Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. Г. Григорьев, А. О. Радомский, Некоторые тригонометрические полиномы с экстремально малой равномерной нормой, *Матем. заметки*, 2015, том 98, выпуск 2, 196–203

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10610>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.157.27.8

26 апреля 2023 г., 15:17:18

Некоторые тригонометрические полиномы с экстремально малой равномерной нормой

П. Г. Григорьев, А. О. Радомский

Приводится пример тригонометрических полиномов с экстремально малой равномерной нормой. Этим примером показывается граница возможности обобщения неравенства Сидона для лакунарных полиномов в некотором направлении.

Библиография: 9 названий.

DOI: 10.4213/mzm10610

В статье доказывается следующая

ТЕОРЕМА. Пусть $q > 1$ и последовательность натуральных чисел $\{m_j\}_{j=1}^{\infty}$ удовлетворяет условию $m_{j+1}/m_j \geq q$ для всех j . Пусть также последовательность натуральных чисел $\{d_j\}_{j=1}^{\infty}$ удовлетворяет условию

$$1 \leq d_j \leq m_{j+1} - m_j.$$

Тогда существует последовательность тригонометрических полиномов $\{\delta_j\}_{j=1}^{\infty}$ такая, что

$$\delta_j(x) = \sum_{m_j \leq s < m_j + d_j} c_s e^{isx}, \quad (1)$$

$$\frac{1}{8} \leq \|\delta_j\|_1 \leq \|\delta_j\|_{\infty} \leq 2, \quad (2)$$

$$\left\| \sum_{j=1}^N \delta_j \right\|_{\infty} \leq \alpha + \beta \sqrt{N} + \gamma \max_{1 \leq j \leq N} \log_q \max \left(\frac{m_j}{d_j}, \frac{1}{\ln q}, 1 \right) \quad (3)$$

для всех $N = 1, 2, \dots$ с некоторыми положительными абсолютными константами α, β и γ .

Этот результат обобщает примеры, построенные Григорьевым [1] и Радомским [2], где, грубо говоря, теорема была доказана для случая $m_j = 2^j$, $d_j = [2^{j-j^\varepsilon}]$ с некоторыми небольшими ограничениями.

Работа второго автора выполнена при поддержке программы “Ведущие научные школы” (проект № НШ-3682.2014.1).

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В теореме пример строится с постоянными $\alpha = 91$, $\beta = 2\sqrt{2c_H}$, $\gamma = 60$, где c_H – константа из неравенства Карлесона–Ханта, см. (5) ниже. Можно вместо результата Карлесона–Ханта воспользоваться более простым хорошо известным неравенством (см. [3; гл. 13, т. 1.17])

$$\left\| \sup_{1 \leq j < \infty} \left| \sum_{k=1}^{m_j} b_k e^{ikx} \right| \right\|_2^2 \leq A_q \sum_{k=1}^{\infty} |b_k|^2$$

при $m_{j+1}/m_j \geq q > 1$ с константой A_q , зависящей от q . Неравенство Карлесона–Ханта используется здесь потому, что нам хотелось сделать константы α , β и γ независимыми от q . В других отношениях мы не пытались оптимизировать константы в теореме, например, для случая $q = 2$ нетрудно, следуя схеме нашего доказательства, получить более хорошие константы.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В этой работе мы предполагаем, что нормы $L_p(0, 2\pi)$ масштабированы, т.е.

$$\|f\|_p = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f|^p d\mu \right)^{1/p} \quad \text{для } 1 \leq p < \infty,$$

где μ – стандартная мера Лебега, так что $\|1\|_p = 1$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Как следствие из теоремы можно вывести аналог с вещественными полиномами δ_j с незначительными изменениями констант. (Мы решили доказать результат для δ_j с положительными гармониками и вещественными коэффициентами.) Также с минимальными изменениями в доказательстве можно доказать версию теоремы с $\delta_j(x) = p_j(x) \cos m_j x$, где p_j – вещественные тригонометрические полиномы, удовлетворяющие $\deg p_j \leq d_j$.

Принимая во внимание замечание 3, мы получаем из теоремы следующее.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть $0 \leq \varepsilon < 1$. Существует последовательность вещественных тригонометрических полиномов $\{p_j\}_{j=1}^{\infty}$ таких, что $\deg p_j \leq 2^{j-j^\varepsilon}$, $c_- \leq \|p_j\|_1 \leq \|p_j\|_\infty \leq c_+$ и

$$\left\| \sum_{j=1}^N p_j(x) \cos 2^j x \right\|_\infty \leq CN^{\max(\varepsilon, 1/2)} \quad (4)$$

при всех $N = 1, 2, \dots$ с некоторыми положительными абсолютными постоянными c_- , c_+ , C .

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Для любой ортогональной системы $\{\delta_j\}_{j=1}^N$ имеет место

$$\left\| \sum_{j=1}^N \delta_j \right\|_\infty \geq \left\| \sum_{j=1}^N \delta_j \right\|_2 = \left(\sum_{j=1}^N \|\delta_j\|_2^2 \right)^{1/2} \geq \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^N \|\delta_j\|_2.$$

Следовательно, теорема и следствие в случае, когда правая часть (3) или (4) имеет порядок $\sqrt{N}$ (т.е. при $\varepsilon \leq 1/2$ в следствии), дают неулучшаемые по порядку оценки наименьшей равномерной нормы тригонометрических полиномов из соответствующих классов. В общем случае вопрос о существовании подобных полиномов с меньшей равномерной нормой остается открыт.

Пример, построенный в теореме, доказывает невозможность обобщения в некоторых пределах неравенства Сидона в описанном ниже направлении. Напомним хорошо известное свойство лакунарных полиномов (неравенство Сидона)

$$\left\| \sum_{j=1}^N a_j \cos m_j x \right\|_{\infty} \geq c(q) \sum_{j=1}^N |a_j|$$

с некоторой $c(q) > 0$ при $m_{j+1}/m_j \geq q > 1$. Вопрос о возможном обобщении неравенства Сидона с заменой $a_j \cos m_j x$ на $p_j(x) \cos m_j x$, где p_j являются тригонометрическими полиномами как можно более высокой степени, был поставлен Кашиным и Темляковым [4], [5] (см. также [6]) в связи с оценкой энтропийных чисел некоторых классов функций. Дальнейшее продвижение в положительном ответе на этот вопрос было сделано Радомским [7], [2]. Однако настоящая работа дает жесткие границы возможностям положительно ответить на этот вопрос.

Схема доказательства теоремы следует конструкциям Григорьева [1], [8] и Радомского [2] с незначительными изменениями. Эта техника, придуманная в [1], может быть названа *методом псевдо-моментов остановки*, так как идея была позаимствована из стохастического анализа (см. пояснения в [8]).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. Уменьшив, если надо, d_j , мы без ограничения общности считаем, что $d_j \leq m_j$ при всех j .

Согласно знаменитому результату Карлесона и Ханта [9] L_2 -норма мажоранты тригонометрического полинома оценивается следующим образом:

$$\left\| \max_{0 \leq k \leq n} \left| \sum_{s=0}^k b_s e^{isx} \right| \right\|_2^2 \leq c_H \sum_{s=0}^n |b_s|^2 \quad (5)$$

с абсолютной константой $c_H > 0$.

Мы будем строить полиномы δ_j по индукции с константами

$$\alpha := 91, \quad \beta := 2\sqrt{2c_H}, \quad \gamma := 60. \quad (6)$$

Положим $\delta_1(x) := \exp(im_1 x)$. На каждом шаге индукции, чтобы определить δ_n при уже построенных на предыдущих шагах $\delta_1, \dots, \delta_{n-1}$, обозначим

$$S_j := \sum_{k=1}^j \delta_k$$

и положим

$$E_n^j := \{x \in [0, 2\pi) : |S_j(x)| > \beta\sqrt{n}\}, \quad (7)$$

$$B_n := \bigcup_{j=1}^{n-1} E_n^j, \quad (8)$$

$$\tilde{B}_n := \bigcup_{1 \leq j \leq n-a_n} O_{2\pi(n-j)^2/d_n}(E_n^j), \quad (9)$$

где

$$a_n := 45 + 30 \max_{1 \leq j \leq n} \log_q \rho_j, \quad (10)$$

$$\rho_j := \max\left(\frac{m_j}{d_j}, \frac{1}{\ln q}, 1\right) \equiv \max\left(\frac{m_j}{d_j}, \frac{1}{\ln q}\right), \quad (11)$$

а $O_\varepsilon(X)$ обозначает ε -окрестность множества X на полуинтервале $[0, 2\pi)$ с метрикой окружности. Заметим, что значение $n - a_n$ не обязательно цело или положительно. Если $n - a_n < 1$, объединение в (9) понимается как пустое множество. Аналогично ниже суммы вида $\sum_{1 \leq j \leq n - a_n}$ предполагаются равными нулю при $n - a_n < 1$.

Положим

$$\Lambda_n := \left\{ l \in \{1, \dots, d_n\} : 2\pi \frac{l}{d_n} \notin \tilde{B}_n \right\}; \quad (12)$$

$$\delta_n(x) := \frac{1}{d_n} \exp \left\{ i \left(m_n + \left\lfloor \frac{d_n - 1}{2} \right\rfloor \right) x \right\} \sum_{l \in \Lambda_n} K_{[(d_n - 1)/2]} \left(x - 2\pi \frac{l}{d_n} \right), \quad (13)$$

где

$$K_d(x) = \frac{2}{d+1} \left(\frac{\sin((1/2)(d+1)x)}{2 \sin(x/2)} \right)^2$$

– ядра Фейера. Очевидно, что такие δ_n удовлетворяют ограничениям на гармоники, предполагаемыми в (1).

Чтобы проверить предположение индукции, нам необходимо показать, что

$$|\Lambda_n| > \frac{1}{4} d_n. \quad (14)$$

По предположению индукции неравенства (2) выполнены для $\delta_1, \dots, \delta_{n-1}$. Применяя неравенство Чебышёва для мажоранты

$$S_{n-1}^* := \max_{1 \leq j \leq n-1} \left| \sum_{s=1}^j \delta_s(x) \right|$$

(см. (7), (8)), затем, используя (5), (2) и (6), получим

$$\mu B_n \leq \frac{2\pi \|S_{n-1}^*\|_2^2}{\beta^2 n} \leq \frac{2\pi c_H \|S_{n-1}\|_2^2}{\beta^2 n} \leq \frac{2\pi c_H}{\beta^2 n} \sum_{j=1}^{n-1} \|\delta_j\|_\infty^2 \leq \frac{2\pi c_H}{\beta^2 n} (n-1)2^2 < \pi. \quad (15)$$

Обозначим через $\text{Conn}(X)$ число компонент связности множества $X \subset [0, 2\pi)$ в топологии окружности. Заметим, что $|S_j|^2$ – вещественный тригонометрический полином степени не выше $2(m_j + 2[(d_j - 1)/2])$. Следовательно, уравнение $|S_j(x)|^2 = \beta^2 n$ имеет не более $4(m_j + 2[(d_j - 1)/2])$ корней. Заметим, что E_n^j является конечным объединением интервалов, концы которых являются корнями $|S_j(x)|^2 = \beta^2 n$. Поскольку $d_j \leq m_j$, получим

$$\text{Conn}(E_n^j) \leq \frac{1}{2} |\{x : |S_j(x)|^2 = \beta^2 n\}| \leq 2 \left(m_j + 2 \left\lfloor \frac{d_j - 1}{2} \right\rfloor \right) < 4m_j \quad (16)$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} \text{Conn}(\tilde{B}_n) &\leq \sum_{1 \leq j \leq n - a_n} \text{Conn}(E_n^j) < 4 \sum_{1 \leq j \leq n - a_n} m_j \leq 4 \sum_{1 \leq j \leq n - a_n} m_n q^{j-n} \\ &< 4m_n \sum_{s \geq a_n} q^{-s} = 4m_n q^{-[a_n]} \frac{q}{q-1}, \end{aligned}$$

где $\lceil x \rceil$ обозначает наименьшее целое число, большее или равное x . Принимая во внимание, что $a_n \leq \lceil a_n \rceil$, $\ln q \leq q - 1$, и используя (10), (11), мы продолжим следующим образом:

$$\begin{aligned} \text{Conn}(\tilde{B}_n) &< 4m_n q^{-a_n} \frac{q}{q-1} \leq 4m_n q^{-45} \rho_n^{-30} \frac{q}{q-1} \leq 4d_n \rho_n^{-29} \frac{q^{-44}}{q-1} \\ &\leq 4d_n \rho_n^{-29} \frac{q^{-44}}{\ln q} \leq 4d_n \rho_n^{-28} q^{-44}. \end{aligned}$$

Если $q \geq e^{1/2}$, то $q^{-44} \leq e^{-22}$. Если $q \leq e^{1/2}$, то $\rho_n^{-28} \leq (1/\ln q)^{-28} \leq 2^{-28}$. Получим

$$\text{Conn}(\tilde{B}_n) < 4d_n \max(2^{-28}, e^{-22}) < \frac{d_n}{16}. \quad (17)$$

Объединяя (15) и (16) (см. также (9)), получим

$$\begin{aligned} \mu \tilde{B}_n &\leq \mu B_n + 2 \sum_{1 \leq j \leq n-a_n} 2\pi \frac{(n-j)^2}{d_n} \text{Conn}(E_n^j) \leq \pi + 16\pi \sum_{1 \leq j \leq n-a_n} \frac{(n-j)^2}{d_n} m_j \\ &\leq \pi + 16\pi \sum_{1 \leq j \leq n-a_n} \frac{(n-j)^2}{d_n} m_n q^{j-n} = \pi + 16\pi \frac{m_n}{d_n} \sum_{a_n \leq s \leq n-1} s^2 q^{-s}. \end{aligned}$$

Чтобы продолжить оценку $\mu \tilde{B}_n$, мы используем неравенство

$$\sum_{s=a}^{\infty} s^2 q^{-s} \leq \frac{2a^2 q^{3-a}}{(q-1)^3} \quad \text{для } a = 1, 2, \dots$$

Это неравенство можно легко вывести из следующего тождества:

$$\sum_{s=a}^{\infty} s^2 q^{-s} = \frac{q^{3-a}}{(q-1)^3} (a^2 + q^{-1}(1 + 2a - 2a^2) + q^{-2}(a-1)^2)$$

для всех $q > 1$ и $a = 0, 1, \dots$, которое не очень трудно проверить.

Теперь продолжим оценку $\mu \tilde{B}_n$:

$$\mu \tilde{B}_n < \pi + 32\pi \frac{m_n}{d_n} \frac{\lceil a_n \rceil^2 q^{3-\lceil a_n \rceil}}{(q-1)^3} < \pi + 32\pi \frac{m_n}{d_n} \frac{\lceil a_n \rceil^2 q^{3-\lceil a_n \rceil}}{\ln^3 q}.$$

Функция $x^2 q^{-x}$ убывает при $x \geq 2/\ln q$. Можно легко проверить, что (см. (10), (11))

$$a_n \geq 45 + 30 \log_q \rho_n \geq \frac{2}{\ln q}.$$

Следовательно, мы можем заменить $\lceil a_n \rceil$ на $45 + 30 \log_q \rho_n$ в правой части в оценке $\mu \tilde{B}_n$ выше. Вспоминая (10) и (11) снова, продолжим следующим образом:

$$\begin{aligned} \mu \tilde{B}_n &< \pi + 32\pi \frac{m_n}{d_n} \frac{(45 + 30 \log_q \rho_n)^2 q^{-42} \rho_n^{-30}}{\ln^3 q} \leq \pi + 32\pi \rho_n^{-29} \frac{(45 + 30 \log_q \rho_n)^2 q^{-42}}{\ln^3 q} \\ &\leq \pi + 32\pi \rho_n^{-26} (45 + 30 \log_q \rho_n)^2 q^{-42} \leq \pi + 64\pi \rho_n^{-26} \left\{ 45^2 + 30^2 \left(\frac{\ln \rho_n}{\ln q} \right)^2 \right\} q^{-42} \\ &\leq \pi + 64\pi \{ 45^2 \rho_n^{-26} + 30^2 \rho_n^{-22} \} q^{-42}. \end{aligned}$$

Если $q \geq e^{1/2}$, то

$$\{45^2 \rho_n^{-26} + 30^2 \rho_n^{-22}\} q^{-42} \leq (45^2 + 30^2) e^{-21} < (64^2 + 64^2) 2^{-21} = 2^{-8}.$$

Если $q \leq e^{1/2}$, то $\rho_n \geq 1/\ln q \geq 2$ и

$$\{45^2 \rho_n^{-26} + 30^2 \rho_n^{-22}\} q^{-42} < 45^2 2^{-26} + 30^2 2^{-22} < 2^{-11}.$$

Наконец, получим

$$\mu \tilde{B}_n < \pi + 64\pi 2^{-8} = \frac{5}{4} \pi. \quad (18)$$

Теперь мы готовы доказать (14). Очевидно, число элементов Λ_n^c не превосходит числа интервалов вида $((2\pi l - \pi)/d_n, (2\pi l + \pi)/d_n)$, $l = 1, \dots, d_n$, пересекающихся с $\tilde{B}_n$ (см. (12)). Такие интервалы можно разбить на две группы: те, которые содержат граничную точку $\tilde{B}_n$, и те, которые полностью включены в $\tilde{B}_n$. Интервалов первого вида не более, чем $2 \text{Conn}(\tilde{B}_n) \leq d_n/8$ (см. (17)). Пусть V обозначает число интервалов второго вида. С помощью (18) получим

$$V \frac{2\pi}{d_n} \equiv V \mu \left(-\frac{\pi}{d_n}, \frac{\pi}{d_n} \right) \leq \mu \tilde{B}_n < \frac{5}{4} \pi.$$

Таким образом, имеем

$$|\Lambda_n| \geq d_n - V - \frac{d_n}{8} > d_n - \frac{5}{8} d_n - \frac{1}{8} d_n = \frac{1}{4} d_n.$$

Итак, мы доказали (14).

Наша следующая цель – проверить (2) для δ_n . Вспомним некоторые свойства ядер Фейера. Хорошо известно, что для всех $-\pi \leq x \leq \pi$ и $d = 1, 2, \dots$

$$K_{d-1}(x) \geq 0, \quad \|K_{d-1}\|_1 = \frac{1}{2}, \quad (19)$$

$$K_{d-1}(x) \leq \min\left(\frac{d}{2}, \frac{\pi^2}{2dx^2}\right) < 5 \min\left(d, \frac{1}{dx^2}\right). \quad (20)$$

Обозначим через $\text{dist}(x, y)$ стандартное расстояние на окружности между $x, y \in [0, 2\pi)$ и положим $\tilde{d}_n := [(d_n - 1)/2] + 1$. Ясно, что $1 \leq d_n/\tilde{d}_n \leq 2$. С помощью (13), (14), (19) и (20) проверим (2) следующим образом:

$$\begin{aligned} \|\delta_n\|_1 &= \frac{1}{d_n} \left\| \sum_{l \in \Lambda_n} K_{\tilde{d}_n-1} \left(x - 2\pi \frac{l}{d_n} \right) \right\|_1 = \frac{|\Lambda_n|}{d_n} \|K_{\tilde{d}_n-1}\|_1 \geq \frac{1}{8}, \\ \|\delta_n\|_\infty &= \frac{1}{d_n} \left\| \sum_{l \in \Lambda_n} K_{\tilde{d}_n-1} \left(x - 2\pi \frac{l}{d_n} \right) \right\|_\infty \leq \frac{1}{d_n} \left\| \sum_{l=1}^{d_n} \min\left(\frac{\tilde{d}_n}{2}, \frac{\pi^2}{2\tilde{d}_n \text{dist}(x, 2\pi l/d_n)^2}\right) \right\|_\infty \\ &\leq \frac{1}{d_n} \left(\tilde{d}_n + 2 \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\pi^2}{2\tilde{d}_n (2\pi s/d_n)^2} \right) = \frac{1}{d_n} \left(\tilde{d}_n + \frac{d_n^2}{4\tilde{d}_n} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{s^2} \right) = \frac{\tilde{d}_n}{d_n} + \frac{d_n}{4\tilde{d}_n} \frac{\pi^2}{6} < 2. \end{aligned}$$

Теперь, чтобы завершить доказательство, остается проверить (3) с константами (6), т.е. показать, что

$$|S_n(x)| \leq \alpha + \beta \sqrt{n} + \gamma \max_{1 \leq j \leq n} \log_q \max\left(\frac{m_j}{d_j}, \frac{1}{\ln q}, 1\right) \quad \text{для всех } x \in [0, 2\pi).$$

Положим

$$\tau(x) := \max\{t = 1, \dots, n-1 : |S_t(x)| \leq \beta\sqrt{n}\}.$$

Если $\tau(x) \geq n - a_n$, то с помощью (2), (10) и (11) получим

$$\begin{aligned} |S_n(x)| &\leq |S_{\tau(x)}(x)| + \sum_{t=\tau(x)+1}^n |\delta_t(x)| \leq \beta\sqrt{n} + 2a_n = \beta\sqrt{n} + 2(45 + 30 \max_{1 \leq j \leq n} \log_q \rho_j) \\ &= \alpha - 1 + \beta\sqrt{n} + \gamma \max_{1 \leq j \leq n} \log_q \max\left(\frac{m_j}{d_j}, \frac{1}{\ln q}, 1\right). \end{aligned}$$

Если $\tau(x) < n - a_n$, то

$$\begin{aligned} |S_n(x)| &\leq |S_{\tau(x)}(x)| + \sum_{t=\tau(x)+1}^{\tau(x)+a_n} |\delta_t(x)| + \sum_{t=\tau(x)+a_n+1}^n |\delta_t(x)| \\ &\leq \alpha - 1 + \beta\sqrt{n} + \gamma \max_{1 \leq j \leq n} \log_q \max\left(\frac{m_j}{d_j}, 1, \frac{1}{\ln q}\right) + \sum_{t=\tau(x)+a_n+1}^n |\delta_t(x)|. \quad (21) \end{aligned}$$

Остается оценить последнее слагаемое в (21). Так как $\tau(x) + a_n + 1 \leq t \leq n$ и $a_t \leq a_n$, имеем

$$x \in E_n^{\tau(x)+1} \subset E_t^{\tau(x)+1} \subset \tilde{B}_t$$

(см. (7), (9), (10)). Следовательно, по определению $\tilde{B}_t$ имеем

$$\inf_{y \in [0, 2\pi] \setminus \tilde{B}_t} \text{dist}(x, y) \geq \frac{2\pi}{d_t} |t - \tau(x) - 1|^2.$$

Далее, для каждого $l \in \Lambda_t$ получим (см. (12))

$$\text{dist}\left(x, 2\pi \frac{l}{d_t}\right) \geq \frac{2\pi}{d_t} |t - \tau(x) - 1|^2.$$

Пользуясь снова (20) и применяя тривиальные оценки

$$\sum_{s=K+1}^{\infty} s^{-2} < K^{-1} \quad \text{и} \quad \sum_{s=K}^{\infty} s^{-2} < 2K^{-1},$$

получим

$$\begin{aligned} |\delta_t(x)| &\leq \frac{1}{d_t} \sum_{l \in \Lambda_t} K_{\tilde{d}_t-1}\left(x - 2\pi \frac{l}{d_t}\right) \leq \frac{5}{d_t} \sum_{l \in \Lambda_t} \min\left(\tilde{d}_t, \frac{1}{\tilde{d}_t \text{dist}(x, 2\pi l/d_t)^2}\right) \\ &\leq 10 \sum_{s=|t-\tau(x)-1|^2}^{\infty} \frac{1}{\tilde{d}_t d_t (2\pi s/d_t)^2} = \frac{5d_t}{2\pi^2 \tilde{d}_t} \sum_{s=|t-\tau(x)-1|^2}^{\infty} \frac{1}{s^2} \\ &< \sum_{s=|t-\tau(x)-1|^2}^{\infty} \frac{1}{s^2} < \frac{2}{|t - \tau(x) - 1|^2}. \end{aligned}$$

Теперь мы можем оценить последнее слагаемое в (21) следующим образом:

$$\sum_{t=\tau(x)+a_n+1}^n |\delta_t(x)| < \sum_{t=\tau(x)+a_n+1}^n \frac{2}{|t - \tau(x) - 1|^2} < \sum_{s=a_n}^{\infty} \frac{2}{s^2} < \frac{2}{a_n - 1} < 1.$$

Подставляя последнюю оценку в (21), получим (3) для S_n . Теорема доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] П. Г. Григорьев, “Об одной последовательности тригонометрических полиномов”, *Матем. заметки*, **61**:6 (1997), 935–938.
- [2] А. О. Радомский, “О возможности усиления неравенств типа Сидона”, *Матем. заметки*, **94**:5 (2013), 792–795.
- [3] А. Зигмунд, *Тригонометрические ряды*, Мир, М., 1965.
- [4] Б. С. Кашин, В. Н. Темляков, “Об одной норме и связанных с ней приложениях”, *Матем. заметки*, **64**:4 (1998), 637–640.
- [5] Б. С. Кашин, В. Н. Темляков, “Об одной норме и аппроксимационных характеристиках классов функций многих переменных”, *Метрическая теория функций и смежные вопросы анализа*, ред. С. М. Никольский, Изд-во АФЦ, М., 1999, 69–99.
- [6] Б. С. Кашин, В. Н. Темляков, “Об одной норме и аппроксимационных характеристиках классов функций многих переменных”, *Теория функций*, СМФН, **25**, РУДН, М., 2007, 58–79.
- [7] А. О. Радомский, “Об одном неравенстве типа Сидона для тригонометрических полиномов”, *Матем. заметки*, **89**:4 (2011), 589–595.
- [8] П. Г. Григорьев, *Случайные и специальные полиномы по общим функциональным системам*, Дис. ... канд. физ.-матем. наук, МИАН, М., 2002.
- [9] R. A. Hunt, “On the convergence of Fourier series”, *Orthogonal Expansions and Their Continuous Analogues* (Edwardsville, IL, 1967), Southern Illinois Univ. Press, Carbondale, IL, 1968, 235–255.

П. Г. Григорьев

ООО “Теограком”, г. Москва

E-mail: thepavel@mail.ru

Поступило

24.07.2014

А. О. Радомский

Национальный исследовательский ядерный
университет “МИФИ”, г. Москва

E-mail: artrad@list.ru