Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. Н. Шнурников, О числе областей максимальной размерности в разбиениях проективных пространств наборами гиперплоскостей, *Матем. заметки*, 2015, том 97, выпуск 3, 475–480

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10602>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.135.184

26 апреля 2023 г., 12:26:15

О числе областей максимальной размерности в разбиениях проективных пространств наборами гиперплоскостей

И. Н. Шнурников

Введение. Грюнбаум в [1] систематично изучал комбинаторные характеристики наборов n прямых на проективной плоскости: возможные значения и соотношения между числами v , e , f , t_i и p_j точек пересечения, отрезков прямых, областей, точек пересечения кратности i и j -угольных областей соответственно. В частности, частично описал множество возможных значений числа f связных компонент (областей) дополнения к объединению прямых (не обязательно общего положения). Мартинов в [2] полностью описал множества чисел f для наборов прямых и псевдопрямых. Шеннон в [3] получил нижние точные оценки для числа k -мерных плоскостей и для числа k -мерных клеток в разбиениях вещественного проективного пространства $\mathbb{RP}^d$ нетривиальными наборами из n гиперплоскостей и нашел наборы, на которых оценки достигаются. Заславский в [4] выразил число областей дополнения к наборам гиперплоскостей в терминах комплекса пересечений гиперплоскостей. Бак в [5] нашел максимальные возможные значения числа k -мерных клеток в разбиениях пространства $\mathbb{RP}^d$ наборами n гиперплоскостей.

Настоящая работа является продолжением и обобщением упомянутых результатов Грюнбаума, Шеннона и Мартинова; используются результаты Заславского и свойства геометрических решеток. Приложения работы могут быть ввиду наличия связей между комбинаторикой наборов $\mathcal{A}$ вещественных гиперплоскостей и топологией дополнений $\mathbb{C}^n \setminus \mathcal{A}_{\mathbb{C}}$ к комплексифицированным гиперплоскостям; например, число областей f в вещественной конфигурации совпадает с размерностью кольца когомологий дополнения $\mathbb{C}^n \setminus \mathcal{A}_{\mathbb{C}}$, см. работу Орлика и Соломона [6]. Дешпанд в [7] обобщил характеристический многочлен на конфигурации подмногообразий, ввиду чего представляемая работа может быть обобщена на конфигурации подмногообразий, с соответствующими неравенствами (оценками). Есть также результаты многих других авторов о конфигурациях (гипер)плоскостей, которые здесь не упомянуты потому, что непосредственно не используются. Возможна связь работы с оценкой числа пороговых функций двузначной логики. Число пороговых функций (булевых n -местных функций, задаваемых условием $\sum a_i x_i \geq c$) совпадает с числом областей в конкретной конфигурации из 2^n гиперплоскостей $\pm a_1 \pm a_2 \cdots \pm a_n = c$. Тем самым, полученные в работе нижние оценки числа областей в вырожденных конфигурациях гиперплоскостей могут быть использованы для улучшения нижних оценок числа пороговых функций.

Постановка задачи: рассматривается объединение n различных гиперплоскостей размерности $d - 1$ в вещественном проективном d -мерном пространстве $\mathbb{RP}^d$, причем пересечение всех гиперплоскостей – пустое множество. Описать множество $F_d(n)$ всех возможных значений числа f связных компонент дополнения в $\mathbb{RP}^d$ к объединению n гиперплоскостей. Упорядочив элементы множества $F_d(n)$ по возрастанию, найти несколько первых элементов и доказать, что целые числа между ними не реализуются в качестве числа областей.

Основной результат данной работы – следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $d \geq 3$ и $n \geq 2d + 5$. Тогда первые четыре элемента множества $F_d(n)$, упорядоченного по возрастанию, следующие:

$$(n - d + 1)2^{d-1}, \quad 3(n - d)2^{d-2}, \quad (3n - 3d + 1)2^{d-2}, \quad 7(n - d)2^{d-3}.$$

В отличие от работ Шеннона, ищется не (одно) наименьшее число областей, а несколько первых по возрастанию реализуемых чисел областей (при этом первое из них, естественно,

совпадает с числом Шеннона). В отличие от работ Мартинова [2] и автора [8], рассматриваются наборы гиперплоскостей в пространстве $\mathbb{RP}^d$ при $d \geq 3$. При этом первые три числа множества $F_d(n)$ из теоремы 1 данной работы в случае размерности $d = 3$ не превосходят $6n - 16$ и совпадают с числами, найденными в [8].

Определения и вспомогательные утверждения. Проективные подпространства размерностей i и j пространства $\mathbb{RP}^d$ находятся в *общем положении*, если их пересечение есть $(i + j - d)$ -мерное проективное подпространство при $i + j \geq d$ и пустое множество при $i + j < d$. Скажем, что проективное подпространство находится в общем положении относительно конфигурации гиперплоскостей, если оно находится в общем положении с гиперплоскостями и всеми непустыми пересечениями любого количества гиперплоскостей. *Тривиальными* называются наборы, все гиперплоскости в которых имеют общую точку. *Минимальными*¹ называются (нетривиальные) наборы n гиперплоскостей в $\mathbb{RP}^d$, в которых $n - d + 1$ гиперплоскостей имеют общую $(d - 2)$ -мерную плоскость, а остальные $d - 1$ гиперплоскостей находятся в общем положении (каждая по отношению ко всем остальным). Для набора $\mathcal{A}$, состоящего из n гиперплоскостей размерности $d - 1$ в пространстве $\mathbb{RP}^d$, через $f = f(\mathcal{A})$ обозначим число связанных компонент дополнения в пространстве $\mathbb{RP}^d$ к объединению гиперплоскостей набора; компоненты связности будем называть *областями*. Множество всех чисел f для нетривиальных наборов гиперплоскостей обозначается через $F_d(n)$. Наибольший элемент множества $F_d(n)$ равен $1 + C_{n-1}^1 + \dots + C_{n-1}^{d-1}$ при $d \leq n - 1$ и достигается для наборов гиперплоскостей в общем положении, см. [5]. Для набора $\mathcal{A}$ гиперплоскостей в пространстве $\mathbb{RP}^d$ через $m = m(\mathcal{A})$ обозначим максимальное число гиперплоскостей, имеющих общую точку.

ЛЕММА 1 (Шеннон, [3]). *Наименьший элемент множества $F_d(n)$ равен $(n - d + 1)2^{d-1}$, причем реализуется только на минимальных наборах.*

Пусть p — одна из гиперплоскостей набора $\mathcal{A}$. Через $\mathcal{A}'$ обозначим набор остальных гиперплоскостей из набора $\mathcal{A}$, отличных от p . Через $\mathcal{A}''$ обозначим набор пересечений гиперплоскости p с гиперплоскостями из набора $\mathcal{A}'$, т.е. $\mathcal{A}''$ — это набор $(d - 2)$ -мерных плоскостей в $(d - 1)$ -мерной плоскости p . *Тройкой наборов* назовем тройку $(\mathcal{A}, \mathcal{A}', \mathcal{A}'')$. Через $L(\mathcal{A})$ обозначим упорядоченное обратно включению множество всех непустых пересечений гиперплоскостей из набора, включая все проективное пространство. Элементы множества $L(\mathcal{A})$ будем называть *плоскостями*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. *Функцией Мёбиуса $\mu: L(\mathcal{A}) \times L(\mathcal{A}) \rightarrow \mathbb{Z}$ называется рекуррентно заданная функция*

$$\mu(u, v) = \begin{cases} 0, & \text{если } u \not\leq v; \\ 1, & \text{если } u = v; \\ -\sum_{u \leq w < v} \mu(u, w), & \text{если } u < v. \end{cases}$$

Если первый аргумент функции Мёбиуса — это объемлющее пространство V , то его будем опускать, т.е. писать $\mu(w)$ вместо $\mu(V, w)$ для плоскости w . Для множеств пересечений наборов $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}'$ и $\mathcal{A}''$ соответствующие функции Мёбиуса обозначим через μ , μ' и μ'' .

ЛЕММА 2 (Заславский, [4]). *Для тройки наборов $(\mathcal{A}, \mathcal{A}', \mathcal{A}'')$ верно*

$$f(\mathcal{A}) = f(\mathcal{A}') + f(\mathcal{A}'').$$

ЛЕММА 3. *Пусть $(\mathcal{A}, \mathcal{A}', \mathcal{A}'')$ — тройка наборов, плоскость $v \in L(\mathcal{A})$. Тогда*

$$\mu(v) = \begin{cases} \mu'(v) - \mu''(v), & \text{если } v \in L(\mathcal{A}'), v \in L(\mathcal{A}''), \\ -\mu''(v) & \text{если } v \notin L(\mathcal{A}'), v \in L(\mathcal{A}''), \\ \mu'(v) & \text{если } v \in L(\mathcal{A}'), v \notin L(\mathcal{A}''). \end{cases}$$

¹Перевод термина *near pencil*.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Следует из определения функции Мёбиуса индукцией по коразмерности плоскости v , начиная с 0.

ЛЕММА 4 (Заславский, [4]). Для набора $\mathcal{A}$ гиперплоскостей в проективном пространстве $\mathbb{RP}^d$

$$f(\mathcal{A}) = \sum_{v \in L(\mathcal{A}), 2|\dim(v)} |\mu(v)|.$$

ЛЕММА 5. Для нетривиальных наборов гиперплоскостей

$$f \geq (n - m + 1)(m - d + 2)2^{d-2}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через $p_1, \dots, p_m$ какие-нибудь m гиперплоскостей с непустым пересечением Q . Размерность Q равна нулю, а гиперплоскости $p_1, \dots, p_m$ получаются взятием конуса с центром в Q над некоторым набором $\mathcal{B}$ из m гиперплоскостей в $(d-1)$ -мерном подпространстве. По лемме 1 имеем $f_{d-1}(\mathcal{B}) \geq (m - d + 2)2^{d-2}$. На каждой из остальных гиперплоскостей набора плоскости $p_1, \dots, p_m$ высекают конфигурацию, проективно эквивалентную $\mathcal{B}$. Поэтому при каждом добавлении к гиперплоскостям $p_1, \dots, p_m$ остальных $n - m$ гиперплоскостей одна за одной число областей будет увеличиваться не менее, чем на $(m - d + 2)2^{d-2}$.

ЛЕММА 6. Если плоскость $v \in L(\mathcal{A})$ принадлежит j гиперплоскостям набора, то

$$|\mu(v)| \geq j - d + \dim(v) + 1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Индукция по коразмерности $s = d - \dim(v)$. База индукции для $s = 0, 1, 2$. Предположение индукции: неравенство выполняется для всех плоскостей всех наборов с коразмерностью не более $s - 1$. Переход индукции: выберем из набора $s = d - \dim(v)$ гиперплоскостей $p_1, \dots, p_s$, пересечение которых является плоскостью v . Остальные гиперплоскости набора обозначим через $p_{s+1}, \dots, p_n$. Рассмотрим последовательность наборов гиперплоскостей $\mathcal{A}_0, \dots, \mathcal{A}_{n-s}$, где

$$\mathcal{A}_0 = \{p_1, \dots, p_s\} \quad \text{и} \quad \mathcal{A}_i = \mathcal{A}_{i-1} \cup p_{s+i}.$$

Заметим, что $\mu_{\mathcal{A}_0}(v) = (-1)^s$. По лемме 3 имеем

$$\mu_{\mathcal{A}_i}(v) = \begin{cases} \mu_{\mathcal{A}_{i-1}}(v), & \text{если } v \not\subseteq p_{s+i}, \\ \mu_{\mathcal{A}_{i-1}}(v) - \mu_{p_{s+i} \cap \mathcal{A}_{i-1}}(v), & \text{если } v \subseteq p_{s+i}. \end{cases}$$

Заметим, что

$$\text{sign } \mu_{\mathcal{A}_{i-1}}(v) = (-1)^{d+\dim(v)} \quad \text{и} \quad \text{sign } \mu_{p_{s+i} \cap \mathcal{A}_{i-1}}(v) = (-1)^{d-1+\dim(v)},$$

так как $\text{sign } \mu(u, v) = (-1)^{\dim u + \dim v}$ для любой пары плоскостей $u \preceq v$. Поэтому в случае $v \subseteq p_{s+i}$

$$|\mu_{\mathcal{A}_i}(v)| \geq |\mu_{\mathcal{A}_{i-1}}(v)| + 1.$$

ЛЕММА 7. Для нетривиального набора $\mathcal{A}$ гиперплоскостей в пространстве $\mathbb{RP}^d$ и любого целого $1 \leq i \leq d$

$$\sum_{\dim(v)=d-i} |\mu(v)| \geq (m - d + 1) \frac{C_n^i}{C_{m-d+i}^i}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через $a_j^{(d-i)}$ число $(d-i)$ -мерных плоскостей из множества $L(\mathcal{A})$, принадлежащих j гиперплоскостям набора $\mathcal{A}$, где $i \leq m - (d-i)$ (заметим, что $(d-i)$ -мерная плоскость не может принадлежать более чем $m - (d-i)$ гиперплоскостям, так как найдутся еще не менее чем $d-i$ гиперплоскостей, с которыми у нее непустое пересечение). Рассмотрим пары: поднабор из i гиперплоскостей $p_{k_1}, \dots, p_{k_i}$ набора $\mathcal{A}$

и плоскость $v \in L(\mathcal{A})$ размерности $d - i$, принадлежащая всем гиперплоскостям $p_{k_1}, \dots, p_{k_i}$. Число таких пар не меньше числа поднаборов, т.е. не меньше C_n^i . При этом плоскость, принадлежащая j гиперплоскостям, будет учтена C_j^i раз. Поэтому

$$C_n^i \leq \sum_{j=i}^{m-(d-i)} a_j^{(d-i)} C_j^i \leq \sum_{j=i}^{m-(d-i)} a_j^{(d-i)} (j-i+1) \frac{C_{m-d+i}^i}{m-d+1}.$$

По лемме 6 для плоскости $v \in L(\mathcal{A})$ размерности $d - i$ имеем $|\mu(v)| \geq (j-i+1)$, поэтому

$$\sum_{j=i}^{m-(d-i)} a_j^{(d-i)} (j-i+1) \leq \sum_{\dim(v)=d-i} |\mu(v)|.$$

СЛЕДСТВИЕ 1 (из лемм 4 и 7). Имеем (берем $j = (d-i)/2$):

$$f \geq (m-d+1) \sum_{j=0}^{[(d-1)/2]} \frac{C_n^{d-2j}}{C_{m-2j}^{d-2j}} \geq (m-d+1) \frac{C_n^d}{C_m^d}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Построим примеры (а)–(г) наборов гиперплоскостей с указанными числами f областей, указав системы точек $A_1, \dots, A_n$, проективно двойственных гиперплоскостям.

(а) Пусть точки $A_1, \dots, A_{n-d+1}$ лежат на одной прямой, точки $A_{n-d+2}, \dots, A_n$ находятся в общем положении по отношению друг к другу и к предыдущим точкам. Тогда проективно двойственный набор гиперплоскостей будет минимальным и $f = (n-d+1)2^{d-1}$.

(б) Пусть точки $A_1, \dots, A_{n-d}$ лежат на одной прямой, точки A_1, A_{n-1}, A_n лежат на одной прямой, и других вырождений между точками $A_1, \dots, A_n$ нет. Тогда $f = 3(n-d)2^{d-2}$.

(в) Пусть точки $A_1, \dots, A_{n-d}$ лежат на одной прямой, точки A_1, A_2, A_{n-1}, A_n лежат в одной трехмерной плоскости, и других вырождений между точками $A_1, \dots, A_n$ нет. Тогда $f = (3n-3d+1)2^{d-2}$.

(г) Пусть точки $A_1, \dots, A_{n-d}$ лежат на одной прямой, точки $A_1, A_{n-2}, A_{n-1}, A_n$ лежат в одной трехмерной плоскости, и других вырождений между точками $A_1, \dots, A_n$ нет. Тогда $f = 7(n-d)2^{d-3}$.

Докажем по индукции по d , что остальные реализуемые числа областей (для данных чисел n и d) больше, чем $7(n-d)2^{d-3}$. Если $m = d$, то гиперплоскости набора находятся в общем положении и число областей максимальное возможное. Для $m = d+1$ по следствию 1 имеем

$$f \geq 2 \frac{C_n^{d+1}}{n-d} \geq 7(n-d)2^{d-3}$$

при $n \geq 2d+5$. Далее и в базе, и в переходе индукции будем считать, что $m \geq d+2$.

База индукции: $d = 3$, $n \geq 11$. Пересекающиеся в одной точке m плоскостей образуют конус над двумерной конфигурацией прямых, поэтому число областей, образуемых ими без оставшихся плоскостей, равно числу областей $\varphi \in F_2(m)$ двумерной конфигурации, и известно по работе Мартинова [2]. Возможны три случая.

Случай 1) $m = n-1$. Тогда $f(\mathcal{A}) = 2\varphi$, где $\varphi \in \{2n-4, 3n-9, 3n-8\}$ или $\varphi \geq 4n-16$.

Случай 2) $5 \leq m \leq n-3$. По лемме 5 имеем $f \geq 2(n-m+1)(m-1) \geq 8n-32 \geq 7n-21$ при $n \geq 11$.

Случай 3) $m = n-2$. Обозначим через l прямую пересечения двух оставшихся плоскостей; если прямая l принадлежит объединению m плоскостей, то $f = 3\varphi$, где

$$\varphi = 2n-6 \quad \text{или} \quad \varphi \geq 3n-12.$$

Если прямая l не принадлежит объединению m плоскостей, то $f = 3\varphi + b$, где b равно числу точек пересечения m плоскостей с прямой l . Если $\varphi \geq 3n-12$, то, очевидно, $f \geq 7n-21$.

Если $\varphi = 2n - 6$, то m плоскостей образуют конус над минимальной конфигурацией $n - 2$ прямых в $\mathbb{RP}^2$ и поэтому из m плоскостей все, кроме одной, проходят через проективную прямую, не пересекающуюся с прямой l . Значит, точки пересечения прямой l с этими $n - 3$ плоскостями различны и $b \geq n - 3$. Откуда $f \geq 7n - 21$. База индукции проверена.

Предположение индукции – первые 4 числа множества $F_p(n)$ имеют указанный вид для любых целых чисел $3 \leq p < d$ и $n \geq 2p + 5$. Переход индукции: возьмем нетривиальный набор $\mathcal{A}$ гиперплоскостей в пространстве $\mathbb{RP}^d$. Ввиду первого после примера абзаца доказательства можно считать $m \geq d + 2$; рассмотрим три случая.

Случай 1) $m = n - 1$. Тогда $f(\mathcal{A}) = 2\varphi$, где $\varphi \in F_{d-1}(n - 1)$. Применяя предположение индукции к множеству $F_{d-1}(n - 1)$, получим, что либо φ совпадает с одним из трех чисел

$$(n - d + 1)2^{d-2}, \quad 3(n - d)2^{d-3}, \quad (3n - 3d + 1)2^{d-3},$$

либо $\varphi \geq 7(n - d)2^{d-4}$.

Случай 2) $d + 2 \leq m \leq n - 3$. По лемме 5 имеем

$$f \geq (n - m + 1)(m - d + 2)2^{d-2} \geq (4n - 4d - 4)2^{d-2} \geq 7(n - d)2^{d-3}$$

при $n \geq d + 8$.

Случай 3) $m = n - 2$. Рассмотрим $n - 2$ гиперплоскости $p_1, \dots, p_{n-2}$, имеющих общую точку. Они делят пространство $\mathbb{RP}^d$ на φ областей, где $\varphi \in F_{d-1}(n - 2)$. Обозначим через l пересечение двух оставшихся гиперплоскостей p_{n-1} и p_n . По предположению индукции

$$\varphi = (n - d)2^{d-2} \quad \text{или} \quad \varphi \geq 3(n - d - 1)2^{d-3}$$

(предположение индукции можно использовать, так как $n - 2 \geq 2(d - 1) + 5$). Если $l \in \bigcup_{i=1}^{n-2} p_i$, то $f = 3\varphi$ и случай $m = n - 2$ разобран. Если $l \notin \bigcup_{i=1}^{n-2} p_i$, то обозначим через $\mathcal{B}$ множество плоскостей $p_i \cap l$ в плоскости l , где l рассматривается как объемлющее $(d - 2)$ -мерное проективное пространство. По лемме 2 число областей в конфигурации $\mathcal{A}$ равно $3\varphi + f(\mathcal{B})$, и, если $\varphi \geq 3(n - d - 1)2^{d-3}$, то случай $m = n - 2$ разобран. Если $\varphi = (n - d)2^{d-2}$, то по лемме 1 плоскости $p_1, \dots, p_{n-2}$ образуют минимальный набор, в котором гиперплоскости $p_1, \dots, p_{n-d}$ проходят через общую $(d - 2)$ -мерную плоскость l_0 , а каждая из гиперплоскостей $p_{n-d+1}, \dots, p_{n-2}$ находится в общем положении по отношению к остальным (кроме себя) гиперплоскостям $p_1, \dots, p_{n-2}$. Докажем, что тогда $\mathcal{B}$ – нетривиальный набор как минимум $n - 3$ плоскостей в пространстве l ; нетривиальность очевидна. Заметим, что размерность пересечения $l_0 \cap l$ равна $d - 4$, так как иначе по соображениям размерности в наборе $\mathcal{A}$ нашлась бы $n - 1$ гиперплоскость с не пустым пересечением, а именно, все, кроме одной из гиперплоскостей $p_{n-d+1}, \dots, p_{n-2}$, что противоречит равенству $m = n - 2$. Плоскость l пересекается с каждой из гиперплоскостей $p_1, \dots, p_{n-2}$ по $(d - 3)$ -мерной плоскости из набора $\mathcal{B}$. Если в наборе $\mathcal{B}$ меньше чем $n - 3$ плоскостей, то выполняется один из двух вариантов:

- $\dim p_i \cap p_j \cap p_k \cap l = d - 3$ для некоторых индексов $i < j < k \leq n - 2$,
- $\dim p_i \cap p_j \cap l = \dim p_k \cap p_r \cap l = d - 3$ для различных индексов i, j, k, r , не превосходящих числа $n - 2$.

Рассмотрим первый случай. Из трех индексов i, j и k хотя бы два больше, чем $n - d$ (так как иначе $\dim l_0 \cap l \geq d - 3$). Если $d = 4$, то это будут индексы $j = n - 3$ и $k = n - 2$. Тогда прямая $p_i \cap p_{n-3} \cap p_{n-2}$ содержит точку пересечения $n - 2$ гиперплоскостей, но одновременно принадлежит плоскости l , значит, все n гиперплоскостей набора $\mathcal{A}$ проходят через одну точку – противоречие с условием $m = n - 2$. Если $d \geq 5$, то гиперплоскости (из них не менее $n - d + 4$ различных)

$$p_1, \dots, p_{n-d}, p_i, p_j, p_k, p_{n-1}, p_n$$

пересекаются по плоскости размерности не менее чем $d - 5$, поэтому вместе с еще $(d - 5)$ -ю гиперплоскостями набора $\mathcal{A}$ имеют общую точку, что противоречит условию $m = n - 2$.

Рассмотрим второй случай. Заметим, что

$$\dim p_i \cap p_j \cap p_k \cap p_r \cap p_{n-1} \cap p_n \geq d - 4.$$

Не более двух индексов из i, j, k и r не превосходят $n - d$. Возможны три случая: таких индексов два, один или нет.

(а) Если таких индексов два, то можно считать, что $i < k \leq n - d$. Тогда

$$l \cap l_0 = l_0 \cap p_j \cap p_r$$

и все n гиперплоскостей набора $\mathcal{A}$ имеют общую точку.

(б) Если такой индекс один, то можно считать, что $i \leq n - d$. Тогда $d \geq 5$ и размерность пересечения гиперплоскостей

$$p_1, \dots, p_{n-d}, p_k, p_r, p_{n-1}, p_n$$

не менее, чем $d - 5$. Поэтому они вместе с еще $(d - 5)$ -ю гиперплоскостями набора $\mathcal{A}$ (выбранных из гиперплоскостей $p_{n-d+1}, \dots, p_{n-2}$) имеют общую точку.

(в) Если таких индексов нет, то $d \geq 6$ и размерность пересечения плоскостей

$$p_1, \dots, p_{n-d}, p_i, p_j, p_k, p_r, p_{n-1}, p_n$$

не меньше, чем $d - 6$. Поэтому все гиперплоскости набора $\mathcal{A}$ имеют не пустое пересечение. Во всех трех подслучаях (а)–(в) получили противоречие с условием $m = n - 2$.

Вернемся к оценке числа f . Раз $\mathcal{B}$ – нетривиальный набор из не менее, чем $n - 3$ плоскостей, то по лемме 1 имеем $f(\mathcal{B}) \geq (n - d)2^{d-3}$ и

$$f(\mathcal{A}) = 3\varphi + f(\mathcal{B}) \geq 7(n - d)2^{d-3}.$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] B. Grünbaum, *Arrangements and Spreads*, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1972.
 [2] N. Martinov, *Discrete Comput. Geom.*, **9**:1 (1993), 39–46. [3] R. W. Shannon, *J. Combinatorial Theory Ser. A*, **20**:3 (1976), 327–335. [4] T. Zaslavsky, *Mem. Amer. Math. Soc.*, **1**, no. 154, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1975. [5] R. C. Buck, *Amer. Math. Monthly*, **50** (1943), 541–544. [6] P. Orlic, L. Solomon, *Invent. Math.*, **56**:2 (1980), 167–189. [7] P. Deshpande, *Arrangements of Submanifolds and the Tangent Bundle Complement*, Electronic Thesis and Dissertation Repository, Paper 154, 2011. [8] И. Н. Шнурников, “Конфигурации подмногообразий коразмерности 1”, *Матем. сб.*, **203**:9 (2012), 133–160.

И. Н. Шнурников

Национальный исследовательский университет
 «Высшая школа экономики», г. Москва
 E-mail: shnurnikov@yandex.ru

Поступило

27.07.2014