Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. С. Казарин, С. С. Поисеева, Конечные группы с большим неприводимым характером, *Матем. заметки*, 2015, том 98, выпуск 2, 237–246

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10605>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.95.254.165

26 апреля 2023 г., 17:50:53

Конечные группы с большим неприводимым характером

Л. С. Казарин, С. С. Поисеева

В общем случае порядок конечной неединичной группы G существенно больше квадрата степени любого ее неприводимого характера Θ , т.е. $\Theta(1)^2 < |G|$. В данной работе изучаются конечные группы с таким неприводимым характером Θ , что

$$|G| \leq 2\Theta(1)^2.$$

Библиография: 9 названий.

DOI: 10.4213/mzm10605

1. Введение. Пусть G – конечная неединичная группа, обладающая неприводимым представлением над полем комплексных чисел с характером Θ . Согласно соотношениям ортогональности для неприводимых характеров (гл. 4 в [1]) сумма квадратов степеней этих характеров равна порядку группы. В частности,

$$\Theta(1)^2 < |G|.$$

В общем случае порядок группы существенно больше квадрата степени любого ее неприводимого характера. Однако согласно [2] у любой простой неабелевой группы G имеется неприводимый характер степени, большей $|G|^{1/3}$. Снайдером в [3] изучались группы с неприводимым характером степени d , для которого $|G| = d(d+e)$. Им было доказано, что в этом случае порядок группы G ограничен функцией от e при $e > 1$. В случае $e = 1$ группа G является группой Фробениуса. Цель настоящей статьи – изучение конечных групп с таким неприводимым характером Θ , что

$$|G| \leq 2\Theta(1)^2.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Конечную группу G порядка больше двух, обладающую таким неприводимым характером Θ , что $2\Theta(1)^2 \geq |G|$, будем называть $LC(\Theta)$ -группой.

Следующая теорема показывает, что любой неприводимый характер $LC(\Theta)$ -группы G всегда входит в разложение квадрата характера Θ – при условии, что G не является 2-группой.

Работа первого автора выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 13-01-00469).

ТЕОРЕМА 1. Пусть G является $LC(\Theta)$ -группой. Если порядок G не является степенью числа 2, то любой неприводимый характер G является конституентой характера Θ^2 .

Отметим, что экстраспециальная 2-группа порядка 2^{2n+1} обладает неприводимым характером степени 2^n . Равенство $|G| = 2\Theta(1)^2$ для неприводимого характера Θ группы G не обязательно справедливо только в случае 2-группы. Прямое произведение знакопеременной группы A_4 и симметрической группы S_3 имеет неприводимый характер Θ степени 6, так что $|G| = 2 \cdot 6^2$.

В общем случае задача описания строения группы, обладающей неприводимым характером Θ таким, что $|G| \leq c\Theta(1)^2$ для небольшой константы c , представляется довольно сложной. Таким характером для $c < 3$ обладают все пять групп Матье, спорадическая группа Томпсона и группа Янко порядка 604800.

Естественно изучить конечные $LC(\Theta)$ -группы, у которых степень характера Θ имеет некоторые дополнительные ограничения. Ниже будут доказаны результаты об $LC(\Theta)$ -группах, у которых $\Theta(1)$ – степень простого числа p . Напомним, что p -нильпотентной называется группа, у которой все элементы порядка, взаимно простого с числом p , образуют подгруппу.

ТЕОРЕМА 2. Пусть G – $LC(\Theta)$ -группа. Если для некоторого простого числа p силовская p -подгруппа группы G абелева, а $\Theta(1) = p^m$ для некоторого натурального числа m , то G является p -нильпотентной группой, $O_p(G) = 1$ и силовская p -подгруппа группы G имеет порядок p^m .

Следующая теорема дает полное описание $LC(\Theta)$ -групп с $\Theta(1) = p^m$ и абелевой силовской p -подгруппой.

ТЕОРЕМА 3. Пусть G – $LC(\Theta)$ -группа с абелевой силовской p -подгруппой и неприводимым характером Θ степени p^m , где p – простое число, а m – натуральное число. Тогда либо p – простое число Мерсенна и группа G – прямое произведение m групп Фробениуса порядков $p(p+1)$, либо $p = 2$ и G – прямое произведение групп, каждая из которых является группой Фробениуса порядка $q_i 2^{m_i}$ (где $q_i = 2^{m_i} + 1$ – простые числа Ферма) или группой Фробениуса порядка $3^2 2^3$ (в этом случае $m_i = 3$), причем $\sum_i m_i = m$.

Все группы предполагаются конечными. Буква p везде используется для обозначения простого числа. Необходимые сведения, касающиеся обыкновенных представлений конечных групп и общеупотребительных обозначений, можно найти в [1]. Для любого элемента a группы G через h_a обозначается число элементов группы G , сопряженных с a . Скалярное произведение характеров χ и ψ группы G обозначается $\langle \chi, \psi \rangle$. В частности, если эти характеры неприводимы, то $\langle \chi, \psi \rangle = \delta_{\chi, \psi}$. Множество неприводимых характеров группы G обозначается $\text{Irr}(G)$.

2. Доказательство теоремы 1. Пусть для G и Θ выполнено условие теоремы 1. В силу равенства

$$\sum_{\chi \in \text{Irr}(G)} \chi(1)^2 = |G|$$

характер Θ является единственным неприводимым характером группы G наибольшей степени. Поэтому все сопряженные с ним под действием группы Галуа расширения $\mathbb{Q}(\Theta)$ поля рациональных чисел $\mathbb{Q}$ с помощью присоединения к нему элементов

$\Theta(g)$ для всех $g \in G$, совпадают с Θ . Отсюда все значения $\Theta(g)$, $g \in G$, являются целыми рациональными числами. В частности, $\overline{\Theta(g)} = \Theta(g)$ для всякого $g \in G$. В любом случае Θ является точным характером.

Пусть $\Phi = \Theta^2$ и порядок G не больше $2\Phi(1)$. Заметим, что из вещественности значений Θ следует, что $\Phi(g) \geq 0$ для любого $g \in G$. Допустим, что неприводимый характер χ обладает свойством $\langle \Phi, \chi \rangle = 0$, т.е. кратность вхождения неприводимого характера χ в Φ равна 0. Тогда

$$\sum_{t \in G^\#} \Phi(t)\chi(t) + \Phi(1)\chi(1) = 0.$$

Так как Θ – неприводимый характер группы G , то

$$|G|\langle \Theta, \Theta \rangle = \sum_{t \in G^\#} \Phi(t) + \Phi(1) = |G| \leq 2\Phi(1).$$

Стало быть,

$$\left| \sum_{t \in G^\#} \Phi(t) \right| = \sum_{t \in G^\#} \Phi(t) \leq \Phi(1).$$

Далее, учитывая, что все значения $\Phi(t)$ неотрицательны, получаем неравенство

$$\Phi(1)\chi(1) \geq \sum_{t \in G^\#} \Phi(t)\chi(1) = \left| \sum_{t \in G^\#} \Phi(t) \right| \chi(1) \geq \left| \sum_{t \in G^\#} \Phi(t)\chi(t) \right| = \Phi(1)\chi(1).$$

Таким образом, полученные промежуточные неравенства превращаются в равенства, что возможно только при

$$|G| = 2\Phi(1) = 2\Theta(1)^2.$$

При этом $\Phi(t) \neq 0$ тогда и только тогда, когда $|\chi(t)| = \chi(1)$. В частности, из теорем 4.1.2 и 4.1.3 в [1] следует, что в этом случае $\lambda = \chi(t)/\chi(1)$ является корнем из единицы. Отметим, что для группы G нечетного порядка теорема доказана и далее можно считать, что порядок группы G четный. Более того, $|G| = 2\Theta(1)^2$.

Допустим сначала, что $\chi = \Theta$ и χ не является конституентой Φ . По сказанному выше имеется неединичный элемент $t_0 \in G$, для которого $\Theta(t_0) \neq 0$. Однако $\Theta(t_0) \neq 0$ только при $\Theta(t_0) = |\Theta(1)|$. Действительно, так как Θ – неприводимый характер группы G , то по первому соотношению ортогональности имеем

$$|G|\langle \Theta, \Theta \rangle = \sum_{t \in G} |\Theta(t)|^2 = |G| = 2\Theta(1)^2.$$

В таком случае найдется ровно одно значение $t_0 \in G^\#$, для которого $|\Theta(t_0)| = \Theta(1)$. В частности, $Z(G) = \{1, t_0\}$. Более того, для всякого $t \in G \setminus \{1, t_0\}$ будет $\Theta(t) = 0$.

Пусть $\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_k$ – все неприводимые характеры группы G , содержащиеся в своем ядре $Z(G)$. Очевидно, они исчерпывают все неприводимые характеры группы $G/Z(G)$. Поэтому

$$\sum_{i=1}^k \chi(1)^2 = \frac{|G|}{2} = \Theta(1)^2.$$

Таким образом,

$$|G| = |G/Z(G)| + \Theta(1)^2.$$

Отсюда число классов сопряженных элементов группы G на единицу больше числа классов группы $G/Z(G)$. В этом случае $Z(G)$ содержится в ядре любого неприводимого характера группы G , отличного от Θ .

Если $g \in G \setminus Z(G)$, то $\Theta(g) = 0$. Из второго соотношения ортогональности (теорема 4.2.8 в [1]) теперь следует, что любой элемент gt_0 при $g \in G \setminus Z(G)$ сопряжен с элементом g . Однако элемент $x \in G$ нечетного простого порядка m не может быть сопряжен с xt_0 , который имеет порядок $2m$. Поэтому $|G|$ будет степенью двойки.

Учитывая, что характер Θ исчезает вне $Z(G)$, для любого $\chi \in \text{Irr}(G)$ имеем

$$\langle \Phi, \chi \rangle = |G|^{-1}(\chi(1)\Theta^2(1) + \chi(t_0)\Theta^2(t_0)) = \chi(1).$$

Однако при $\chi = \Theta$ получим $\langle \Phi, \Theta \rangle = 0$.

Теперь можно считать, что $\chi \neq \Theta$. Напомним, что неприводимый характер χ может не входить в разложение Φ лишь в случае $|G| = 2\Theta(1)^2$. Так как $\chi \neq \Theta$, то по соотношению ортогональности $\langle \chi, \Theta \rangle = 0$. Поэтому

$$\sum_{g \in G^\#} \chi(g)\Theta(g) = -\chi(1)\Theta(1).$$

Так как,

$$|G|\langle \Theta, \Theta \rangle = \sum_{t \in G^\#} \Phi(t) + \Phi(1) = |G| = 2\Phi(1),$$

то

$$\sum_{t \in G^\#} \Phi(t) = \Phi(1).$$

Пусть $t_0 = 1, t_1, t_2, \dots, t_k$ – все элементы группы G , для которых $\Phi(t) \neq 0$. В этом случае также $\chi(t) \neq 0$. Напомним, что тогда $|\chi(t_i)| = \chi(1)$, так что $\chi(t_i) = \lambda_i \chi(1)$, где λ_i – корень из единицы для любого i . Итак,

$$\sum_{i=1}^k \Phi(t_i)\chi(t_i) + \Phi(1)\chi(1) = 0, \quad \sum_{i=1}^k \Phi(t_i) = \Phi(1).$$

Обозначим $\lambda_i = \chi(t_i)/\chi(1)$ для $i = 1, \dots, k$. Согласно доказанному выше $|\lambda_i| = 1$ для всех i . Таким образом,

$$\sum_{i=1}^k \Phi(t_i)\lambda_i + \Phi(1) = 0.$$

Обозначим через $a_i = \text{Re } \lambda_i$ вещественную часть чисел λ_i . Легко видеть, что $|a_i| \leq 1$. Поэтому, учитывая, что $\Phi(t) \geq 0$ для любого $t \in G$, получим

$$\Phi(1) = \left| \sum_{i=1}^k \Phi(t_i)a_i \right| \leq \sum_{i=1}^k \Phi(t_i)|a_i| \leq \Phi(1).$$

Отсюда $\lambda_i = -1$ для всех $i \leq k$. Из сказанного и ортогональности χ и Θ имеем

$$0 = \sum_{g \in G^\#} \chi(g)\Theta(g) + \chi(1)\Theta(1) = -\chi(1) \sum_{g \in G^\#} \Theta(g) + \chi(1)\Theta(1).$$

Поэтому

$$-\sum_{g \in G^\#} \Theta(g) + \Theta(1) = 0.$$

Однако $\langle \Theta, 1_G \rangle = 0$, откуда

$$\sum_{g \in G^\#} \Theta(g) + \Theta(1) = 0.$$

Противоречие. Итак, для любого $\chi \in \text{Irr}(G) \setminus \{\Theta\}$ имеем $\langle \Phi, \chi \rangle \neq 0$. Теорема доказана.

3. Доказательство теоремы 2. Пусть силовская p -подгруппа группы G абелева и $\Theta(1) = p^m$. Покажем, что порядок силовской p -подгруппы P группы G равен p^m и подгруппа $O_p(G) = 1$. Если $z \in P$ и $h_z = |G : C_G(z)|$, то $h_z \Theta(z) / \Theta(1)$ – целое алгебраическое число и из взаимной простоты h_z и p и леммы Бернсайда (лемма 4.3.1 в [1]) следует, что либо $\Theta(z) = 0$, либо $z \in Z(\Theta)$, т.е. $|\Theta(z)| = \Theta(1)$.

Так как $\Theta \in \text{Irr}(G)$, то из первого соотношения ортогональности (теорема 4.2.2 в [1]) получаем

$$|Z(\Theta)|\Theta(1)^2 = \sum_{z \in Z(\Theta)} |\Theta(z)|^2 \leq \sum_{t \in G} |\Theta(t)|^2 = |G| \langle \Theta, \Theta \rangle = |G| \leq 2\Theta(1)^2.$$

Поэтому либо $p = 2$ и $|G| = |P|$, что неверно ввиду абелевости P , либо $\Theta(z) = 0$ для любого $z \in P^\#$.

Допустим, сначала, что $O_p(G) \neq 1$. Ввиду абелевости P подгруппа $O_p(M)$ содержится в центре нормальной подгруппы $M = C_G(O_p(G))$ и M содержит P , так что индекс $|G : M|$ не делится p . Пусть $N = O_p(G)$. Согласно теории Клиффорда (теорема 6.2 в [4])

$$\Theta|_M = e \sum_{i=1}^s \theta_i,$$

где θ_i – сопряженные неприводимые характеры группы M (в частности, $\theta_i(1) = \theta_1(1)$ для всех $i \leq s$), число e делит индекс подгруппы инерции $I_G(\theta_1)$ в G , а s делит $|I_G(\theta_1) : M|$. Поэтому

$$p^m = \Theta(1) = es\theta_1(1).$$

Так как числа e и s делят $|G : M|$, то они взаимно просты с p . Следовательно, $e = s = 1$ и $\Theta|_M \in \text{Irr}(M)$. Последнее означает, что $N \leq Z(\Theta|_M)$. В частности, $|\Theta(g)| = \Theta(1)$ для любого $g \in O_p(G)$. Поэтому

$$|O_p(G)| = 2 = p \quad \text{и} \quad |G| = 2p^{2m},$$

т.е. G – 2-группа. Как видно из предыдущего, это приводит к противоречию. Таким образом, $O_p(G) = 1$.

По теореме Бродки [5] существует силовская p -подгруппа P_1 группы G , для которой $P \cap P_1 = 1$. Пусть $N = N_G(P)$ и $N_1 = N_G(P_1)$. Так как P и P_1 – единственные силовские p -подгруппы в N и N_1 , то $|N \cap N_1|$ не делится на p . При этом N и N_1 сопряжены. Поэтому $G \neq NN_1$. С другой стороны,

$$|NN_1| = \frac{|N|^2}{|N \cap N_1|} \geq |N : P| |P|^2.$$

Если $N \neq P$, то $|G| > 2p^{2m}$, что противоречит условию. Значит, $P = N_G(P)$ и по теореме Бернсайда о переносе (теорема 7.4.3 в [1]) группа G p -нильпотентна. Теорема доказана.

4. Доказательство теоремы 3. Предположим доказательству теоремы 3 два вспомогательных утверждения.

ЛЕММА 1. Пусть G – $LC(\Theta)$ -группа, обладающая абелевой силовской p -подгруппой P и неприводимым характером Θ степени p^m . Тогда $G = F(G) \rtimes P$ – полупрямое произведение подгруппы Фиттинга $F(G)$ группы G и P . При этом $F(G)$ является прямым произведением элементарных абелевых групп.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу теоремы 2 группа G является p -нильпотентной, т.е.

$$G = M \rtimes P,$$

где $|G| < 2|P|^2$ и $|M| < 2|P|$, а $M = O_{p'}(G)$. Покажем сначала, что

$$M = O_{p'}(G) = F^*(G).$$

Напомним, что $F^*(G)$ есть центральное произведение подгруппы $L(G)$, являющейся центральным произведением квазипростых групп, нормальных в $L(G)$, и подгруппы Фиттинга группы G (не исключается случай, когда одна из упомянутых подгрупп тривиальна) (см. [6; с. 50–51]). Так как G является p -нильпотентной и $O_p(G) = 1$ по теореме 2, то подгруппа $F^*(G)$ содержится в M .

Предположим, что $L(G)$ и $F(G)$ нетривиальны. Согласно предложению 1.27 в [6] имеем $C_G(F^*(G)) \leq F^*(G)$. По теореме Бродки [5] пересечение $P \cap P^g = 1$ для некоторого $g \in F^*(G)$. Представив группу $F^*(G)P$ в виде объединения двойных смежных классов $F^*(G)P = \bigcup_i P g_i P$, получим

$$|F^*(G)| |P| \geq |P| + |PgP| = |P| + |P|^2.$$

Значит, $|F^*(G)| \geq |P| + 1$. Учитывая, что $|G| \leq 2|P|^2$, имеем

$$2|P|^2 \geq |G| \geq |P|(|P| + 1)|M : F^*(G)|.$$

Отсюда $M = F^*(G)$.

Пусть

$$|P/C_P(F(G))| = r \quad \text{и} \quad |P/C_P(L(G))| = s.$$

По предложению 1.27 в [6] и теореме 2 пересечение подгрупп $C_P(F(G))$ и $C_P(L(G))$ тривиально. Длина орбиты P на $F(G)$ равна $|P : C_P(F(G))| = r$, а длина орбиты P на $L(G)$ равна $|P : C_P(L(G))| = s$. В силу тривиальности пересечения подгрупп $C_P(F(G))$ и $C_P(L(G))$ имеем

$$r \geq |C_P(L(G))| \quad \text{и} \quad s \geq |C_P(F(G))|.$$

Пусть $\bar{L} = L(G)/Z(L(G))$. Группа P индуцирует группу автоморфизмов на $\bar{L}$. Если элемент a из P действует тождественно на $\bar{L}$, то он действует тождественно и на $L = L(G)$. В самом деле, если $[L, \langle a \rangle] \leq Z(L)$, то

$$[Z(L), L] = [L, \langle a \rangle, L] = [\langle a \rangle, L, L] = 1.$$

По лемме о трех подгруппах [1; теорема 2.2.3] имеем $[L, L, \langle a \rangle] = 1$. Так как L – квазипростая группа, то $[L, L] = L$. Отсюда $[L, \langle a \rangle] = 1$. Применяя теорему Бродки [5], заключаем, что группа $P/C_P(L)$ имеет точную орбиту на $L/Z(L)$. В частности,

$$|L(G)| > |Z(L(G))|s.$$

Поэтому $|F(G)| > r$, $|L(G)| > s|Z(G)|$. В частности,

$$|M| = |F(G)L(G)| = \frac{|F(G)||L(G)|}{|F(G) \cap L(G)|} > rs.$$

Так как $C_P(L(G)) \times C_P(F(G))$ – подгруппа группы P , то

$$rs = |P/C_P(L(G))||P/C_P(F(G))| = \frac{|P|^2}{|C_P(F(G))||C_P(L(G))|} > |P|.$$

При этом $|M| < 2|P|$ только в случае $C_P(F(G)) \times C_P(L(G)) = P$. Таким образом,

$$G = MP = F(G)C_P(L(G))L(G)C_P(F(G)).$$

Обозначив

$$C_P(F(G)) = P_1 \quad \text{и} \quad C_P(L(G)) = P_2,$$

получим две группы $M_1 = L(G) \rtimes P_1$ и $M_2 = F(G) \rtimes P_2$ с длинами орбит p -подгрупп P_1 на $L(G)$ и P_2 на $F(G)$, равными $r = |P_1|$ и $s = |P_2|$ соответственно. Таким образом, задача свелась к случаям, когда $F^*(G) = L(G)$ и когда $F^*(G) = F(G)$.

Покажем, что в случае $G = L(G) \rtimes P$, где P – абелева p -группа порядка, взаимно простого с порядком $L(G) = L$, выполнено $|L| \geq 2|Z(L)||P|$. Как замечено выше, P имеет точную орбиту на $L/Z(L)$. Поэтому, не ограничивая общности, допустим, что $Z(L) = 1$ и L – прямое произведение $k \geq 1$ простых неабелевых групп. Будем доказывать наше утверждение индукцией по числу k . Если $k = 1$, то из леммы 7 в [7] следует, что $|\text{Out}(L)|$ меньше, чем $|L|/2$. В этом случае утверждение доказано. Пусть $L = L_1 \times L_2$ – прямое произведение двух собственных P -допустимых подгрупп группы L . По предположению индукции

$$|L_1| \geq 2|P/C_P(L_1)|, \quad |L_2| \geq 2|P/C_P(L_2)|.$$

Так как $C_P(L_1) \cap C_P(L_2) = 1$, то

$$|L| = |L_1||L_2| \geq 4|P/C_P(L_1)||P/C_P(L_2)| = 4|P| \frac{|P|}{|C_P(L_1)||C_P(L_2)|}.$$

Так как $C_P(L_1) \cap C_P(L_2) = 1$, то получаем требуемое заключение: $|L| > 2|P|$.

Теперь мы можем считать, что L – прямое произведение $L_1 \times L_2 \times \dots \times L_k$ сопряженных в G простых неабелевых групп. Подгруппа P действует транзитивно на множестве $\{L_1, \dots, L_k\}$ и потому P содержит подгруппу P_0 индекса $k \geq 2$, нормализующую подгруппу L_1 . При этом P_0 нормализует также и любую другую подгруппу L_i , $i \leq k$. Поэтому P_0 действует точно на каждой из L_i . По предположению индукции $|L_i| > 2|P_0|$ для всякого $i \leq k$ и

$$|L| > 2^k|P_0| > 2k|P_0| = 2|P|.$$

Таким образом, можно считать, что $F^*(G) = F(G)$. Покажем, что $F(G)$ – прямое произведение элементарных абелевых групп. Как и выше, $G = F(G) \rtimes P$. Предположим сначала, что $s = 1$ и $Q_1 = Q \neq 1$ – силовская q -подгруппа группы $F = F(G)$. По теореме Томпсона (теорема 5.3.11 в [1]) существует такая характеристическая подгруппа Q_0 в Q , что $Q_0/Z(Q_0)$ – элементарная абелева группа и любой q' -автоморфизм группы Q действует нетривиально на $Q_0/\Phi(Q_0)$. Если $F = Q$, то P действует точно на $Q_0/\Phi(Q_0)$ и потому

$$|Q_0/\Phi(Q_0)| \geq |P| + 1.$$

Но если $Q_0 \neq Q$, то $|Q| > 2(|P| + 1)$, так что $|G| > 2|P|^2$, противоречие. Поэтому Q – элементарная абелева группа.

Если F не является силовской q -подгруппой группы G (т.е. $s > 1$), то, воспользовавшись индукцией, получим требуемое заключение. Лемма доказана.

ЛЕММА 2. Пусть G – $LC(\Theta)$ -группа, удовлетворяющая условиям теоремы 3, P – ее силовская p -подгруппа, а $F = F(G)$ – подгруппа Фиттинга. Тогда G является прямым произведением групп Фробениуса порядков $q_i^{n_i} p^{m_i}$ с дополнительным множителем порядка p^{m_i} .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 1 подгруппа $F(G) = Q_1 \times Q_2 \times \cdots \times Q_s$ – прямое произведение q_i -подгрупп группы G , являющихся элементарными абелевыми P -допустимыми группами, q_i – простые числа. В силу леммы 1 любая силовская q -подгруппа Q группы $F(G)$ элементарная абелева и потому может рассматриваться как линейное векторное пространство V размерности n , где $|Q| = q^n$, и группа $P/C_P(V)$ обладает точным представлением на V степени n . Для любой минимальной нормальной подгруппы L группы Q по теореме Машке (теорема 3.3.1 в [1]) существует P -инвариантная (а потому и нормальная в $F(G)P$) подгруппа M в Q , для которой $L \times M = Q$. Поэтому можно считать, что наши обозначения выбраны так, что группа $F(G)$ – прямое произведение минимальных нормальных подгрупп $Q_1 \times Q_2 \times \cdots \times Q_s$, каждая из которых элементарная абелева порядка $q_i^{n_i}$, где q_i – некоторое простое число, взаимно простое с p .

Группа $P_i = P/C_P(Q_i)$ обладает неприводимым представлением степени n_i над Q_i , рассматриваемым в качестве векторного пространства над полем $GF(q_i)$. Понятно, что группа $G/C_G(Q_i)$ изоморфна полупрямому произведению $F_i = Q_i \rtimes P_i$ и является группой Фробениуса порядка $q_i^{n_i} p^{m_i}$, где m_i – натуральное число.

Пусть T_i – прямое произведение всех Q_j , $1 \leq j \leq s$, отличных от Q_i . Тогда

$$C_P(T_i) \cap C_P(Q_i) \subseteq Z(G) = 1.$$

В то же время длина орбиты P на Q_i равна $|P/C_P(Q_i)|$. Аналогично, $|P/C_P(T_i)|$ – длина орбиты P на T_i , при этом $C_P(Q_i) \times C_P(T_i)$ – подгруппа группы P . Легко видеть, что $|P/C_P(Q_i) \times P/C_P(T_i)| = |P|$, откуда

$$Q_i C_P(L_i) \times L_i C_P(Q_i) = G.$$

При этом $Q_i C_P(L_i) = F_i$ – группа Фробениуса. Теперь индукция завершает доказательство леммы 2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. По лемме 2 порядок подгруппы Фиттинга группы G равен $\prod_{i=1}^s q_i^{n_i}$, тогда как порядок силовой p -подгруппы P этой группы, равный степени характера Θ , есть $\prod_{i=1}^s p^{m_i} = p^m$.

Так как p^{m_i} – порядок дополнительного множителя группы Фробениуса F_i , то p^{m_i} делит $q_i^{n_i} - 1$. Так как $q_i^{n_i} - 1 = l_i p^{m_i}$, то

$$|G| \geq |P|^2 \prod_{i=1}^s \left(l_i + \frac{1}{p^{m_i}} \right).$$

Однако $|G| \leq 2|P|^2$ и потому все $l_i = 1$, т.е. $p^{m_i} = q_i^{n_i} - 1$ для всякого $i \leq s$.

Из теоремы Жигмонди [8] следует, что если a и b – натуральные числа, причем $a \geq 2$, $b \geq 3$ и $(a, b) \neq (2, 6)$, то существует такое простое число r , делящее $a^b - 1$, что r не делит $a^i - 1$ при $1 \leq i \leq b - 1$. Если простое число $q > 2$, $n \geq 3$ и $q^n - 1 = p^m$, то $r = p = 2$, ибо $q^n - 1$ четно. Поэтому $n \leq 2$. Если $n = 2$, то

$$q^2 - 1 = (q - 1)(q + 1) = 2^m$$

только при $q = 3$, $m = 3$. При $n = 1$ имеем $q - 1 = 2^m$, т.е. $q = 2^m + 1$ – простое число Ферма. Если же $q = 2$, то $2^n - 1 = p^m$ для простого числа p только при $m = 1$ по той же теореме Жигмонди. То есть p – простое число Мерсенна.

Таким образом, при $p = 2$ группа G – прямое произведение групп Фробениуса порядков $q_i(q_i - 1)$, где q_i – простое число Ферма, и групп Фробениуса порядка $3^2 \cdot 2^3$, а при $p > 2$ – прямое произведение групп Фробениуса порядка $p(p + 1)$, причем p – простое число Мерсенна. Теорема доказана.

5. Примеры.

ПРИМЕР 1. Пусть G – прямое произведение двух групп Фробениуса порядков 6 и 72. Тогда G является $LC(\Theta)$ -группой с наибольшей степенью неприводимого характера, равной $16 = 2^4$, и абелевой силовой 2-подгруппой.

ПРИМЕР 2. Группа $G = A_4 \times A_4$ является $LC(\Theta)$ -группой с наибольшей степенью неприводимого характера, равной $9 = 3^2$, и абелевой силовой 3-подгруппой.

ПРИМЕР 3. Группа $G = A_4 \times S_3$ является группой с неприводимым характером Θ степени 6, так что $|G| = 2\Theta(1)^2$, силовые p -подгруппы группы G абелевы для $p \in \{2, 3\}$, но G не является 2-группой.

ПРИМЕР 4. Группа $G = AGL_2(3)$ – полупрямое произведение элементарной абелевой группы V порядка 9 и группы $GL_2(3)$, действующей на V как группа невырожденных линейных преобразований. В этом случае

$$|G| = 9 \cdot 48 = 432.$$

Зенковым в [9] показано, что группа G имеет неприводимый характер Θ степени 2^4 , так что $|G| < 2\Theta(1)^2$, но силовая 2-подгруппа группы G неабелева.

Авторы выражают признательность рецензенту за замечания, способствовавшие существенному улучшению текста статьи.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] D. Gorenstein, *Finite Groups*, Harper & Row Publ., New York, 1968.
- [2] Л. С. Казарин, И. А. Сагиров, “О степенях неприводимых характеров конечных простых групп”, *Алгебра. Топология. Сборник статей*, Тр. ИММ УрО РАН, **7**, 2001, 113–123.
- [3] N. Snyder, “Groups with a character of large degree”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **136**:6 (2008), 1893–1903.
- [4] I. M. Isaacs, *Character Theory of Finite Groups*, Pure Appl. Math., **69**, Academic Press, New York, 1976.
- [5] J. S. Brodkey, “A note on finite groups with an abelian Sylow group”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **14** (1963), 132–133.
- [6] Д. Горенштейн, *Конечные простые группы. Введение в их классификацию*, Мир, М., 1985.
- [7] B. Amberg, L. S. Kazarin, “ABA-groups with cyclic subgroup B ”, Тр. ИММ УрО РАН, **18**, 2012, 10–22.
- [8] K. Zsigmondy, “Zur Theorie der Potenzenreste”, *Monatsh. Math. Phys.*, **3**:1 (1892), 265–284.
- [9] В. И. Зенков, “О p -блоках дефекта 0 в p -разрешимых группах”, Сборник научных трудов, Тр. ИММ УрО РАН, **3**, 1995, 36–40.

Л. С. Казарин

Ярославский государственный университет

им. П. Г. Демидова

E-mail: kazarin@uniyar.ac.ru

Поступило

12.09.2014

Исправленный вариант

08.02.2015

С. С. Поисеева

Ярославский государственный университет

им. П. Г. Демидова

E-mail: pss.iii@mail.ru