Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. В. Пугачев, Построение негауссовских поверхностных мер методом Маллявэна, *Матем. заметки*, 1999, том 65, выпуск 3, 377–388

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1061>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.239.49.27

26 апреля 2023 г., 13:51:08

УДК 519.21

ПОСТРОЕНИЕ НЕГАУССОВСКИХ ПОВЕРХНОСТНЫХ МЕР МЕТОДОМ МАЛЛЯВЭНА

О. В. Пугачёв

В работе обобщена теорема Эро–Маллявэна о существовании поверхностных мер на бесконечномерных пространствах с гауссовскими мерами на поверхностях. Доказана плотность множества емкостей, порожденных классами Соболева на бесконечномерных пространствах.

Библиография: 11 названий.

Известны два подхода к построению поверхностных мер в бесконечномерных пространствах. Первый подход, восходящий к работе А. В. Скорохода [1] и развитый в работах А. В. Угланова [2], [3] (впоследствии усовершенствованный В. И. Богачёвым в работе [4]), основан на построении локальной поверхностной меры на достаточно малых окрестностях точек поверхности. Этот метод работает для весьма широкого класса пространств при минимальных требованиях на гладкость меры и поверхности. В работе [5] автору удалось обобщить конструкцию Угланова для случая, когда определяющая функция F поверхности имеет непрерывные частные производные вдоль плотно вложенного гильбертова пространства, но непрерывность самой F при этом уже не требуется. Недостаток этого метода заключается в том, что из существования локальных поверхностных мер не всегда вытекает существование глобальной поверхностной меры.

Совершенно иной подход был предложен П. Маллявэном и реализован в работе [6] для случая винеровской меры (этот метод описан в [7, гл. 6]). В этом методе мера строится сразу на всей поверхности, а условия гладкости поверхности связаны не с геометрией объемлющего пространства, а с геометрией пространства Камерона–Мартина, и вместо дифференцируемости определяющей функции по Гато требуется ее принадлежность к соболевскому классу. Однако эти условия гладкости достаточно жесткие, к тому же в [6] и последующих работах на эту тему используются специфические свойства гауссовских мер. Цель данной работы – обобщить метод Маллявэна и построить поверхностную меру в случае более широкого класса пространств и поверхностей для достаточно гладких негауссовских мер.

1. Дифференцируемые меры и классы Соболева. Пусть X – сепарабельное пространство Фреше (например, сепарабельное банахово пространство), в него непрерывно вложено сепарабельное гильбертово пространство H . Обозначим через $\langle \cdot, \cdot \rangle$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, гранты № 96-15-96865 и № 97-01-00932, и германского гранта № 436 RUS 113/343/0(R).

скалярное произведение в H , а через $|\cdot|$ норму в H . Автоматически возникает непрерывное отображение $j_H: X^* \rightarrow H^* = H$, заданное соотношением

$$\langle j_H(l), h \rangle = l(h), \quad h \in H.$$

Если H плотно в X , то j_H является вложением. Если f дифференцируема по Гато, то ковектору $f'(x) \in X^*$ соответствует вектор $\nabla f(x) = j_H(f'(x))$.

Будем обозначать через $FC_b^\infty(X)$ класс гладких ограниченных цилиндрических функций вида $\varphi(x) = u(l_1(x), \dots, l_k(x))$, $l_j \in X^*$, $k \in \mathbb{N}$, $u \in C_b^\infty(\mathbb{R}^k)$; $FC_b^\infty(X, H)$ – класс векторных полей $v(x) = \sum_{j=1}^n \varphi_j(x) e_j$, $\varphi_j \in FC_b^\infty(X)$, $\{e_j\}$ – ортонормированный базис H , $n \in \mathbb{N}$.

Пусть μ – вероятностная мера на X . Из полноты и сепарабельности метризуемого пространства X вытекает, что μ – радоновская мера (см. [8]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Мера μ на X называется *дифференцируемой вдоль вектора* $h \in X$ в смысле *Фомина* (далее это будет называться просто *дифференцируемостью*), если существует знакопеременная мера ограниченной вариации $d_h \mu$ такая, что для всех функций $\varphi \in FC_b^\infty(X)$ справедлива формула

$$\int_X \partial_h \varphi(x) \mu(dx) = - \int_X \varphi(x) d_h \mu(dx)$$

(формула интегрирования по частям) и при этом $d_h \mu$ абсолютно непрерывна относительно μ .

Приведем также равносильное определение: μ дифференцируема вдоль h , если существует мера $d_h \mu$ такая, что $\partial_t |_{t=0} \mu(B + th) = d_h \mu(B)$ для всех $B \in \mathcal{B}(X)$.

Плотность меры $d_h \mu$ относительно μ будем обозначать через β_h^μ и называть *логарифмической производной* меры μ вдоль h .

Всюду далее мы будем предполагать меру μ таковой, что если функция $\varphi \in FC_b^\infty(X)$ равна 0 μ -почти всюду, то $\nabla \varphi = 0$ μ -почти всюду. В частности, это верно для меры с полным носителем. Будем также предполагать, что $\beta_h^\mu \in L^2(X, \mu)$ для всех $h \in H$.

Введем на пространствах $FC_b^\infty(X)$ и $FC_b^\infty(X, H)$ нормы:

$$\|\varphi\|_{m,p} = \left(\int_X (N_{m,\varphi}(x))^p \mu(dx) \right)^{1/p}, \quad \|v\|_{m,p} = \left(\int_X (N_{m,v}(x))^p \mu(dx) \right)^{1/p},$$

где

$$N_{m,\varphi}^2(x) = |\varphi(x)|^2 + \sum_{k=1}^m \sum_{i_1=1}^\infty \cdots \sum_{i_k=1}^\infty |\partial_{e_{i_1}} \cdots \partial_{e_{i_k}} \varphi(x)|^2$$

и аналогичная формула справедлива для $N_{m,v}(x)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пополнив пространства $FC_b^\infty(X)$ и $FC_b^\infty(X, H)$ по указанным нормам $\|\cdot\|_{m,p}$, получим соболевские пространства $W^{m,p}(X)$ и $W^{m,p}(X, H)$ соответственно, где m – целое неотрицательное, $1 \leq p < \infty$. При $p = \infty$ соответствующие пространства определяются как $W^{m,\infty} = \bigcap_{p \in \mathbb{N}} W^{m,p}$.

Нормы в пространствах $W^{0,p} = L^p$ будем обозначать без индекса 0.

Заметим, что построенные пространства и нормы в них не зависят от выбора базиса в H .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Пусть $f \in W^{m,p}(X)$, $h \in H$. Пусть $f_n \in FC_b^\infty(X)$, f_n сходятся к f в $L^p(X, \mu)$ и $\|f_n - f_k\|_{m,p} \rightarrow 0$ при $n, k \rightarrow \infty$. Тогда предел в $L^p(X, \mu)$ функций $\partial_h f_n$ обозначим через $\partial_h f$ и будем называть *производной (в смысле Соболева) функции f вдоль вектора h* .

Аналогично определяются кратные производные f до порядка m .

Если $p \geq 2$, то $\partial_h f$ существует и не зависит от выбора последовательности f_n . Это доказывается через формулу интегрирования по частям так же, как было доказано в [7, гл. 5] для случая гауссовских мер.

ЛЕММА 1. Если $f \in W^{m,p}(X)$, $g \in W^{m,q}(X)$, $1 \leq p, q < \infty$, $1/p + 1/q = 1/r \leq 1$, то $fg \in W^{m,r}(X)$, причем $\|fg\|_{m,r} \leq C(m, p, q, r) \cdot \|f\|_{m,p} \cdot \|g\|_{m,q}$.

Эта оценка выводится из неравенства Гёльдера сначала для гладких цилиндрических функций, а затем путем перехода к пределу для всех f и g .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Мера μ дифференцируема вдоль векторного поля v (в смысле Фомина), если существует знакопеременная мера ограниченной вариации $d_v \mu$ такая, что для всякой $\varphi \in FC_b^\infty(X)$ справедливо равенство

$$\int \partial_v \varphi(x) \mu(dx) = - \int \varphi(x) d_v \mu(dx),$$

где $\partial_v \varphi(x) = \varphi'(x)(v(x))$, и при этом $d_v \mu \ll \mu$.

Плотность меры $d_v \mu$ относительно μ будем называть *дивергенцией векторного поля v* и обозначать через δv .

Из леммы 1 можно получить оценки норм производных φ вдоль v через нормы φ и v (при условии, что φ и v принадлежат соответствующим соболевским классам):

$$\begin{aligned} \|\partial_v \varphi\|_r &\leq C_1(p, q, r) \cdot \|\varphi\|_{1,p} \cdot \|v\|_q, & \text{где } \frac{1}{r} &\geq \frac{1}{p} + \frac{1}{q}, \\ \|\partial_v^k \varphi\|_r &\leq C_k(p, q, r) \cdot \|\varphi\|_{k,p} \cdot \|v\|_{k-1,q}^k, & \text{где } \frac{1}{r} &\geq \frac{1}{p} + \frac{k}{q}. \end{aligned}$$

ЛЕММА 2. Если $f \in W^{1,2}(X)$, а мера μ дифференцируема вдоль векторного поля $v \in L^2(X, \mu, H)$, причем $\delta v \in L^2(X, \mu)$, то мера $f\mu$ также дифференцируема вдоль v . При этом

$$d_v(f\mu) = (f \cdot \delta v + \partial_v f)\mu.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть сначала $f \in FC_b^\infty(X)$. Тогда для всякой $\varphi \in FC_b^\infty(X)$ имеем

$$\begin{aligned} \int \partial_v \varphi(x) f(x) \mu(dx) &= \int \partial_v (\varphi(x) f(x)) \mu(dx) - \int \varphi(x) \partial_v f(x) \mu(dx) \\ &= - \int \varphi(x) f(x) d_v \mu(dx) - \int \varphi(x) \partial_v f(x) \mu(dx) \\ &= - \int \varphi(x) (f(x) \delta v(x) + \partial_v f(x)) \mu(dx). \end{aligned} \quad (1)$$

Вариация меры $(f \cdot \delta v + \partial_v f)\mu$ не превышает $\|f\|_2 \cdot \|\delta v\|_2 + \|\nabla f\|_2 \cdot \|v\|_2$, что при фиксированном v оценивается через $\|f\|_{1,2}$. Благодаря этому формула (1) остается справедливой при переходе к пределу по f в $W^{1,2}(X)$.

Введем для меры μ аналог пространства Камерона–Мартин.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Обозначим через $H(\mu)$ пространство

$$\{h \in X : \mu \text{ дифференцируема вдоль } h \text{ и } \|\beta_h^\mu\|_2 < \infty\},$$

наделенное нормой $\|h\|_{H(\mu)} = \|\beta_h^\mu\|_2$.

$H(\mu)$ является сепарабельным гильбертовым пространством, непрерывно вложенным в X (см. [9, гл. 5]).

2. Абсолютная непрерывность образа меры.

ТЕОРЕМА 1. Пусть выполнены следующие условия:

- а) $F \in W^{2,2}(X)$;
- б) $1/|\nabla F| \in L^4(X, \mu)$;
- в) мера μ дифференцируема вдоль $v = \nabla F$ и $\delta v \in L^2(X, \mu)$.

Тогда образ меры $\mu \circ F^{-1}$ абсолютно непрерывен относительно меры Лебега на $\mathbb{R}$, причем плотность k можно выбрать с ограниченной вариацией.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства существования требуемой плотности достаточно существования меры λ_1 на X такой, что для любой функции $\varphi \in C_b^1(\mathbb{R})$

$$\int \varphi'(t) \mu \circ F^{-1}(dt) \equiv \int \varphi'(F(x)) \mu(dx) = - \int \varphi(F(x)) \lambda_1(dx).$$

Функция $\varphi \circ F$ принадлежит классу $W^{1,2}(X)$ (см. [9, лемма 7.1.13]). Сделаем следующие преобразования:

$$\begin{aligned} \int \varphi'(F(x)) \mu(dx) &= \int \varphi'(F(x)) \partial_v F(x) \frac{\mu(dx)}{\partial_v F(x)} = \int \partial_v(\varphi(F(x))) \frac{\mu(dx)}{\partial_v F(x)} \\ &= - \int \varphi(F(x)) d_v \left(\frac{\mu}{\partial_v F} \right) (dx) \end{aligned}$$

(последнее равенство пока формально). Положим

$$\lambda_1 = d_v \left(\frac{\mu}{\partial_v F} \right) = \left(-\frac{\partial_v^2 F}{|\nabla F|^4} + \frac{\delta v}{|\nabla F|^2} \right) \mu.$$

Ограниченность вариации меры λ_1 доказывается при помощи оценок через нормы: заметим, что

$$|\partial_v^2 F| = |2 \langle \nabla^2 F(\nabla F), \nabla F \rangle| \leq 2N_{2,F} \cdot |\nabla F|^2,$$

откуда получается по неравенству Гёльдера

$$\|\lambda_1\| \leq \left\| \frac{2N_{2,F} + |\delta v|}{|\nabla F|^2} \right\|_1 \leq (2\|F\|_{2,2} + \|\delta v\|_2) \left\| \frac{1}{|\nabla F|} \right\|_4^2 < \infty.$$

Поскольку функция $\partial_v(\varphi \circ F)$ интегрируема по $(\partial_v F)^{-1}\mu$, а ограниченная функция $\varphi \circ F$ интегрируема по λ_1 , то проделанные преобразования законны. В результате мы имеем дифференцируемость меры $\mu \circ F^{-1}$ на $\mathbb{R}$ в смысле Скорохода, $d_1(\mu \circ F^{-1}) = \lambda_1 \circ F^{-1}$. Из этого следует (см. [9, пример 2.2.1]), что некоторая версия лебеговой плотности меры $\mu \circ F^{-1}$ имеет конечную вариацию (не превышающую $\|\lambda_1\|$), а значит, имеет не более чем счетное множество точек разрыва, причем только первого рода.

Всюду далее мы будем рассматривать версию функции k , имеющую конечную вариацию и определенную в каждой точке разрыва a таким образом, что

$$k(a) = \frac{k(a-0) + k(a+0)}{2}. \quad (2)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Справедливо неравенство

$$\sup_t |k(t)| \leq \frac{1}{2} \operatorname{Var} k \leq \frac{1}{2} \|\lambda_1\|.$$

Это следует из очевидного факта, что $\inf k = 0$.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть в теореме 1 $|\nabla F|^{-1} \in L^p(X, \mu)$, где $p > 4$. Пусть $g \in W^{1,r}(X)$, причем константы p и r удовлетворяют неравенству $2/p+1/r \leq 1/2$. Тогда мера $g\mu$ дифференцируема вдоль $v = \nabla F$, и ее образ $(g\mu) \circ F^{-1}$ имеет плотность k_g с ограниченной вариацией.

Это утверждение доказывается построением меры λ_g по мере $g\mu$ с помощью той же формулы, что и в теореме 1. Оценим $\sup_t |k_g(t)| \leq \|\lambda_g\|$:

$$\begin{aligned} \lambda_g &= d_v \left(\frac{g\mu}{\partial_v F} \right) = \left(-\frac{\partial_v^2 F}{|\nabla F|^4} g + \frac{\partial_v g}{|\nabla F|^2} + \frac{g \delta v}{|\nabla F|^2} \right) \mu, \\ \|\lambda_g\| &\leq \left\| \frac{(2N_{2,F} + |\delta v|)|g| + |\langle \nabla F, \nabla g \rangle|}{|\nabla F|^2} \right\|_1, \end{aligned}$$

откуда по неравенству Гёльдера получаем

$$\|\lambda_g\| \leq C(\mu, F, p, r) \cdot \|g\|_{1,r}.$$

Для функции k_g мы также будем выбирать версию конечной вариации со свойством (2).

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть выполнены условия следствия 1. Пусть ω_1 – положительная четная C^∞ -функция с носителем $[-1, 1]$, $\int \omega_1(t) dt = 1$, $\omega_N(t) = N\omega_1(Nt)$. Тогда для всех g , удовлетворяющих условиям следствия 1, имеем

$$\int_X g(x) \omega_N(F(x)) \mu(dx) = \int_{-\infty}^{+\infty} k_g(t) \omega_N(t) dt \rightarrow k_g(0) \quad \text{при } N \rightarrow \infty.$$

ЛЕММА 3. Если X – полное локально выпуклое пространство, μ – радоновская вероятностная мера на нем, то существуют выпуклые центрально-симметричные компакты K_t , исчерпывающие меру, т.е. для всех $t \geq 1$ $\mu(K_t) \geq 1 - 1/t$ и $K_s \subset K_t$ при $s < t$.

Это вытекает из того, что замкнутая абсолютно выпуклая оболочка компакта в полном линейном топологическом пространстве также является компактом.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Пусть $m \geq 0$, $1 \leq p < \infty$. Емкость $\operatorname{Cap}_{m,p}$ открытого множества U равна

$$\operatorname{Cap}_{m,p}(U) = \inf \{ \|\varphi\|_{m,p} : \varphi \in W^{m,p}(X), \varphi \geq 0, \varphi \geq 1 \text{ на } \mu\text{-почти всем } U \},$$

для произвольного множества A

$$\operatorname{Cap}_{m,p}(A) = \inf \{ \operatorname{Cap}_{m,p}(U) : U \text{ открыто, } A \subset U \}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. Емкость C называется *плотной*, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется компакт $K_\varepsilon \subset X$ такой, что $C(X \setminus K_\varepsilon) < \varepsilon$.

Известно, что если X – сепарабельное банахово пространство, μ – вероятностная мера с полным носителем, то при любом $q \geq 1$ емкость $\text{Cap}_{1,q}$ плотна (см. [10]).

То же будет справедливо и для произвольного локально выпуклого пространства X , если μ – радоновская гауссовская мера (см. [7, гл. 5]).

ЛЕММА 4. Пусть μ – вероятностная мера на сепарабельном пространстве Фреше X , $H \subset H(\mu)$. Тогда существует семейство функций $\{\theta_t \mid t \geq 4\}$ из класса $W^{1,\infty}(X)$ со следующими свойствами:

- 1) $0 \leq \theta_t \leq 1$;
- 2) $\theta_t(x) \rightarrow 1$ при $t \rightarrow \infty$ для μ -почти всех x ;
- 3) $\theta_t = 0$ μ -почти всюду вне $2K_t$, где K_t – выпуклые симметричные компакты, исчерпывающие меру;
- 4) для любого $q \geq 1$ $\|1 - \theta_t\|_{1,q} \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$.

В частности, из этого будет вытекать плотность емкости $\text{Cap}_{1,q}$ при всех q .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть C_H – норма оператора вложения H в $H(\mu)$. Обозначим через μ_{sym} симметризованную меру μ , т.е. вероятностную меру, заданную формулой $\mu_{\text{sym}}(A) = (\mu(A) + \mu(-A))/2$. Введем функцию $\psi_t(x) = \mu_{\text{sym}}(2K_t - x)$. Тогда при $h \in H(\mu)$

$$\begin{aligned} \partial_h \psi_t(x) &= \frac{1}{2}(d_h \mu(2K_t + x) - d_h \mu(2K_t - x)) = \frac{1}{2} \left(\int_{2K_t+x} - \int_{2K_t-x} \right) \beta_h^\mu(y) \mu(dy) \\ &= \left(\frac{1}{2}(I_{X \setminus (2K_t-x)} - I_{X \setminus (2K_t+x)}); \beta_h^\mu \right)_{L^2(\mu)}. \end{aligned} \quad (3)$$

Подставив $h = e_n$, $n = 1, 2, \dots$, где $\{e_n\}$ – ортонормированный базис $H(\mu)$, и просуммировав квадраты выражений (3), из неравенства Бесселя получим оценку

$$\begin{aligned} \|\nabla_{H(\mu)} \psi_t(x)\|_{H(\mu)} &\leq \|I_{X \setminus (2K_t+x)}\|_2 + \|I_{X \setminus (2K_t-x)}\|_2, \\ |\nabla \psi_t(x)| &\leq C_H \cdot \|\nabla_{H(\mu)} \psi_t(x)\|_{H(\mu)}. \end{aligned}$$

При $x \notin 2K_t$ имеем $(2K_t - x) \cap (2K_t + x) = \emptyset$, откуда $\mu_{\text{sym}}(2K_t - x) = \mu_{\text{sym}}(2K_t + x) \leq 1/2$. При $x \in K_t$ $\mu_{\text{sym}}(2K_t - x) \geq \mu_{\text{sym}}(K_t) \geq 1 - t^{-1} \geq 3/4$. Кроме того, для любого x $0 \leq \psi_t(x) \leq 1$. Оценим норму функции ψ_t . При $x \in K_t$ имеем $X \setminus (2K_t \pm x) \subset X \setminus K_t$; следовательно,

$$\int |\nabla \psi_t(x)|^q \mu(dx) \leq \int_{K_t} C_H^q \left(\frac{2}{\sqrt{t}} \right)^q \mu(dx) + \int_{X \setminus K_t} C_H^q \mu(dx);$$

правая часть этого неравенства стремится к 0 при $t \rightarrow \infty$. Наконец, ψ_t приближается по норме $\|\cdot\|_{1,q}$ функциями $f_n(x) = \mu_{\text{sym}}(E_n - x)$, где E_n – абсолютно выпуклые замкнутые цилиндры, убывающие к компакту $2K_t$ (их существование вытекает из того, что X – сепарабельное пространство Фреше). Функции f_n являются цилиндрическими и липшицевыми вдоль H ; следовательно, $f_n \in W^{1,\infty}(X)$.

Таким образом, $\psi_t \in W^{1,q}(X)$. Пусть монотонная функция $f \in C_b^\infty(\mathbb{R})$ такова, что $f(t) = 0$ при $t \leq 1/2$, $f(t) = 1$ при $t \geq 3/4$. Пусть $\theta_t(x) = f(\psi_t(x))$. Тогда θ_t обладает всеми необходимыми свойствами: $0 \leq \theta_t \leq 1$, $\theta_t = 1$ на K_t , $\theta_t = 0$ вне $2K_t$;

$$\|1 - \theta_t\|_q \leq t^{-1/q}, \quad \|\nabla \theta_t\|_q \leq \sup_{\tau} f'(\tau) \cdot \|\nabla \psi_t\|_q \rightarrow 0 \quad \text{при } t \rightarrow \infty.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8. Пусть C – некоторая емкость. Будем говорить, что:

- 1) некоторое свойство *выполнено C -квазивсюду*, если оно имеет место на $X \setminus A$, где $C(A) = 0$;
- 2) функция f *C -квазинепрерывна*, если существуют замкнутые множества Q_n такие, что $f|_{Q_n}$ непрерывна для всех n и $C(X \setminus Q_n) < 1/n$.

Заметим, что если емкость C плотна, то множества Q_n можно выбрать компактными.

Известно, что функции $f \in W^{1,q}(X)$ всегда имеют $\text{Cap}_{1,q}$ -квазинепрерывные версии (см. [7, гл. 5]).

3. Построение и свойства поверхностной меры.

ЛЕММА 5. Пусть μ – вероятностная мера на сепарабельном пространстве Фреше X ; $F \in W^{2,2}(X)$, $|\nabla F|^{-1} \in L^8(X, \mu)$. Пусть $H \subset H(\mu)$, μ дифференцируема вдоль $v = \nabla F$, причем $\delta v \in L^2(X, \mu)$. Тогда

- 1) меры

$$\nu_N^t(dx) = \omega_N(F(x))\theta_t(x)\mu(dx)$$

- (ω_N и θ_t были определены в п. 2) слабо сходятся при $N \rightarrow \infty$ к некоторой мере ν^t , сосредоточенной на $2K_t$;
- 2) если $\text{Cap}_{1,4}(A) = 0$, то для всех t и N $\nu_N^t(A) = 0$, $\nu^t(A) = 0$;
- 3) для всех $g \in FC_b^\infty(X)$ выполнено равенство

$$\int g(x) \nu^t(dx) = k_{g\theta_t}(0); \quad (4)$$

- 4) равенство (4) справедливо и для всех $\text{Cap}_{1,8}$ -квазинепрерывных $g \in W^{1,8}(X)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Пусть $\varphi \in C_b(X)$. Зададим $\varepsilon > 0$. На компакте $2K_t$ функция φ равномерно непрерывна. Поэтому в силу теоремы Вейерштрасса существует функция $\varphi_\varepsilon \in FC_b^\infty(X)$ такая, что

$$\sup_{x \in 2K_t} |\varphi_\varepsilon(x) - \varphi(x)| \leq \varepsilon.$$

Следовательно,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int \varphi_\varepsilon(x) \nu_N^t(dx) = \int \varphi(x) \nu_N^t(dx)$$

равномерно при всех N , поскольку меры ν_N^t равномерно ограничены:

$$\nu_N^t(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} k_{\theta_t}(\tau) \omega_N(\tau) d\tau \rightarrow k_{\theta_t}(0).$$

При каждом ε имеем $\varphi_\varepsilon \theta_t \in W^{1,8}(X)$ и по следствию 2 существует

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int \varphi_\varepsilon(x) \nu_N^t(dx) = k_{\varphi_\varepsilon \theta_t}(0).$$

Отсюда следует, что существует

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int \varphi(x) \nu_N^t(dx).$$

Поскольку это верно для всех $\varphi \in C_b(X)$ и при этом меры ν_N^t равномерно плотны, по теореме Прохорова (см. [11, гл. I]) существует мера ν^t , к которой слабо сходятся меры ν_N^t . По свойству слабо сходящихся мер для открытого множества (см. [8, гл. 1])

$$\nu^t(X \setminus 2K_t) \leq \lim_{N \rightarrow \infty} \nu_N^t(X \setminus 2K_t) = 0.$$

2) Пусть $\text{Cap}_{1,4}(A) = 0$. Для каждого натурального m возьмем открытое, содержащее A , множество U_m такое, что $\text{Cap}_{1,4}(U_m) < 2^{-m}$. Существует функция $g_m \in W^{1,4}(X)$ такая, что $g_m \geq 0$, $g_m \geq 1$ на μ -почти всем (следовательно, и на ν_N^t -почти всем) U_m , $\|g_m\|_{1,4} < 2^{1-m}$. При всех N имеем

$$\begin{aligned} \nu_N^t(U_m) &\leq \int g_m(x) \nu_N^t(dx) = \int_{-\infty}^{+\infty} k_{g_m \theta_t}(\tau) \omega_N(\tau) d\tau \leq \text{ess sup}_\tau |k_{g_m \theta_t}(\tau)|, \\ \text{ess sup}_\tau |k_{g_m \theta_t}(\tau)| &\leq \sup_\tau |k_{g_m}(\tau)| \leq C(\mu, F, 8, 4) \cdot \|g_m\|_{1,4} \end{aligned}$$

по следствию 1. Следовательно, для всех t, N $\nu_N^t(U_m) \leq \text{const}/2^m$. По свойству слабо сходящихся мер имеем

$$\nu^t(U_m) \leq \lim_{N \rightarrow \infty} \nu_N^t(U_m) \leq \frac{\text{const}}{2^m}, \quad \nu^t(A) \leq \inf_m \nu^t(U_m) = 0.$$

3), 4) Пусть $g \in W^{1,8}(X)$. Поскольку функции $g_\pm(x) = \max\{\pm g(x), 0\}$ также принадлежат $W^{1,8}(X)$, достаточно ограничиться рассмотрением неотрицательных g . По лемме 1 из $\theta_t \in W^{1,8}(X)$ получаем $g\theta_t \in W^{1,4}(X)$. В случае непрерывности (и ограниченности) g на $2K_t$ утверждение непосредственно вытекает из существования предела

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int g \nu_N^t = k_{g\theta_t}(0).$$

Общий случай сводится к этому случаю в силу замечаний 2 и 3 (см. ниже), в виду того, что функция g имеет $\text{Cap}_{1,8}$ -квазинепрерывную версию и множества Q_n из определения 8 можно выбрать компактными.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Поскольку емкость $\text{Cap}_{1,8}$ плотна, возрастающие компакты K'_t можно выбрать такими (не обязательно центрально симметричными и выпуклыми), что $\text{Cap}_{1,8}(X \setminus K'_t) < 1/t$. В этом случае существуют функции $\theta_t: X \rightarrow [0, 1]$ со свойствами:

- а) $\theta_t = 0$ μ -почти всюду на $X \setminus K'_t$;
- б) $\theta_t \rightarrow 1$ при $t \rightarrow \infty$ μ -почти всюду;
- в) $\theta_t \in W^{1,8}(X)$;
- г) $\|1 - \theta_t\|_{1,8} \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$.

ЛЕММА 6. Пусть ν^t – меры, построенные в предыдущей лемме. Тогда

- 1) меры ν^t возрастают по t ;
- 2) меры ν^t слабо сходятся к мере ν и сходятся к ней же по вариации, $\|\nu\| = k(0)$; в частности, для всех $g \in FC_b^\infty(X)$ выполнено равенство

$$\int g(x) \nu(dx) = k_g(0); \quad (5)$$

- 3) если $\text{Cap}_{1,4}(A) = 0$, то $\nu(A) = 0$;
- 4) если $g \in W^{1,8}(X)$ является $\text{Cap}_{1,8}$ -квазинепрерывной, то выполнено равенство (5).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Докажем, что при $t > s \geq 4$ для любой ограниченной неотрицательной борелевской функции φ имеем

$$\int \varphi \nu^t \geq \int \varphi \nu^s. \quad (6)$$

Достаточно проверить (6) для любой функции $\varphi \in FC_b^\infty(X)$, $\varphi \geq 0$. А это вытекает из следствия 2, поскольку $\varphi \theta_t \geq \varphi \theta_s$.

- 2) Пусть $\varphi \in C_b(X)$, $\sup |\varphi(x)| = 1$, $t > s \geq 4$. Имеем

$$\begin{aligned} \left| \int \varphi \nu^t - \int \varphi \nu^s \right| &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left| \int \varphi \nu_N^t - \int \varphi \nu_N^s \right| \leq \lim_{N \rightarrow \infty} \int |\nu_N^t - \nu_N^s| \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \int |k_{\theta_t}(\tau) - k_{\theta_s}(\tau)| \omega_N(\tau) d\tau = |k_{\theta_t}(0) - k_{\theta_s}(0)|. \end{aligned}$$

Поскольку $k_{\theta_s}(0) \nearrow k(0)$ при $s \rightarrow \infty$, мы получаем, что искомая разность равномерно по $t \geq s$ стремится к 0 при $s \rightarrow \infty$, т.е. выполнен критерий Коши для слабой сходимости мер ν^t . Равномерная плотность мер ν^t вытекает из равномерных оценок ν^t через $\text{Cap}_{1,4}$, полученных в лемме 5, поскольку $\text{Cap}_{1,4}(X \setminus 2K_s) \rightarrow 0$ при $s \rightarrow \infty$. Следовательно, в силу теоремы Прохорова эти меры слабо сходятся к некоторой мере ν . При этом вариация меры ν равна

$$\|\nu\| = \int \nu(dx) = \lim_{t \rightarrow \infty} \int \nu^t(dx) = \lim_{t \rightarrow \infty} k_{\theta_t}(0) = k(0).$$

Докажем сходимость по вариации:

$$\begin{aligned} \|\nu - \nu^t\| &= \sup \left\{ \int \psi \cdot (\nu - \nu^t) : \psi \text{ борелевская, } |\psi| \leq 1 \right\} \\ &= \sup \left\{ \int \varphi \cdot (\nu - \nu^t) : \varphi \in FC_b^\infty, |\varphi| \leq 1 \right\}, \end{aligned}$$

так как в силу радоновости мер ν и ν^t функция ψ приближается в $L^1(X, |\nu| + |\nu^t|)$ цилиндрическими функциями (см. [7, дополнения]). Если $\varphi \in FC_b^\infty$, $|\varphi| \leq 1$, то

$$\left| \int \varphi \nu - \int \varphi \nu^t \right| = \left| \lim_{s \rightarrow \infty} k_{\varphi \theta_s}(0) - k_{\varphi \theta_t}(0) \right| = |k_{(1-\theta_t)\varphi}(0)| \leq |k_{1-\theta_t}(0)| \rightarrow 0$$

при $t \rightarrow \infty$.

3) Пусть для любого m существует открытое множество U_m , содержащее A , такое, что $\text{Cap}_{1,4}(U_m) < 2^{-m}$. Как уже было показано, $\nu^t(U_m) \leq \text{const} \cdot 2^{-m}$ при всех t . При каждом m имеем

$$\nu(A) \leq \nu(U_m) \leq \lim_{t \rightarrow \infty} \nu^t(U_m) \leq \text{const} \cdot 2^{-m};$$

следовательно, $\nu(A) = 0$.

4) Пусть $g \in W^{1,8}(X)$, $g|_{Q_n}$ непрерывна для любого n , где замкнутые множества Q_n возрастают и $\text{Cap}_{1,8}(X \setminus Q_n) \rightarrow 0$. В силу плотности емкости $\text{Cap}_{1,8}$ мы можем считать Q_n компактными. Поскольку $\mu(X \setminus Q_n) \rightarrow 0$, мы можем выбрать $Q_{n(t)}$ в качестве компактов K'_t , где $n(t) \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow \infty$ (см. замечание 2). Тогда при каждом t получаем

$$\int g \nu^t = k_{g\theta_t}(0).$$

Как уже было замечено, достаточно ограничиться рассмотрением неотрицательных g . На Q_n функция g интегрируема, так как она ограничена. Пусть $Q = \bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n$. Тогда $\text{Cap}_{1,4}(X \setminus Q) \leq \text{Cap}_{1,8}(X \setminus Q) = 0$; следовательно, $\nu(X \setminus Q) = 0$. Отсюда мы получаем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{Q_n} g \nu = \int g \nu \leq \limsup_{s \rightarrow \infty} \int g \nu^s \leq \text{const} \cdot \|g\|_{1,4} < \infty.$$

Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ существует n такое, что

$$\left| \int g \nu - \int_{Q_n} g \nu \right| < \frac{\varepsilon}{3},$$

и такая же оценка справедлива для мер ν^s равномерно при всех s ; существует $s_0 \geq 4$ такое, что

$$\left| \int_{Q_n} g \nu - \int_{Q_n} g \nu^s \right| \leq \|\nu - \nu^s\| \cdot \sup_{Q_n} g < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{для всех } s \geq s_0.$$

Тогда

$$\left| \int g \nu - \int g \nu^s \right| \leq \varepsilon.$$

Следовательно,

$$\int g \nu = \lim_{s \rightarrow \infty} \int g \nu^s = k_g(0).$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть X – сепарабельное пространство Фреше (например, сепарабельное банахово пространство), μ – положительная мера, $H \subset H(\mu)$, $F \in W^{2,2}(X)$, $|\nabla F|^{-1} \in L^8(X, \mu)$. Пусть мера μ дифференцируема вдоль векторного поля $v = \nabla F$, причем $\delta v \in L^2(X, \mu)$. Тогда существует единственная мера ν со свойством

$$\int \varphi(x) \nu(dx) = k_\varphi(0) \quad \text{для всех } \varphi \in FC_b^\infty(X).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Существование такой меры доказано ее построением. Единственность следует из того, что радоновская мера однозначно определяется интегралами цилиндрических функций. Заметим, что в доказательстве этой теоремы не использовались утверждения 4) лемм 5 и 6.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Результат построения меры ν не зависит от выбора компактов, исчерпывающих меру, и от выбора функций θ_t и ω_N , обладающих вышеописанными свойствами.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Если пространство X непрерывно вложено в сепарабельное пространство Фреше X' , функция F произвольно продолжена вне X и мера μ сосредоточена на X , то результат построения поверхностной меры не будет зависеть от того, какое из пространств, X или X' , рассматривать как объемлющее.

Введем новые обозначения. Пусть $\nu^{(0)} \equiv \nu$, $\nu^{(a)}$ – аналогичные меры, построенные для функций $F - a$. При всех a таких, что $k(a) \neq 0$, положим $\mu_\sigma^{(a)} = \nu^{(a)}/k(a)$; если $k(a) = 0$, положим $\mu_\sigma^{(a)} \equiv 0$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть выполнены те же условия на X, H, μ и F , что и в лемме 5. Пусть $F|_{\text{Cap}_{1,4}}$ -квазинепрерывна. Тогда меры $\mu_\sigma^{(a)}$ являются условными мерами для μ относительно функции F , т.е.

- 1) при $\mu \circ F^{-1}$ -почти всех a меры $\mu_\sigma^{(a)}$ вероятностные;
- 2) мера $\mu_\sigma^{(a)}$ сосредоточена на поверхности $F^{-1}(a)$;
- 3) для всех $B \in \mathcal{B}(X)$

$$\mu(B) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mu_\sigma^{(a)}(B) \mu \circ F^{-1}(da).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) При $k(a) \neq 0$ $\|\mu_\sigma^{(a)}\| = \|\nu^{(a)}\|/k(a) = 1$.

2) Зафиксируем a такое, что $k(a) \neq 0$. Пусть Q_n – замкнутые множества такие, что $F|_{Q_n}$ непрерывна и $\text{Cap}_{1,4}(X \setminus Q_n) < 1/n$. Пусть $U = F^{-1}((-\infty, a - \delta) \cup (a + \delta, +\infty))$. Заметим, что

$$U \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n,$$

где $U_n = U \cup (X \setminus Q_n)$ открытые, поскольку множества $F^{-1}([a - \delta, a + \delta]) \cap Q_n$ замкнуты. При всех $N > 1/\delta$, $t \geq 4$ имеем

$$(\nu^{(a)})_N^t(U_n) = (\nu^{(a)})_N^t(X \setminus Q_n) \leq \text{const} \cdot \text{Cap}_{1,4}(X \setminus Q_n) = \frac{\text{const}}{n},$$

откуда

$$(\nu^{(a)})^t(U_n) \leq \frac{\text{const}}{n}, \quad \mu_\sigma^{(a)}(U_n) \leq \frac{\text{const}}{nk(a)}, \quad \mu_\sigma^{(a)}(U) \leq \inf_n \mu_\sigma^{(a)}(U_n) = 0.$$

3) Пусть $\varphi(x) = e^{il(x)}$, $l \in X^*$. Заметим, что при всех a , при которых k и k_φ непрерывны, $|k_\varphi(a)| \leq k(a)$. Обозначим через J множество точек разрыва k и k_φ , объединенное с множеством $\{k = 0\}$. Тогда $\mu \circ F^{-1}(J) = 0$ и

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} k(a) \int_X \varphi(x) \mu_\sigma^{(a)}(dx) da &= \int_{\mathbb{R} \setminus J} k(a) \frac{k_\varphi(a)}{k(a)} da = \int_{\mathbb{R}} k_\varphi(a) da \\ &= \int_{\mathbb{R}} (\varphi \mu) \circ F^{-1}(da) = \int_X \varphi \mu(dx). \end{aligned}$$

Преобразования Фурье радоновских мер $\int k(a) \mu_\sigma^{(a)} da$ и μ совпадают, следовательно, совпадают сами эти меры.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Все приведенные доказательства остаются справедливыми для радоновской вероятностной меры на вполне регулярном локально выпуклом пространстве, не являющемся сепарабельным пространством Фреше, если оно обладает следующим свойством: каждый компакт содержится в некотором выпуклом центрально симметричном компакте, представимом в виде счетного пересечения цилиндров (этим свойством обладает большинство пространств, встречающихся в приложениях).

При этом мера ν будет радоновской.

ЗАМЕЧАНИЕ 6. В доказательстве теоремы 1 и следствий 1, 2 не использовался тот факт, что мера μ положительна. Леммы 5, 6 (кроме утверждения 1)) и теоремы 2, 3 также легко обобщаются на случай знакопеременной меры. Разумеется, при построении соболевских классов, емкостей и функций θ_t меру μ следует заменить мерой $|\mu|$, которая обладает теми же свойствами дифференцируемости, что и μ (см. [9, гл. 2]). Кроме того, в случае знакопеременной μ $k(t)$ будет обозначать лебегову плотность меры $|\mu| \circ F^{-1}$.

Автор выражает благодарность В. И. Богачёву за постановку задачи и научное руководство.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Скороход А. В. Интегрирование в гильбертовом пространстве. М.: Наука, 1975.
- [2] Угланов А. В. Поверхностные меры в банаховом пространстве // Матем. сб. 1979. Т. 110. № 2. С. 189–217.
- [3] Угланов А. В. Поверхностные интегралы в линейных топологических пространствах // Докл. РАН. 1995. Т. 344. № 4. С. 450–453.
- [4] Bogachev V. I. Smooth measures, the Malliavin calculus and approximations in infinite-dimensional space // Acta Univ. Carolin. Math. Phys. 1990. V. 31. № 2. P. 9–23.
- [5] Пугачёв О. В. Поверхностные меры в бесконечномерных пространствах // Матем. заметки. 1998. Т. 63. № 1. С. 106–114.
- [6] Airault H., Malliavin P. Integration géométrique sur l'espace de Wiener // Bull. Sci. Math. (2). 1988. V. 112. P. 3–52.
- [7] Богачёв В. И. Гауссовские меры. М.: Наука, 1997.
- [8] Биллингсли П. Сходимость вероятностных мер. М.: Наука, 1977.
- [9] Bogachev V. I. Differentiable measures and the Malliavin calculus // J. Math. Sci. 1997. V. 87. № 5. P. 3577–3731.
- [10] Röckner M., Schmuland B. Tightness of general $C_{1,p}$ capacities on Banach space // J. Funct. Anal. 1992. V. 108. № 1. P. 1–12.
- [11] Вахания Н. Н., Тариеладзе В. И., Чобанян С. А. Вероятностные распределения в банаховых пространствах. М.: Наука, 1984.