)|^q d\mu \right)^{1/q} \lesssim \eta(r_B) \left[\mathcal{A}_\eta^{(\theta)} f(x) + \left(\int_{2a_d B} [\mathcal{A}_\eta^{(\theta)} f]^p d\mu \right)^{1/p} \right], \quad (3.3)$$

где $1/q = 1/p - \alpha/\gamma$ и $\lesssim$ в правых частях (3.1)–(3.3) не зависят от f , x и B .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x \in X$ — θ -точка Лебега, $r > 0$. Введем функцию

$$u(t) = \inf \left\{ \mathcal{A}_\eta^{(\theta)} f(y) : y \in B\left(x, \frac{t}{2}\right) \right\} \leq \mathcal{A}_\eta^{(\theta)} f(x). \quad (3.4)$$

Пусть для краткости $B_k = B(x, 2^{-k}r)$, $k \geq 0$. Тогда, используя лемму 7, а также часть 1) леммы 5, получаем

$$|f(x) - I_{B(x,r)}^{(\theta)} f| = \left| \sum_{k=0}^{\infty} [I_{B_{k+1}}^{(\theta)} f - I_{B_k}^{(\theta)} f] \right| \lesssim \sum_{k=0}^{\infty} \eta(2^{-k}r) u(2^{-k}r). \quad (3.5)$$

Для краткости введем обозначение

$$M = \left(\int_{B(x,r)} [\mathcal{A}_\eta^{(\theta)} f]^p d\mu \right)^{1/p}$$

и для оценки суммы справа в (3.5) рассмотрим отдельно случаи $\mathcal{A}_\eta^{(\theta)} f(x) \leq M$ и $\mathcal{A}_\eta^{(\theta)} f(x) > M$.

Если $\mathcal{A}_\eta^{(\theta)} f(x) \leq M$, то в силу условия $\eta \in \Omega[\alpha, \gamma/p]$ и (2.4) получаем

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \eta(2^{-k}r) u(2^{-k}r) &\leq \mathcal{A}_\eta^{(\theta)} f(x) \sum_{k=0}^{\infty} \eta(2^{-k}r) \lesssim \eta(r) \mathcal{A}_\eta^{(\theta)} f(x) \\ &\lesssim \eta(r) [\mathcal{A}_\eta^{(\theta)} f(x)]^{1-\alpha p/\gamma} [\mathcal{A}_\eta^{(\theta)} f(x)]^{\alpha p/\gamma} \lesssim \eta(r) [\mathcal{A}_\eta^{(\theta)} f(x)]^{1-\alpha p/\gamma} M^{\alpha p/\gamma}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Следовательно, в рассматриваемом случае неравенство (3.1) доказано.

Пусть теперь $\mathcal{A}_\eta^{(\theta)} f(x) > M$. Зафиксируем номер $n \in \mathbb{N}$, выбор которого будет указан ниже, и разобьем ряд в (3.5) на две части

$$\sum_{k=0}^{\infty} \eta(2^{-k}r) u(2^{-k}r) = \sum_{k=0}^n \eta(2^{-k}r) u(2^{-k}r) + \sum_{k=n+1}^{\infty} \eta(2^{-k}r) u(2^{-k}r) = \Sigma_1 + \Sigma_2,$$

которые оценим отдельно.

Вторая сумма Σ_2 оценивается с помощью (2.4) аналогично (3.6):

$$\Sigma_2 \lesssim \sum_{k=n+1}^{\infty} \eta(2^{-k}r) u(2^{-k}r) \leq \mathcal{A}_\eta^{(\theta)} f(x) \sum_{k=n+1}^{\infty} \eta(2^{-k}r) \lesssim \eta(2^{-n}r) \mathcal{A}_\eta^{(\theta)} f(x). \quad (3.7)$$

Для оценки Σ_1 отметим, что (см. (3.4))

$$u(s) \leq \mathcal{A}_\eta^{(\theta)} f(y), \quad y \in B(x, s).$$

Усредняя это неравенство по шару $B(x, s)$, с помощью леммы 2 получим при $s < r$

$$u(s) \leq \left(\int_{B(x,s)} [\mathcal{A}_\eta^{(\theta)} f]^p d\mu \right)^{1/p} \leq \left(\frac{\mu(B(x,r))}{\mu(B(x,s))} \right)^{1/p} M \lesssim \left(\frac{r}{s} \right)^{\gamma/p} M. \quad (3.8)$$

Отсюда и из (2.4) следует, что

$$\Sigma_1 \lesssim M \sum_{k=0}^n \eta(2^{-k}r) \left(\frac{r}{2^{-k}r} \right)^{\gamma/p} \lesssim M \sum_{k=0}^n 2^{k\gamma/p} \eta(2^{-k}r) \lesssim 2^{n\gamma/p} \eta(2^{-n}r) M.$$

Поэтому с учетом (3.7) мы видим, что в рассматриваемом случае выполнена оценка

$$\sum_{k=0}^{\infty} \eta(2^{-k}r) u(2^{-k}r) \lesssim \eta(2^{-n}r) [\mathcal{A}_\eta^{(\theta)} f(x) + 2^{n\gamma/p} M].$$

Если взять здесь

$$n = \left[\log_2 \left(\frac{\mathcal{A}_\eta^{(\theta)} f(x)}{M} \right)^{p/\gamma} \right] + 1,$$

то мы приходим к неравенству

$$\sum_{k=0}^{\infty} \eta(2^{-k}r) u(2^{-k}r) \lesssim \eta \left(r \left(\frac{M}{\mathcal{A}_\eta^{(\theta)} f(x)} \right)^{p/\gamma} \right).$$

Учитывая также то, что $\eta(t)t^{-\alpha}$ почти возрастает, получаем

$$\sum_{k=0}^{\infty} \eta(2^{-k}r) u(2^{-k}r) \lesssim \eta(r) \left(\frac{M}{\mathcal{A}_\eta^{(\theta)} f(x)} \right)^{\alpha p/\gamma} \mathcal{A}_\eta^{(\theta)} f(x) \lesssim \eta(r) (\mathcal{A}_\eta^{(\theta)} f(x))^{1-\alpha p/\gamma} M^{\alpha p/\gamma}.$$

Таким образом, и во втором случае (3.1) доказано.

Пусть в (3.2) $B = B(x, r)$. Для доказательства (3.2) запишем неравенство

$$\int_B |f(y) - I_B^{(\theta)} f|^q d\mu(y) \lesssim \int_B |f(y) - I_{B(y,r)}^{(\theta)}|^q d\mu(y) + \int_B |I_{B(y,r)}^{(\theta)} f - I_B^{(\theta)} f|^q d\mu(y). \quad (3.9)$$

Для оценки первого интеграла справа в (3.9) заметим, что $B(y, r) \subset B(x, 2a_d r)$ при $y \in B(x, r)$. Поэтому в силу уже доказанного неравенства (3.1) получим

$$\begin{aligned} \int_B |f(y) - I_{B(y,r)}^{(\theta)}|^q d\mu(y) &\lesssim \eta^q(r) \int_B [\mathcal{A}_\eta^{(\theta)} f(y)]^{q(1-\alpha p/\gamma)} \left(\int_{B(y,r)} [\mathcal{A}_\eta^{(\theta)} f]^p d\mu \right)^{q\alpha/\gamma} d\mu(y) \\ &\lesssim \eta^q(r) \left(\int_{B(x, 2a_d r)} [\mathcal{A}_\eta^{(\theta)} f]^p d\mu \right)^{q\alpha/\gamma} \int_B [\mathcal{A}_\eta^{(\theta)} f(y)]^p d\mu(y) \\ &\lesssim \eta^q(r) \left(\int_{B(x, 2a_d r)} [\mathcal{A}_\eta^{(\theta)} f]^p d\mu \right)^{q/p}. \end{aligned}$$

Получим теперь такую же оценку сверху для второго слагаемого справа в (3.9). Для этого оценим выражение под знаком интеграла с помощью утверждения 2) леммы 5: для любого $y \in B$

$$|I_{B(y,r)}^{(\theta)} f - I_B^{(\theta)} f| \lesssim A_\theta(f, B(y, r)) + A_\theta(f, B) + A_\theta(f, 2a_d B).$$

Каждое слагаемое справа здесь оцениваем по лемме 4, что приводит нас к неравенствам

$$|I_{B(y,r)}^{(\theta)} f - I_B^{(\theta)} f| \lesssim \eta(r) \left(\int_{2a_d B} [\mathcal{A}_\eta^{(\theta)} f]^p d\mu \right)^{1/p}, \quad y \in B. \quad (3.10)$$

Поэтому

$$\int_B |I_{B(y,r)}^{(\theta)} f - I_B^{(\theta)} f|^q d\mu(y) \lesssim \eta^q(r) \left(\int_{2a_d B} [\mathcal{A}_\eta^{(\theta)} f]^p d\mu \right)^{q/p}$$

и (3.2) доказано.

Для доказательства (3.3) запишем

$$\int_B |f - f(x)|^q d\mu \lesssim \int_B |f - I_B^{(\theta)} f|^q d\mu + |I_B^{(\theta)} f - I_{B(x,r)}^{(\theta)} f|^q + |f(x) - I_{B(x,r)}^{(\theta)} f|^q.$$

Первое слагаемое справа уже оценено согласно (3.2), второе оценивается в (3.10)

$$|I_B^{(\theta)} f - I_{B(x,r)}^{(\theta)} f| \lesssim \eta(r) \left(\int_{B(x,2a_d r)} [\mathcal{A}_\eta^{(\theta)} f]^p d\mu \right)^{1/p}.$$

Нужное неравенство для третьего слагаемого вытекает из неравенств (3.5), (3.4) и (2.4):

$$|f(x) - I_{B(x,r)}^{(\theta)} f| \lesssim \mathcal{A}_\eta^{(\theta)} f(x) \sum_{k=0}^{\infty} \eta(2^{-k} r) \lesssim \eta(r) \mathcal{A}_\eta^{(\theta)} f(x).$$

Теорема доказана.

4. Случай $\alpha \geq \gamma/p$. При $\alpha p > \gamma$ условие $\eta \in \Omega[\alpha, \gamma/p]$ в теореме 2 естественно заменить на $\eta \in \Omega[\alpha, \infty)$. Тогда, используя (3.5), (3.8) и (2.4), для каждой θ -точки Лебега $x \in X$ функции f вместо (3.1) получим неравенство

$$|f(x) - I_{B(x,r)}^{(\theta)} f| \lesssim \eta(r) \left(\int_{B(x,r)} [\mathcal{A}_\eta^{(\theta)} f]^p d\mu \right)^{1/p} \quad (4.1)$$

($\lesssim$ не зависит от f , r и x).

Отсюда легко вывести следующий аналог неравенства Морри (см., например, [1; п. 4.5.3]): *если $\theta, p > 0$, $\alpha p > \gamma$, $\eta \in \Omega[\alpha, \infty)$ и $\mathcal{A}_\eta^{(\theta)} f \in L^p(X)$, то для любых θ -точек Лебега $x_1, x_2 \in X$ функции f*

$$|f(x_1) - f(x_2)| \lesssim \eta(r) \left(\int_{B(x_1, 2a_d r)} [\mathcal{A}_\eta^{(\theta)} f]^p d\mu \right)^{1/p}, \quad r = d(x_1, x_2)$$

($\lesssim$ не зависит от f , r и x_1, x_2).

В самом деле, запишем при $r = d(x_1, x_2)$

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq |f(x_1) - I_{B(x_1,r)}^{(\theta)} f| + |f(x_2) - I_{B(x_2,r)}^{(\theta)} f| + |I_{B(x_1,r)}^{(\theta)} f - I_{B(x_2,r)}^{(\theta)} f|.$$

Первые два слагаемых оцениваются с помощью (4.1), а третье – с помощью второго утверждения леммы 5 и леммы 4.

В частности, при указанных условиях f эквивалентна функции F , локально удовлетворяющей условию Гёльдера. Более точно: для любого шара $B \subset X$

$$|F(x_1) - F(x_2)| \lesssim [r_B^\gamma \mu(B)]^{1/p} \|\mathcal{A}_\eta^{(\theta)} f\|_{L^p(X)} \frac{\eta(d(x_1, x_2))}{[d(x_1, x_2)]^{\gamma/p}}, \quad x_1, x_2 \in B$$

($\lesssim$ не зависит от f , B и x_1, x_2).

Повторение доказательства теоремы 2 в случае $\alpha p = \gamma$, $\eta \in \Omega[\alpha, \infty)$ приводит к такому утверждению: *если $\theta, p > 0$, $\alpha p = \gamma$, $\eta \in \Omega[\alpha, \infty)$ и $\mathcal{A}_\eta^{(\theta)} f \in L^p(X)$, то для любой θ -точки Лебега $x \in X$ функции f выполнено неравенство*

$$\begin{aligned} & |f(x) - I_{B(x,r)}^{(\theta)} f| \\ & \lesssim \eta(r) \left(\int_{B(x,r)} [\mathcal{A}_\eta^{(\theta)} f]^p d\mu \right)^{1/p} \max \left\{ 1, \ln \left[\mathcal{A}_\eta^{(\theta)} f(x) \left(\int_{B(x,r)} [\mathcal{A}_\eta^{(\theta)} f]^p d\mu \right)^{-1/p} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Из этого неравенства легко вывести следующий аналог неравенства Трудингера (см., например, [15; п. 6]): пусть $\theta, p > 0$, $\alpha p = \gamma$ и $\eta \in \Omega[\alpha, \infty)$; тогда существует такая постоянная $a > 0$, что для любых шаров $B \subset X$ и функции $f \in L_{\text{loc}}^\theta(X)$ со свойством $\mathcal{A}_\eta^{(\theta)} f \in L^p(X)$

$$\int_B \exp \left\{ a \frac{|f - I_B^{(\theta)} f|}{\eta(r_B)} \left(\int_{2a_d B} [\mathcal{A}_\eta^{(\theta)} f]^p d\mu \right)^{-1/p} \right\} d\mu \lesssim 1.$$

В самом деле, для любого $y \in B$ запишем неравенство

$$|f(y) - I_B^{(\theta)} f| \leq |f(y) - I_{B(y, r_B)}^{(\theta)} f| + |I_{B(y, r_B)}^{(\theta)} f - I_B^{(\theta)} f|.$$

Первое слагаемое справа оценивается с помощью (4.2), а второе – с помощью (3.10). Мы получим при этом неравенство

$$\begin{aligned} & \frac{|f(y) - I_B^{(\theta)} f|}{\eta(r_B)} \left(\int_{B(y, r)} [\mathcal{A}_\eta^{(\theta)} f]^p d\mu \right)^{-1/p} \\ & \lesssim \max \left\{ 1, \ln \left([\mathcal{A}_\eta^{(\theta)} f(y)]^p \left(\int_{2a_d B} [\mathcal{A}_\eta^{(\theta)} f]^p d\mu \right)^{-1} \right) \right\}, \end{aligned}$$

усреднение которого по $y \in B$ дает нужное утверждение.

5. Неравенства для осцилляций с интегральными средними. Пусть $p > 0$, $0 < \alpha < \gamma/p$, $\eta \in \Omega[\alpha, \gamma/p)$, $f \in L_{\text{loc}}^\theta(X)$, $\theta \geq 1$. Доказательство теоремы 2 позволяет вывести также неравенства

$$|f(x) - f_{B(x, r)}| \lesssim \eta(r) [\mathcal{A}_\eta^{(\theta)} f(x)]^{1-\alpha p/\gamma} \left(\int_{B(x, r)} [\mathcal{A}_\eta^{(\theta)} f]^p d\mu \right)^{\alpha/\gamma} \quad (5.1)$$

(x – 1-точка Лебега) и

$$\left(\int_B |f - f_B|^q d\mu \right)^{1/q} \lesssim \eta(r_B) \left(\int_{2a_d B} [\mathcal{A}_\eta^{(\theta)} f]^p d\mu \right)^{1/p} \quad (5.2)$$

для любого шара $B \subset X$ (здесь $1/q = 1/p - \alpha/\gamma$ и $\lesssim$ в правых частях (5.1), (5.2) не зависят от f , x и B). Они отличаются от (3.1) и (3.2) тем, что в левых частях вместо $I_{B(x, r)}^{(\theta)}$ и $I_B^{(\theta)}$ находятся соответственно интегральные средние $f_{B(x, r)}$ и f_B .

Неравенства (5.1), (5.2) тем сильнее, чем меньше θ , поэтому достаточно рассмотреть случай $\theta = 1$. Для доказательства (5.1) запишем, как и в (3.5),

$$f(x) - f_{B(x, r)} = [I_{B(x, r)}^{(1)} f - f_{B(x, r)}] + \sum_{k=0}^{\infty} [I_{B_{k+1}}^{(1)} f - I_{B_k}^{(1)} f].$$

Второе слагаемое справа оценивалось нужным образом в процессе доказательства теоремы 2. Что касается первого, то рассуждаем так:

$$\begin{aligned} |I_{B(x, r)}^{(1)} f - f_{B(x, r)}| &= \left| \int_{B(x, r)} [f - I_{B(x, r)}^{(1)} f] d\mu \right| \leq A_1(f, B(x, r)) \\ &\leq \eta(r) \min \left\{ \mathcal{A}_\eta f(x), \left(\int_{B(x, r)} [\mathcal{A}_\eta f]^p d\mu \right)^{1/p} \right\} \end{aligned} \quad (5.3)$$

(см. лемму 4).

Неравенство (5.2) получается так:

$$\left(\int_B |f - f_B|^q d\mu \right)^{1/q} \lesssim \left(\int_B |f - I_B^{(1)} f|^q d\mu \right)^{1/q} + |f_B - I_B^{(1)} f|$$

и первое слагаемое оценивается с помощью (3.2), а второе – как в (5.3).

Неравенства (5.1), (5.2) и (3.3) при $\theta = 1$ были доказаны в [12].

Отметим также, что (5.2) справедливо и при $\theta \in (0, 1]$, но при дополнительном предположении $\alpha \geq \max\{\gamma(1/p - 1), 0\}$ относительно α . Это следует из того, что тогда $q \geq 1$ и можно применить (1.10) с $\theta = q \geq 1$ и (3.2).

6. Оценки для операторов $\mathcal{N}_\eta^{(q)}$. В качестве первого применения теоремы 2 приведем оценки для операторов (1.4) через (1.6).

ТЕОРЕМА 3. Пусть $\alpha, \theta, p, q > 0$, $\eta \in \Omega[\alpha, \infty)$. Тогда для $1/q > \max\{1/p - \alpha/\gamma, 0\}$ из условия $\mathcal{A}_\eta^{(\theta)} f \in L^p(X)$ следует $\mathcal{N}_\eta^{(q)} f \in L^p(X)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\alpha < \gamma/p$ и $0 < p_1 < p$ определяется из равенства $1/q = 1/p_1 - \alpha/\gamma$. По лемме 7 можно для почти всех $x \in X$ применить (3.3) с p_1 на месте p , получая поточечное неравенство

$$\mathcal{N}_\eta^{(q)} f(x) \lesssim M_{p_1}(\mathcal{A}_\eta^{(\theta)} f)(x), \quad (6.1)$$

которое является в некотором смысле противоположным к (1.8). Отсюда, а также из леммы 1 и (1.8) получаем требуемое.

В случае $\alpha \geq \gamma/p$ рассуждаем аналогично, опираясь вместо теоремы 2 на неравенства из п. 4.

7. Описания классов Хайлаша–Соболева при $p > 0$. Свяжем теперь поведение максимальных функций $\mathcal{A}_\eta^{(\theta)}$ с неравенствами локальной гладкости вида (1.7). Пусть $p > 0$ и $\eta \in \Omega[0, \infty)$. Будем говорить, что измеримая функция f на X принадлежит классу $\widetilde{M}_\eta^p(X)$, если существует такая неотрицательная функция $g \in L^p(X)$, что

$$|f(x) - f(y)| \leq \eta(d(x, y))[g(x) + g(y)] \quad (7.1)$$

для μ -почти всех $x, y \in X$, $M_\eta^p(X) = \widetilde{M}_\eta^p(X) \cap L^p(X)$. Квазинорма в $M_\eta^p(X)$ вводится следующим образом:

$$\|f\|_{M_\eta^p} = \|f\|_{L^p(X)} + \inf \|g\|_{L^p(X)},$$

где $\inf$ берется по всем функциям $g \in L^p(X)$, удовлетворяющим (7.1). При $\eta(t) = t^\alpha$ будем писать $M_\alpha^p(X)$.

В случае $p > 1$ и $\eta(t) = t$ классы $M_\eta^p(X)$ были введены впервые в [16], где было показано, что $M_1^p(D) = W_1^p(D)$ для достаточно широкого класса областей $D \subset \mathbb{R}^n$. Поэтому $M_1^p(X)$ называют пространствами Хайлаша–Соболева. Позже в ряде работ $M_\eta^p(X)$ рассматривались для общих (в частности, для степенных) функций η и для них были получены различные описания, например, в терминах максимальных функций $\mathcal{S}_\eta$ и $\mathcal{N}_\eta$ (см. [17] и библиографию в этой работе). Из теоремы 3 мы выводим следующее усиление ряда результатов из [17] и [12].

ТЕОРЕМА 4. Пусть $\alpha, p > 0$, $\eta \in \Omega[\alpha, \infty)$. Тогда

- 1) если $\mathcal{A}_\eta^{(\theta)} f \in L^p(X)$ при некотором $\theta > 0$, то $f \in \widetilde{M}_\eta^p(X)$,
- 2) если $f \in \widetilde{M}_\eta^p(X)$, то $\mathcal{N}_\eta^{(q)} f \in L^p(X)$ при $1/q > \max\{1/p - \alpha/\gamma, 0\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\mathcal{A}_\eta^{(\theta)} f \in L^p(X)$, то $\mathcal{N}_\eta^{(q)} f \in L^p(X)$ при некотором q по теореме 3. В силу (1.7) неравенству (7.1) удовлетворяет функция $g = \mathcal{N}_\eta^{(q)} f$.

Чтобы доказать, что из 2) следует 1), возьмем какое-нибудь $\theta \in (0, p)$, $x \in X$ и шар $B \subset X$ радиуса $r_B < 1$, содержащий x . Усредним по $y \in B$ неравенство

$$|f(x) - f(y)|^\theta \lesssim [\eta(r_B)]^\theta [g^\theta(x) + g^\theta(y)],$$

получая

$$\frac{1}{\eta(r_B)} \left(\int_B |f - f(x)|^\theta d\mu \right)^{1/\theta} \lesssim g(x) + \left(\int_B g^\theta d\mu \right)^{1/\theta} \lesssim M_\theta g(x).$$

Отсюда и из (1.8) вытекает, что

$$\mathcal{A}_\eta^{(\theta)} f(x) \leq \mathcal{N}_\eta^{(\theta)} f(x) \lesssim M_\theta g(x).$$

Поэтому из леммы 1 следует, что $\mathcal{A}_\eta^{(\theta)} f \in L^p(X)$. По теореме 3 $\mathcal{N}_\eta^{(q)} f \in L^p(X)$ при $1/q > \max\{1/p - \alpha/\gamma, 0\}$.

Наиболее существенным в теореме 4 является то, что в ней θ можно брать сколь угодно малым. При $\theta < 1$ и $p \leq 1$ утверждение является новым даже для степенной функции $\eta(t) = t^\alpha$, $\alpha > 0$ (при $p > 1 = \theta = q$ см. [17]).

Из теоремы 4 получаем, в частности, такое усиление теоремы 1.

ТЕОРЕМА 5. Пусть $p > 1$ и $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Тогда

- 1) если $\mathcal{A}_1^{(\theta)} f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ при некотором $\theta > 0$, то $f \in W_1^p(\mathbb{R}^n)$,
- 2) если $f \in W_1^p(\mathbb{R}^n)$, то $\mathcal{A}_1^{(\theta)} f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ при $1/\theta > 1/p - 1/n$.

Часть 2) теоремы 5 хорошо известна и включена для полноты, при $1/\theta < 1/p - 1/n$ это уже неверно, так как для таких θ при $f \in W_1^p(\mathbb{R}^n)$ может оказаться, что $f \notin L^\theta(B)$ для любого шара $B \subset \mathbb{R}^n$. Существенно новой является часть 1) теоремы 5 при $0 < \theta < 1$.

8. Самоулучшение неравенства Пуанкаре. Неравенство Пуанкаре (1.1) обладает следующим интересным свойством – из (1.1) при $q = 1$ и $p > 1$ можно вывести это же неравенство с большим показателем $1/q = 1/p - 1/n$ в левой части. В контексте общих метрических пространств этот эффект подробно обсуждается, например, в [15]. Мы рассматриваем следующий более общий вариант неравенств типа Пуанкаре.

Будем говорить, что пара функции $f \in L_{\text{loc}}^\theta(X)$, $g \in L_{\text{loc}}^p(X)$ удовлетворяет $(\sigma, \eta, \theta, p)$ -неравенству Пуанкаре, если для всех шаров $B \subset X$

$$\left(\int_B |f(y) - I_B^{(\theta)} f|^\theta d\mu(y) \right)^{1/\theta} \leq \eta(r_B) \left(\int_{\sigma B} g^p d\mu \right)^{1/p}. \quad (8.1)$$

Существенным отличием от предыдущих исследований неравенств такого типа является включение случая $\theta < 1$ и отсутствие требования локальной суммируемости функции f для таких θ .

ТЕОРЕМА 6. Пусть $\theta, p > 0$, $0 < \alpha < \gamma/p$, $\eta \in \Omega[\alpha, \gamma/p]$, $\sigma \geq 1$. Пусть также функции $f \in L_{\text{loc}}^\theta(X)$, $g \in L_{\text{loc}}^p(X)$ удовлетворяют $(\sigma, \eta, \theta, p)$ -неравенству Пуанкаре, $1/q \geq 1/p - \alpha/\gamma$.

Тогда для любого шара $B \subset X$

1) если $1/q = 1/p - \alpha/\gamma$, то справедливо неравенство слабого типа

$$\frac{\mu\{x \in B : |f(x) - I_B^{(\theta)} f| > \lambda\}}{\mu(B)} \lesssim \left[\frac{\eta(r_B)}{\lambda} \left(\int_{2a_d \sigma B} g^p d\mu \right)^{1/p} \right]^q, \quad \lambda > 0;$$

2) если $1/q > 1/p - \alpha/\gamma$, то

$$\left(\int_B |f(y) - I_B^{(\theta)} f|^q d\mu(y) \right)^{1/q} \lesssim \eta(r_B) \left(\int_{2a_d \sigma B} g^p d\mu \right)^{1/p},$$

$\lesssim$ не зависят от f , g и B .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО копирует обоснование теоремы 2 с единственным изменением – вместо функции u (см. (3.4)) нужно использовать функцию.

$$v(t) = \left(\int_{B(x, \sigma t)} g^p d\mu \right)^{1/p}.$$

Если $\theta \geq 1$, то оба неравенства в теореме 6 сохраняют силу, если в них заменить $I_B^{(\theta)} f$ на интегральные средние f_B . В случае $\theta = 1$ это утверждение имеется в [12] (при $\eta(t) = t$ см. также [15; теорема 5.1]).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Л. К. Эванс, Р. Ф. Гариепи, *Теория меры и тонкие свойства функций*, Университетская серия, **9**, Научная книга, Новосибирск, 2002.
- [2] И. М. Стейн, *Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций*, Мир, М., 1973.
- [3] A. P. Calderón, “Estimates for singular integral operators in terms of maximal functions”, *Studia Math.*, **44** (1972), 563–582.
- [4] A. P. Calderón, R. Scott, “Sobolev type inequalities for $p > 0$ ”, *Studia Math.*, **62** (1978), 75–92.
- [5] C. Fefferman, E. M. Stein, “ H^p spaces of several variables”, *Acta Math.*, **129**:3–4 (1972), 137–193.
- [6] В. И. Коляда, “Оценки максимальных функций, связанных с локальной гладкостью”, *Докл. АН СССР*, **293**:4 (1987), 534–537.
- [7] V. I. Kolyada, “Estimates of maximal functions measuring local smoothness”, *Anal. Math.*, **25**:4 (1999), 277–300.
- [8] К. И. Осолков, “Аппроксимативные свойства суммируемых функций на множествах полной меры”, *Матем. сб.*, **103**:4 (1977), 563–589.
- [9] V. G. Krotov, “Maximal Functions Measuring Smoothness”, *Springer Proc. Math. Stat.*, **25**, Springer, New York, 2013, 197–223.
- [10] R. R. Coifman, G. Weiss, *Analyse Harmonique Non-Commutative sur Certains Espaces Homogènes*, Lecture Notes in Math., **242**, Springer-Verlag, Berlin, 1971.
- [11] J. Heinonen, *Lectures on Analysis on Metric Spaces*, Springer-Verlag, Berlin, 2001.
- [12] И. А. Иванишко, В. Г. Кротов, “Обобщенное неравенство Пуанкаре–Соболева на метрических пространствах”, *Тр. Ин-та матем.*, **14**:1 (2006), 51–61.

- [13] В. Г. Кротов, “Количественная форма C -войства Лузина”, *Укр. матем. журн.*, **62**:3 (2010), 387–395.
- [14] В. Г. Кротов, “Критерии компактности в пространствах L^p , $p \geq 0$ ”, *Матем. сб.*, **203**:7 (2012), 129–148.
- [15] P. Hajłasz, P. Koskela, “Sobolev met Poincaré”, *Mem. Amer. Math. Soc.*, **145** (2000).
- [16] P. Hajłasz, “Sobolev spaces on an arbitrary metric spaces”, *Potential Anal.*, **5**:4 (1996), 403–415.
- [17] И. А. Иванишко, “Обобщенные классы Соболева на метрических пространствах с мерой”, *Матем. заметки*, **77**:6 (2005), 937–941.

В. Г. Кротов

Белорусский государственный университет

E-mail: krotov@bsu.by

Поступило

19.06.2014

Исправленный вариант

22.10.2014

А. И. Порабкович

Белорусский государственный университет

E-mail: porabkovich@bsu.by