Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Н. Чугунов, О представлении вещественных нормальных $(T + H)$ -матриц в случае, когда кососимметричные части обоих слагаемых являются косыми циркулянтами, *Матем. заметки*, 2015, том 98, выпуск 2, 258–270

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10604>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.130.99

26 апреля 2023 г., 08:20:35

О представлении вещественных нормальных $(T + H)$ -матриц в случае, когда кососимметричные части обоих слагаемых являются косыми циркулянтами

В. Н. Чугунов

В статье дается описание еще одного частного класса нормальных матриц, представимых в виде суммы вещественных теплицевой и ганкелевой матриц.

Библиография: 3 названия.

DOI: 10.4213/mzm10604

1. Введение. *Теплицевой* называется $(n \times n)$ -матрица T , имеющая вид

$$T = \begin{pmatrix} t_0 & t_1 & t_2 & \dots & t_{n-1} \\ t_{-1} & t_0 & t_1 & \dots & t_{n-2} \\ t_{-2} & t_{-1} & t_0 & \dots & t_{n-3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_{-n+1} & t_{-n+2} & t_{-n+3} & \dots & t_0 \end{pmatrix}, \quad (1)$$

а *ганкелевой* называется $(n \times n)$ -матрица H вида

$$H = \begin{pmatrix} h_{n-1} & h_{n-2} & h_{n-3} & \dots & h_0 \\ h_{n-2} & h_{n-3} & h_{n-4} & \dots & h_{-1} \\ h_{n-3} & h_{n-4} & h_{n-5} & \dots & h_{-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_0 & h_{-1} & h_{-2} & \dots & h_{-n+1} \end{pmatrix}.$$

Теплицева матрица (1) называется *циркулянт*ом, если

$$t_{-j} = t_{n-j}, \quad j = 1, 2, \dots, n-1,$$

и *косым циркулянт*ом при

$$t_{-j} = -t_{n-j}, \quad j = 1, 2, \dots, n-1.$$

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (грант № 14-11-00806).

Пусть $\mathcal{P}_n$ – перьединиичная $(n \times n)$ -матрица

$$\mathcal{P}_n = \begin{pmatrix} & & & & 1 \\ & & & 1 & \\ & & \ddots & & \\ & 1 & & & \\ 1 & & & & \end{pmatrix}.$$

Ганкелевым циркулянт S называется матрица, для которой $S\mathcal{P}_n$ есть циркулянт. Если же матрица $S\mathcal{P}_n$ – косо циркулянт, то S – *ганкелев косо циркулянт*.

Вещественной нормальной $(T + H)$ -задачей называется задача описания нормальных матриц, представимых в виде суммы вещественных теплицевой и ганкелевой матриц.

Пусть A и B – произвольные вещественные теплицевы $(n \times n)$ -матрицы, а

$$R = A + B\mathcal{P}_n \quad (2)$$

– соответствующая матрица, представимая в виде суммы вещественных теплицевой и ганкелевой матриц.

Записывая для R условие нормальности, получаем

$$(A + B\mathcal{P}_n)(A^t + \mathcal{P}_n B^t) = (A^t + \mathcal{P}_n B^t)(A + B\mathcal{P}_n),$$

или

$$AA^t + A\mathcal{P}_n B^t + B\mathcal{P}_n A^t + BB^t = A^t A + A^t B\mathcal{P}_n + \mathcal{P}_n B^t A + \mathcal{P}_n B^t B\mathcal{P}_n. \quad (3)$$

Будучи персимметричными матрицами, A и B удовлетворяют соотношениям

$$A\mathcal{P}_n = \mathcal{P}_n A^t, \quad B\mathcal{P}_n = \mathcal{P}_n B^t. \quad (4)$$

Используя (4) в (3), имеем

$$AA^t + AB\mathcal{P}_n + BA\mathcal{P}_n + BB^t = A^t A + A^t B\mathcal{P}_n + BA^t \mathcal{P}_n + BB^t,$$

или

$$A^t A - AA^t = [(A - A^t)B + B(A - A^t)]\mathcal{P}_n. \quad (5)$$

На данный момент задача описания вещественных $(T + H)$ -матриц не имеет полного решения; найдены лишь частные классы требуемых матриц.

В работе [1] показано, что решение вещественной нормальной $(T + H)$ -задачи можно разбить на четыре случая, которые сформулируем в терминах матриц A и B :

- 1) матрица A симметрична, тогда для любой матрицы B матрица R будет решением рассматриваемой задачи как симметричная матрица;
- 2) матрицы $(A - A^t)$ и $(B - B^t)$ одновременно представляют собой циркулянты (этот случай разобран в статье [2]);
- 3) матрицы $(A - A^t)$ и $(B - B^t)$ – одновременно косые циркулянты;
- 4) матрица B симметрична.

Данная работа посвящена подробному разбору третьего случая. В статье будет дано полное описание нормальных вещественных $(T + H)$ -матриц, подчиняющихся соответствующему дополнительному набору условий. В п. 2 покажем, как преобразуется решаемое уравнение в этом случае, и приведем его к системе двух матричных уравнений. В п. 3 установим справедливость нескольких вспомогательных утверждений. Главный результат, сформулированный и доказанный в п. 4, позволяет получить решение первого уравнения системы. Второе уравнение является достаточно простым; его решению посвящен заключительный п. 5.

В дальнейшем нам понадобятся некоторые вспомогательные свойства и определения.

Из (4) следует, что если T – теплицева симметричная матрица, то

$$TP_n = P_n T,$$

а для всякой кососимметричной теплицевой матрицы T верно соотношение

$$TP_n = -P_n T. \quad (6)$$

Согласно [3], если S – косой циркулянт, то для него справедливо спектральное разложение вида

$$S = GF_n^* D F_n \bar{G}, \quad (7)$$

где

$$G = \text{diag}(1, \psi, \psi^2, \dots, \psi^{n-1}), \quad \psi^n = -1,$$

т.е. ψ – корень n -й степени из -1 вида $\psi = e^{i\pi/n}$, $D = \text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n)$ – диагональная матрица, F_n – (нормированная) матрица дискретного преобразования Фурье

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \epsilon & \epsilon^2 & \dots & \epsilon^{n-1} \\ 1 & \epsilon^2 & \epsilon^4 & \dots & \epsilon^{2(n-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \epsilon^{n-1} & \epsilon^{2(n-1)} & \dots & \epsilon^{(n-1)^2} \end{pmatrix},$$

$\epsilon = e^{2\pi i/n}$ – первообразный корень n -й степени из единицы.

Матрицу W будем называть (α, β) -шахматной, если

$$\{W\}_{ij} = \begin{cases} \alpha, & \text{если } |i - j| \text{ – четное число,} \\ \beta & \text{иначе.} \end{cases}$$

Пусть Q и Q_2 – матрицы вида

$$Q = P_1 \oplus P_{n-1}, \quad Q_2 = P_2 \oplus P_{n-2},$$

I_n – единичная матрица порядка n . Будем говорить, что нижнетреугольная теплицева матрица с первым столбцом

$$(x_0, x_1, \dots, x_{n-1})^t$$

имеет *уровень* $q \geq 0$, если

$$x_0 = x_1 = x_2 = \dots = x_{q-1} = 0, \quad x_q \neq 0.$$

Вектор x назовем *четным*, если $x = \mathcal{P}_n x$. Также нам понадобится понятие Q -четного вектора. Вектор x назовем *Q -четным*, если $x = Qx$. Через e_j будем обозначать вектор, содержащий единицу в позиции j и нули во всех остальных.

2. Получение системы уравнений. Исследуем решение уравнения (5) в случае, когда матрицы $(A - A^t)$ и $(B - B^t)$ одновременно являются косыми циркулянтами.

Известно, что всякая теплицева матрица однозначно представима в виде суммы циркулянта с нулевой диагональю и косоого циркулянта. Запишем

$$A = C_1 + S_1, \quad B = C_2 + S_2, \quad (8)$$

где C_1, C_2 – циркулянты с нулевой диагональю, а S_1, S_2 – косые циркулянты. Тогда условие, что $(A - A^t)$ и $(B - B^t)$ являются косыми циркулянтами, можно записать через матричные соотношения. Действительно,

$$A - A^t = C_1 + S_1 - C_1^t - S_1^t = C_1 - C_1^t + (S_1 - S_1^t).$$

Поэтому условие, что $(A - A^t)$ – косоый циркулянт, эквивалентно равенству

$$C_1 = C_1^t. \quad (9)$$

Аналогично выводится соотношение

$$C_2 = C_2^t. \quad (10)$$

Подставив (8) в (5) и учитывая (9), (10), получим

$$\begin{aligned} & (C_1 + S_1)^t(C_1 + S_1) - (C_1 + S_1)(C_1 + S_1)^t \\ &= [(S_1 - S_1^t)(C_2 + S_2) + (C_2 + S_2)(S_1 - S_1^t)]\mathcal{P}_n, \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} & C_1 C_1 + C_1 S_1 + S_1^t C_1 + S_1^t S_1 - C_1 C_1 - C_1 S_1^t - S_1 C_1 - S_1 S_1^t \\ &= [(S_1 - S_1^t)(C_2 + S_2) + (C_2 + S_2)(S_1 - S_1^t)]\mathcal{P}_n. \end{aligned}$$

Так как косые циркулянты коммутируют, имеем

$$(S_1^t - S_1)C_1 - C_1(S_1^t - S_1) + (S_1^t - S_1)C_2\mathcal{P}_n + C_2(S_1^t - S_1)\mathcal{P}_n = 2(S_1 - S_1^t)S_2\mathcal{P}_n.$$

Введем косоый циркулянт $S = S_1^t - S_1$. Тогда получим

$$SC_1 - C_1 S + SC_2\mathcal{P}_n + C_2 S\mathcal{P}_n = -2SS_2\mathcal{P}_n.$$

Домножим последнее равенство справа на $\mathcal{P}_n$. Учитывая, что $S\mathcal{P}_n = -\mathcal{P}_n S$ (см. (6)), получим

$$(C_2 + C_1\mathcal{P}_n)S + S(C_2 + C_1\mathcal{P}_n) = -2SS_2. \quad (11)$$

Основная задача – решение уравнения (11). Для его упрощения воспользуемся леммой из статьи [2].

ЛЕММА 1. Пусть M_1, M_2, M_3 и M_4 – вещественные $(n \times n)$ -матрицы, удовлетворяющие следующим условиям: $M_1^t = -M_1$, M_2 – нормальная матрица, матрицы M_1 и M_2 коммутируют. Тогда уравнение

$$(M_3 + M_4 P_n)M_1 + M_1(M_3 + M_4 P_n) = -2M_1 M_2$$

эквивалентно системе

$$\begin{cases} (M_3 + M_4 P_n)M_1 + M_1(M_3 + M_4 P_n) = 0, \\ M_1 M_2 = 0. \end{cases}$$

Применяя данную лемму к уравнению (11), получаем систему

$$\begin{cases} (C_2 + C_1 P_n)S + S(C_2 + C_1 P_n) = 0, \\ SS_2 = 0. \end{cases} \quad (12)$$

3. Вспомогательные леммы. В этом пункте установим справедливость некоторых вспомогательных утверждений.

ЛЕММА 2. Если S_1 и S_2 – кососимметричные косые циркулянты, то матрица $S_1 S_2$ симметрична.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По условию

$$S_1^t = -S_1, \quad S_2^t = -S_2.$$

Имеем

$$(S_1 S_2)^t = S_2^t S_1^t = S_2 S_1 = S_1 S_2$$

в силу того, что косые циркулянты коммутируют. Лемма 2 доказана.

ЛЕММА 3. Если S_1 и S_2 – косые циркулянты, то матрица $S_1 P_n S_2$ симметрична.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу того, что произведение косых циркулянтов является косым циркулянтом, матрица $S_1 P_n S_2 = S_1 S_2^t P_n$ будет ганкелевым косым циркулянтом, а потому симметричной. Лемма 3 доказана.

Теперь установим справедливость леммы, которая будет играть основную роль в представляемом в данной статье результате.

ЛЕММА 4. Пусть L и K – нижнетреугольные теплицевы $(n \times n)$ -матрицы с первыми столбцами

$$l = (0, l_1, l_2, \dots, l_{n-1})^t, \quad k = (0, k_1, k_2, \dots, k_{n-1})^t$$

соответственно, причем векторы l и k являются Q -четными; S – ненулевой кососимметричный косой циркулянт с нулевой диагональю. Тогда из симметричности матрицы $(L + K P_n)S$ следует, что выполняется одно из следующих условий:

- 1) $L = K = 0$;

2) n – четное число, и векторы l и k имеют вид

$$l = (0, \alpha, 0, \alpha, 0, \dots, 0, \alpha)^t, \quad k = (0, 0, -\alpha, 0, -\alpha, \dots, -\alpha, 0)^t,$$

где $\alpha \neq 0$ – вещественное число.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть S – косой циркулянт с первым столбцом

$$s = (0, s_1, s_2, \dots, s_{n-1})^t.$$

Из условия кососимметричности S следует Q -четность вектора s .

Заметим, что матрицы L и K строго нижнетреугольные, поэтому матрица $L + K\mathcal{P}_n$ имеет нулевую первую строку, поэтому и матрица $(L + K\mathcal{P}_n)S$ также имеет нулевую первую строку. В силу симметричности она должна иметь нулевой первый столбец, т.е.

$$(L + K\mathcal{P}_n)s = 0. \quad (13)$$

Так как данное уравнение теряет смысл для первого элемента и у s первый элемент нулевой, то введем в рассмотрение две вспомогательные матрицы и вектор. Пусть $\hat{L}$ получается из L вычеркиванием первого столбца и первой строки, а $\hat{K}$ получается из K вычеркиванием последнего столбца и первой строки. Вектор $\hat{s}$ получается из s удалением первого элемента. Так как $S \neq 0$, то $\hat{s} \neq 0$. Тогда имеем

$$(\hat{L} + \hat{K}\mathcal{P}_{n-1})\hat{s} = 0, \quad \text{или} \quad \hat{L}\hat{s} + \hat{K}\mathcal{P}_{n-1}\hat{s} = 0.$$

Из условия Q -четности вектора s следует четность $\hat{s}$:

$$\hat{L}\hat{s} + \hat{K}\hat{s} = 0, \quad \text{или} \quad (\hat{L} + \hat{K})\hat{s} = 0.$$

Основная идея доказательства – исследование матрицы $\hat{L} + \hat{K}$. По векторам l и k определим векторы $\hat{l}$ и $\hat{k}$ удалением первого нулевого элемента. Тогда из условий Q -четности k и l следует, что

$$\mathcal{P}_{n-1}\hat{l} = \hat{l}, \quad \mathcal{P}_{n-1}\hat{k} = \hat{k}. \quad (14)$$

Пусть Z_n – матрица порядка n вида

$$Z_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Простой проверкой несложно убедиться, что матрица $\hat{L} + \hat{K}$ является теплицевой нижнетреугольной с первым столбцом $Z_{n-1}\hat{l} + \hat{k}$, или

$$\{\hat{L} + \hat{K}\}_{1j} = \begin{cases} k_1, & j = 1, \\ l_{j-1} + k_j, & j = 2, \dots, m-1, \\ l_{m-1} + k_m, & j = m, \\ l_m + k_m, & j = m+1, \\ l_m + k_{m-1}, & j = m+2, \\ l_{n-j+1} + k_{n-j}, & j = m+3, \dots, n-1, \end{cases}$$

если $n = 2m + 1$,

$$\{\widehat{L} + \widehat{K}\}_{1j} = \begin{cases} k_1, & j = 1, \\ l_{j-1} + k_j, & j = 2, \dots, m-2, \\ l_{m-2} + k_{m-1}, & j = m-1, \\ l_{m-1} + k_m, & j = m, \\ l_m + k_{m-1}, & j = m+1, \\ l_{m-1} + k_{m-2}, & j = m+2, \\ l_{n-j+1} + k_{n-j}, & j = m+3, \dots, n-1, \end{cases}$$

если $n = 2m$.

Рассмотрим несколько случаев.

1. Матрица $\widehat{L} + \widehat{K}$ имеет уровень $q \leq \lfloor (n-1)/2 \rfloor$. Тогда вектор $\widehat{s}$ содержит первые $n - q - 1$ нулей и в силу четности является нулевым, что противоречит условию леммы.

2. Матрица $\widehat{L} + \widehat{K}$ имеет уровень $q \geq \lfloor (n-1)/2 \rfloor + 1$ и не является нулевой.

В этой ситуации K однозначно определяется по L : $k_1 = 0$, $k_j = -l_{j-1}$ для $j = 2, 3, \dots, \lfloor n/2 \rfloor$. Из вида матрицы $\widehat{L} + \widehat{K}$ следует, что найдется такое число q_0 , что $l_{q_0-2} \neq -l_{q_0}$.

Пусть сначала $l_1 = 0$. Нам будет недостаточно рассматривать условие (13). Так как $k_1 = 0$, то у матрицы $L + K\mathcal{P}_n$ две первые строки равны нулю, а значит, являются нулевыми и две первые строки матрицы $(L + K\mathcal{P}_n)S$, и в силу симметричности два первых столбца. Условие равенства нулю первого столбца мы использовали.

Второй столбец матрицы S имеет вид $J\mathbf{s}$, где

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

тогда $(L + K\mathcal{P}_n)J\mathbf{s} = 0$, или

$$LJ\mathbf{s} + K\widetilde{J}\mathbf{s} = 0, \quad (15)$$

где

$$\widetilde{J} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим матрицу L . Если ее первый столбец нулевой, то $L = K = 0$. Пусть теперь

$$l_1 = l_2 = \dots = l_{p-1} = 0, \quad l_p \neq 0, \quad p \leq \left\lceil \frac{n-1}{2} \right\rceil, \quad p \geq 2;$$

тогда

$$k_1 = k_2 = \dots = k_p = 0, \quad k_{p+1} \neq 0.$$

Проанализируем структуру матриц LJ и $K\tilde{J}$. Эти матрицы получаются из L и K перестановками столбцов. Матрица LJ без последнего столбца является теплицевой, а $K\tilde{J}$ без последнего столбца – ганкелевой. У матрицы $LJ + K\tilde{J}$ первые $p \geq 2$ строк нулевые, а в $(p+1)$ -й строке отличен от нуля лишь последний элемент, поэтому $s_0 = s_1 = s_{n-1} = 0$. По матрице LJ построим матрицу $\tilde{L}$, получающуюся из LJ удалением первого, второго и последнего столбцов и первых трех строк. Матрица $\tilde{L}$ будет теплицевой с уровнем p . Аналогичным образом по $K\tilde{J}$ построим матрицу $\tilde{K}$, которая будет ганкелевой, а матрица $\tilde{K}\mathcal{P}_{n-3}$ – теплицевой уровня $p-2$. По s построим вектор $\tilde{s}$, удалив в s первый, второй и последний элементы, тогда $\mathcal{P}_{n-3}\tilde{s} = \tilde{s}$. Из (15) получаем

$$(\tilde{L} + \tilde{K})\tilde{s} = 0, \quad \text{или} \quad (\tilde{L} + \tilde{K}\mathcal{P}_{n-3})\tilde{s} = 0.$$

Матрица $\tilde{L} + \tilde{K}\mathcal{P}_{n-3}$ – теплицева уровня $p-2$. Следовательно, $s = 0$ – противоречие с условием леммы. Значит, $K = L = 0$.

Пусть теперь $l_1 \neq 0$. Так как масштабирование сохраняет симметрию, то можем работать с матрицей $(L + K\mathcal{P}_n)S$, удовлетворяющей условию $l_1 = 1$. Тогда $k_1 = 0$, $k_2 = -1$. Матрица $L + K\mathcal{P}_n$ имеет во второй строке лишь одну единицу в позиции $(2, 1)$, поэтому в силу кососимметричности S вторая строка $(L + K\mathcal{P}_n)S$ совпадает с вектором $-s^t$, и для симметрии должно выполняться условие

$$(L + K\mathcal{P}_n)Js = -s, \quad \text{или} \quad ((L - le_1^t)J + K\tilde{J} + I_n + le_1^t J)s = 0.$$

Так как $(L - le_1^t)J = Z_n L$ и $e_1^t J = (J^t e_1)^t = -e_n^t$, то

$$(Z_n L + K\tilde{J} + I_n - le_n^t)s = 0.$$

В силу того, что вектор s является Q -четным, верно соотношение $K\tilde{J}s = K(Z_n^t)^2 s$. Имеем

$$(Z_n L + K(Z_n^t)^2 + I_n - le_n^t)s = 0.$$

Исследуем структуру матрицы

$$U = Z_n L + K(Z_n^t)^2 + I_n - le_n^t.$$

Учитывая связь между матрицами K и L , для наглядности выпишем несколько строк и столбцов матрицы U

$$U = \left(\begin{array}{cc|cccccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -l_2 \\ l_2 & 1 & -l_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -l_3 \\ l_3 & l_2 & 1-l_3 & -l_2 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -l_4 \\ l_4 & l_3 & l_2-l_4 & 1-l_3 & -l_2 & 0 & 0 & \dots & 0 & -l_5 \\ l_5 & l_4 & l_3-l_5 & l_2-l_4 & 1-l_3 & -l_2 & 0 & \dots & 0 & -l_6 \\ l_6 & l_5 & l_4-l_6 & l_3-l_5 & l_2-l_4 & 1-l_3 & -l_2 & \dots & 0 & -l_7 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \end{array} \right).$$

Если из U удалить первый, второй и последний столбцы, то получится матрица $\hat{U}$, являющаяся прямоугольным аналогом теплицевой, с первым столбцом

$$\hat{u} = Z_n(Le_2 - Le_1 + e_2).$$

При этом вектор $\hat{u}$ в трех первых позициях имеет нулевые элементы. Заметим, что результатом сложения второго и последнего столбцов матрицы U будет вектор

$$u = Z_n Le_2 - Le_1 + e_2 = (0, 0, u_2, u_3, u_4, \dots, u_{n-1}).$$

Так как $s_{n-1} = s_1$, $s_0 = 0$, то, если $u_2 \neq 0$, имеем условие $s_{n-1} = s_1 = 0$. Сформируем из матрицы U матрицу $\tilde{U}$ путем удаления первого, второго и последнего столбцов и первых трех строк, по s построим вектор $\tilde{s}$, удалив в s первый, второй и последний элементы, тогда приходим к системе

$$\tilde{U}\tilde{s} = 0$$

с невырожденной матрицей $\tilde{U}$. Откуда следует, что $\tilde{s} = 0$, а поэтому $s = 0$ – противоречие с условием леммы. Значит, $K = L = 0$.

Если же $u_2 = 0$, рассмотрим элемент u_3 . В случае, если $u_3 \neq 0$, из условия $u_2 = 0$ имеем, что у $\hat{U}$ первые четыре строки нулевые. Повторяя рассуждения, аналогичные предыдущим, получаем условие $s = 0$, которое приводит к выводу, что $K = L = 0$. Если же $u_3 = 0$, то рассматриваем следующий элемент вектора u . Так как

$$u_j = l_{j-3} - l_{j-1}, \quad j \geq 4,$$

то в силу условия рассматриваемого случая получаем, что для $j = q_0 + 3$ имеем $u_j \neq 0$. Поэтому $K = L = 0$.

3. И, наконец, исследуем случай, когда матрица $\hat{L} + \hat{K}$ является нулевой, тогда $\hat{k} = -Z_{n-1}\hat{l}$. Из (14) получаем систему

$$\begin{cases} (I_{n-1} - \mathcal{P}_{n-1})\hat{l} = 0, \\ (I_{n-1} - \mathcal{P}_{n-1})Z_{n-1}\hat{l} = 0. \end{cases}$$

Поэлементная запись имеет вид

$$\begin{cases} l_j = l_{n-j}, & j = 1, 2, \dots, n-1, \\ l_{n-2} = 0, \\ l_j = l_{n-j-2}, & j = 1, 2, \dots, n-3, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} l_j = l_{n-j}, & j = 1, 2, \dots, n-1, \\ l_{n-2} = 0, \\ l_{n-j} = l_{n-j-2}, & j = 1, 2, \dots, n-3. \end{cases}$$

Если $n = 2m + 1$, то

$$0 = l_{n-2} = l_{n-4} = \dots = l_1 = l_{n-1} = l_{n-3} = \dots = l_2.$$

Получаем $L = K = 0$.

В случае четного $n = 2m$, можем записать

$$0 = l_{n-2} = l_{n-4} = \dots = l_m = \dots = l_2, \quad l_{n-1} = l_{n-3} = \dots = l_1 = \alpha,$$

и, следовательно,

$$0 = k_{n-1} = k_{n-3} = \dots = k_1, \quad k_{n-2} = k_{n-4} = \dots = k_2 = -\alpha.$$

Если $\alpha = 0$, получаем первый случай, иначе второй. Лемма 4 доказана.

4. Главный результат. Установим теперь справедливость теоремы, которая позволяет решить исследуемую систему.

Рассмотрим первое уравнение системы (12) в виде

$$(C_2 + C_1 P_n)S = ((C_2 + C_1 P_n)S)^t.$$

ТЕОРЕМА 1. Пусть C_1 и C_2 – симметричные циркулянты с нулевой диагональю, S – ненулевой кососимметричный косо циркулянт с нулевой диагональю порядка n . Тогда матрица $(C_2 + C_1 P_n)S$ является симметричной тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих двух условий:

- 1) $C_1 = C_2 = 0$;
- 2) n четно, $C_1 - \alpha I_n - (-\alpha, 0)$ -шахматная матрица, $C_2 - (0, \alpha)$ -шахматная матрица.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Исследуем отдельно два взаимоисключающих случая.

1. Пусть сначала n является четным числом и выполняются условия, что $C_1 - \alpha I_n - (-\alpha, 0)$ -шахматная матрица, а $C_2 - (0, \alpha)$ -шахматная матрица. Заметим, что в этом случае матрица $C_2 + (C_1 - \alpha I_n)P_n$ является нулевой. Тогда матрица

$$(C_2 + C_1 P_n)S = (C_2 + (C_1 - \alpha I_n)P_n + \alpha P_n)S = \alpha P_n S$$

будет ганкелевым косым циркулянтом, который является симметричным.

2. Далее проанализируем все оставшиеся случаи матриц C_1 и C_2 . Из лемм 2 и 3 получаем, что симметричность матрицы $(C_2 + C_1 P_n)S$ эквивалентна симметричности матрицы $(C_2 + C_1 P_n)S + S_2 S + S_1 P_n S$ для произвольных кососимметричных косых циркулянтов S_1 и S_2 ; при этом

$$(C_2 + C_1 P_n)S + S_2 S + S_1 P_n S = ((C_2 + S_2) + (C_1 + S_1)P_n)S.$$

Выберем матрицы S_1 и S_2 специальным образом.

Пусть теплицева матрица C_2 имеет элементы $\{C_2\}_{ij} = l_{i-j}$. В силу того, что C_2 – симметричный циркулянт, справедливы соотношения

$$l_{-(n-i)} = l_i, \quad l_{-i} = l_i.$$

Поэтому можем считать, что C_2 – циркулянт с первым столбцом

$$l = (0, l_1, l_2, \dots, l_{n-1})^t, \tag{16}$$

который является Q -четным. Возьмем матрицу S_2 как кососимметричный косой циркулянт с тем же первым столбцом. Тогда матрица $C_2 + S_2$ в качестве первого столбца имеет вектор $2l$ и нулевые элементы в первой строке, так как у матриц S_2 и C_2 – нулевая диагональ и для $j > 1$

$$\{C_2 + S_2\}_{1j} = \{C_2\}_{1j} + \{S_2\}_{1j} = l_{n+1-j} - l_{n+1-j} = 0.$$

Введем строго нижнетреугольную матрицу L с первым столбцом вида (16), тогда

$$C_2 + S_2 = 2L.$$

Аналогично, пусть теплицева матрица C_1 имеет элементы $\{C_1\}_{ij} = k_{i-j}$. В силу того, что C_1 – симметричный циркулянт, верны равенства

$$k_{-(n-i)} = k_i, \quad k_{-i} = k_i.$$

Поэтому можем считать, что C_1 – циркулянт с первым столбцом

$$k = (0, k_1, k_2, \dots, k_{n-1})^t, \quad (17)$$

который является Q -четным. Возьмем матрицу S_1 как кососимметричный косой циркулянт с тем же первым столбцом. Тогда матрица $C_1 + S_1$ в качестве первого столбца имеет вектор $2k$ и нулевые элементы в первой строке, так как у матриц S_1 и C_1 – нулевая диагональ и для $j > 1$

$$\{C_1 + S_1\}_{1j} = \{C_1\}_{1j} + \{S_1\}_{1j} = k_{n+1-j} - k_{n+1-j} = 0.$$

Введем строго нижнетреугольную матрицу K с первым столбцом вида (17), тогда

$$C_1 + S_1 = 2K.$$

В результате получаем, что у нас есть симметричная матрица $(L + K\mathcal{P}_n)S$. В силу леммы 4 возможны две ситуации. Однако вторая ситуация приводит к условию, которое разобрано в первом пункте доказательства данной теоремы. Поэтому получаем, что $L = K = 0$ и в силу построения $C_1 = C_2 = 0$. Теорема 1 доказана.

5. Решение $(T + H)$ -задачи в третьем случае. В заключительном пункте опишем представление вещественных нормальных $(T + H)$ -матриц в рассматриваемом случае и покажем, как можно их конструировать.

Полное решение вещественной нормальной $(T + H)$ -задачи в данном случае можно дать в виде следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 2. Пусть A и B – вещественные теплицевы $(n \times n)$ -матрицы такие, что матрицы $A - A^t$ и $B - B^t$ – косые циркулянты. Тогда матрица $A + B\mathcal{P}_n$ является нормальной тогда и только тогда, когда матрицы A и B допускают представление вида

$$A = C_1 + S_1, \quad B = C_2 + S_2, \quad (18)$$

где косые циркулянты S_1 и S_2 удовлетворяют условию

$$(S_1 - S_1^t)S_2 = 0, \quad (19)$$

а матрицы C_1 и C_2 зависят от четности порядка: если n – нечетное число, то $C_1 = C_2 = 0$; иначе $(C_1 - \alpha I_n) - (-\alpha, 0)$ -шахматная матрица, $C_2 - (0, \alpha)$ -шахматная матрица, α – вещественное число.

Доказательство теоремы 2 следует из теоремы 1.

Теперь опишем процесс построения матриц A и B вида (18) с условием (19). Начнем со случая нечетного $n = 2k + 1$.

Используя известное спектральное разложение для косых циркулянтов (см. (7)), будем искать матрицы A и B в виде

$$A = GF_n^* D^{(1)} F_n \overline{G}, \quad (20)$$

$$B = GF_n^* D^{(2)} F_n \overline{G}, \quad (21)$$

с неизвестными диагональными матрицами

$$D^{(1)} = \text{diag}(d_1^{(1)}, d_2^{(1)}, \dots, d_n^{(1)}),$$

$$D^{(2)} = \text{diag}(d_1^{(2)}, d_2^{(2)}, \dots, d_n^{(2)}).$$

Согласно [3]

$$\begin{aligned} A^t &= \overline{G} F D^{(1)} F^* G = GF^* F \overline{G} (\overline{G} F D^{(1)} F^* G) GF^* F \overline{G} \\ &= GF^* (F \overline{G}^2 F) D^{(1)} (F \overline{G}^2 F)^* F \overline{G} = GF^* Q_2 D^{(1)} Q_2 F \overline{G} = GF^* \tilde{D}^{(1)} F \overline{G}, \end{aligned} \quad (22)$$

где

$$\tilde{D}^{(1)} = \text{diag}(d_2^{(1)}, d_1^{(1)}, d_n^{(1)}, d_{n-1}^{(1)}, \dots, d_3^{(1)}).$$

Подстановка (20)–(22) в (19) дает

$$(D^{(1)} - \tilde{D}^{(1)}) D^{(2)} = 0,$$

или

$$\begin{aligned} (d_j^{(1)} - d_{3-j}^{(1)}) d_j^{(2)} &= 0, & j &= 1, 2, \\ (d_j^{(1)} - d_{n+3-j}^{(1)}) d_j^{(2)} &= 0, & j &= 3, \dots, n. \end{aligned}$$

Условие вещественности косых циркулянтов A и B имеет вид

$$\begin{cases} d_1^{(1)} = \overline{d_2^{(1)}}, \\ d_j^{(1)} = \overline{d_{n+3-j}^{(1)}}, & j = 3, \dots, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1, \\ d_1^{(2)} = \overline{d_2^{(2)}}, \\ d_j^{(2)} = \overline{d_{n+3-j}^{(2)}}, & j = 3, \dots, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1. \end{cases}$$

В результате получаем

$$\begin{aligned} (d_1^{(1)} - \overline{d_1^{(1)}}) d_1^{(2)} &= 0, \\ (d_j^{(1)} - \overline{d_j^{(1)}}) d_j^{(2)} &= 0, & j &= 3, \dots, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1. \end{aligned} \quad (23)$$

Фиксируем произвольный косой циркулянт A ; тогда, используя формулы (23), можно построить B .

В частности, для произвольного косоуго циркулянта A можно взять $B = 0$, и мы получим, что всякий теплицев косоуго циркулянт является нормальной матрицей.

Если взять $A = 0$, то на вещественный косоуго циркулянт B нет условий, так как любая ганкелева вещественная матрица является нормальной.

Вычислим размерность многообразия $\mathcal{M}$ решений. Сначала выбираем произвольный косоуго $(n \times n)$ -циркулянт A . Пусть у него среди чисел $d_1^{(1)}$ и $d_j^{(1)}$, $j = 3, \dots, \lfloor n/2 \rfloor + 1$ нашлись l вещественных. Далее, по формулам (23) находим числа $d_1^{(2)}$, $d_j^{(2)}$, $j = 3, \dots, \lfloor n/2 \rfloor + 1$, условие вещественности B позволяет восстановить все значения $d_j^{(2)}$, по которым далее находим косоуго циркулянт B . В итоге общая размерность

$$\dim \mathcal{M} = (1 + 2)l + (2 + 0) \left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - l \right) + 2 \left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \right) = 2 \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + l.$$

Так как $n = 2k + 1$, то

$$\dim \mathcal{M} = 2(k + 1) + l = n + l + 1.$$

При $n = 2k$ сначала ищем матрицы A и B по аналогии со случаем нечетного порядка. Далее фиксируем некоторое вещественное число α и строим матрицы C_1 и C_2 такие, что $(C_1 - \alpha I_n) - (-\alpha, 0)$ -шахматная матрица, $C_2 - (0, \alpha)$ -шахматная матрица. Добавляя к A матрицу C_1 , а к B — матрицу C_2 , получаем решение задачи. Размерность решения

$$\dim \mathcal{M} = 1 + 2k + l = n + l + 1.$$

Таким образом, размерность решения не зависит от четности порядка.

Теперь, чтобы описать все вещественные нормальные матрицы, представимые в виде суммы теплицевой и ганкелевой, осталось исследовать матрицы вида (2) при условии $B = B^t$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] В. Н. Чугунов, “О кососимметричной части теплицевого слагаемого в вещественной нормальной $T + H$ -задаче”, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **52**:2 (2012), 209–213.
- [2] В. Н. Чугунов, “О представлении вещественных нормальных $(T + H)$ -матриц в случае, когда кососимметричные части обоих слагаемых являются циркулянтами”, *Матем. заметки*, **96**:2 (2014), 294–305.
- [3] В. В. Воеводин, Е. Е. Тыртышников, *Вычислительные процессы с теплицевыми матрицами*, Наука, М., 1987.

В. Н. Чугунов

Институт вычислительной математики РАН,
г. Москва

E-mail: chugunov.vadim@gmail.com

Поступило

18.03.2014