Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. А. Бородин, О. Н. Косухин, Количественные выражения связности множеств в $\mathbb{R}^n$, *Матем. заметки*, 2015, том 98, выпуск 5, 643–650

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10612>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.210.77.194

26 апреля 2023 г., 02:20:07

Количественные выражения связности множеств в $\mathbb{R}^n$

П. А. Бородин, О. Н. Косухин

Доказывается, что для любых двух точек a и b связного множества $E \subset \mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$) и для любого $\varepsilon > 0$ в E найдутся такие точки $x_0 = a, x_2, \dots, x_p = b$, что

$$\|x_1 - x_0\|^n + \dots + \|x_p - x_{p-1}\|^n < \varepsilon.$$

Доказывается, что показатель n в этом утверждении уменьшить нельзя. Невозможность выбрать во множестве E указанную цепочку точек с

$$\|x_1 - x_0\|^\alpha + \dots + \|x_p - x_{p-1}\|^\alpha < \varepsilon$$

для некоторого $\alpha \in (1, n)$ оказывается эквивалентной существованию непостоянной функции $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ из класса $\text{Lip}_\alpha(E)$. Для каждого такого α в $\mathbb{R}^n$ строится такая кривая $E(\alpha)$ хаусдорфовой размерности α и такая непостоянная функция $f: E(\alpha) \rightarrow \mathbb{R}$, что $f \in \text{Lip}_\alpha(E(\alpha))$.

Библиография: 3 названия.

DOI: 10.4213/mzm10612

Для произвольного натурального n обозначим через $\|\cdot\|$ обычную евклидову норму в пространстве $\mathbb{R}^n$.

В [1] было доказано утверждение: для всякого связного множества $E \subset \mathbb{R}^2$, для любых $a, b \in E$ и для любого $\varepsilon > 0$ в E найдутся такие точки $x_0 = a, x_1, \dots, x_p = b$, что

$$\sum_{k=1}^p \|x_k - x_{k-1}\|^2 < \varepsilon.$$

Это свойство применяется при исследовании выпуклости аддитивных полугрупп в банаховых пространствах [1], [2].

Цель настоящей работы – обобщить это утверждение на связные множества $E \subset \mathbb{R}^n$ с заменой $\sum_{k=1}^p \|x_k - x_{k-1}\|^2$ на $\sum_{k=1}^p \|x_k - x_{k-1}\|^n$ (теорема 1), доказать, что показатель n нельзя уменьшить (следствие 2), установить связь между наличием точек x_k с $\sum_{k=1}^p \|x_k - x_{k-1}\|^\alpha < \varepsilon$ и наличием непостоянных функций $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ из класса Lip_α (теорема 2), а также доказать существование таких функций на множествах E специального вида (теорема 3).

Работа первого автора выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты №№ 14-01-00510, 14-01-91158, 15-01-08335), Программы Президента РФ поддержки ведущих научных школ (грант № НШ-3682.2014.1) и фонда Дмитрия Зимина “Династия”; работа второго автора выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 15-01-08335).

ТЕОРЕМА 1. Пусть E – связное множество в $\mathbb{R}^n$, $n > 1$. Для любых двух точек $a, b \in E$ и для любого $\varepsilon > 0$ в E найдутся такие точки $x_0 = a, x_2, \dots, x_p = b$, что

$$\sum_{k=1}^p \|x_k - x_{k-1}\|^n < \varepsilon.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Можно считать, что E замкнуто (если указанные точки $x_1, \dots, x_p$ найдутся в замыкании E , то найдутся и в E) и ограничено (заданные точки a и b содержатся в ограниченной связной части множества E).

Итак, пусть E – связный компакт в $\mathbb{R}^n$ и $a, b \in E$.

Пусть n -мерная мера Лебега $\text{mes}_n E$ равна числу $\eta \geq 0$. Если замостить все пространство $\mathbb{R}^n$ замкнутыми клетками-кубами со стороной δ , а затем выбрать те N из них, которые содержат точки из E , то при достаточно малом $\delta < \varepsilon$ сумма $N\delta^n$ объемов выбранных кубов удовлетворяет неравенству $N\delta^n < \eta + \varepsilon^{2n}$ (здесь существенно то, что E – компакт). Разобьем выбранные N кубов на два типа. К первому типу отнесем кубы Δ , удовлетворяющие неравенству $\text{mes}_n(\Delta \cap E) \leq \delta^n(1 - \varepsilon^n)$, а остальные отнесем ко второму типу. Для числа N_1 кубов первого типа имеем

$$\eta = \text{mes}_n E \leq (N - N_1)\delta^n + N_1\delta^n(1 - \varepsilon^n) = N\delta^n - N_1\delta^n\varepsilon^n < \eta + \varepsilon^{2n} - N_1\delta^n\varepsilon^n,$$

откуда $N_1 < \varepsilon^n / \delta^n$.

В силу связности множества E среди выбранных кубов найдутся такие кубы $\Delta_0, \dots, \Delta_m$, что $\Delta_0 \ni a$, $\Delta_m \ni b$ и каждые два куба Δ_{k-1} и Δ_k имеют по крайней мере одну общую вершину.

Построим теперь требуемую цепочку точек $x_0 = a, x_1, \dots, x_p = b$, последовательно выбирая по одной или по несколько этих точек в кубах $\Delta_1, \dots, \Delta_{m-1}$. Если куб Δ_1 первого типа, то в качестве x_1 возьмем любую точку из пересечения $\Delta_1 \cap E$, и очередную точку x_2 будем искать уже в Δ_2 . Если же куб Δ_1 имеет второй тип, то разобьем его на $1/\varepsilon^n$ маленьких кубов со стороной $\delta\varepsilon$ (здесь без ограничения общности считаем $1/\varepsilon$ натуральным числом). Эти маленькие кубы имеют объемы по $\delta^n\varepsilon^n$, поэтому в каждом из них есть точки из E (напомним, $\text{mes}_n(E \cap \Delta_1) > \delta^n(1 - \varepsilon^n)$). Выберем наименьшую по количеству цепочку маленьких кубов, в которой каждые два соседних куба граничат по грани какой-либо размерности, первый куб в цепочке – ближайший к точке $x_0 = a \in \Delta_0$, а последний куб в цепочке хотя бы одной вершиной касается большого куба Δ_2 . Нетрудно видеть, что число q маленьких кубов в такой цепочке не превосходит $1/\varepsilon$. Выбираем точки $x_1, \dots, x_q \in E$ последовательно в маленьких кубах выбранной цепочки, а очередную точку x_{q+1} будем искать уже в Δ_2 . Продолжая так далее, строим всю последовательность $x_1, \dots, x_{p-1}$, выбирая в каждом очередном кубе Δ_k либо одну точку – если он первого типа, либо не более чем $1/\varepsilon$ точек – если он второго типа.

Если точка x_j выбрана в кубе Δ_k первого типа, то оба расстояния $\|x_j - x_{j-1}\|$ и $\|x_{j+1} - x_j\|$ не превосходят $2\sqrt{n}\delta$, а если набор точек $x_{j+1}, \dots, x_{j+q}$ выбран в одном и том же кубе Δ_k второго типа, то $\|x_{j+s+1} - x_{j+s}\| \leq 2\sqrt{n}\delta\varepsilon$, $s = 1, \dots, q-1$, где $q = q(k) \leq 1/\varepsilon$. Поэтому

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^p \|x_j - x_{j-1}\|^n \\ & \leq \|x_1 - a\|^n + \|b - x_{p-1}\|^n + N_1 \cdot 2 \cdot (2\sqrt{n}\delta)^n + (N - N_1) \cdot \left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \cdot (2\sqrt{n}\delta\varepsilon)^n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq (2\sqrt{n}\delta)^n + (2\sqrt{n}\delta)^n + \frac{\varepsilon^n}{\delta^n} 2^{n+1} n^{n/2} \delta^n + N \frac{1}{\varepsilon} 2^n n^{n/2} \delta^n \varepsilon^n \\ &\leq C_1 \delta^n + C_2 \varepsilon^n + C_3 (\eta + \varepsilon^{2n}) \varepsilon^{n-1} < C_4 \varepsilon^{n-1}, \end{aligned}$$

где константы C_1, C_2, C_3 зависят только от n , а константа C_4 — от n и η .

Теорема доказана.

Пусть $n \in \mathbb{N}$, $E \subset \mathbb{R}^n$, $\alpha > 0$. Обозначим через $\text{Lip}_\alpha(E)$ класс всех действительных функций f , определенных на множестве E , для каждой из которых существует такое число $C = C(f) > 0$, что $|f(x) - f(y)| \leq C\|x - y\|^\alpha$ при всех $x, y \in E$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть E — связное подмножество $\mathbb{R}^n$, $n > 1$, $\alpha \in (1; n]$. Следующие условия эквивалентны:

- (1) для любых $a, b \in E$ и любого $\varepsilon > 0$ существует такой набор точек $x_0 = a, x_1, x_2, \dots, x_p = b$ из E , что выполнено неравенство $\sum_{k=1}^p \|x_k - x_{k-1}\|^\alpha < \varepsilon$;
- (2) всякая функция из класса $\text{Lip}_\alpha(E)$ постоянна на E .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что из (1) следует (2). Пусть $a, b \in E$, $\varepsilon > 0$, $x_0 = a, x_1, x_2, \dots, x_p = b$ — набор точек из E , для которого $\sum_{k=1}^p \|x_k - x_{k-1}\|^\alpha < \varepsilon$. Пусть также $f \in \text{Lip}_\alpha(E)$, а число $C > 0$ таково, что

$$|f(x) - f(y)| \leq C\|x - y\|^\alpha \quad \text{при всех } x, y \in E.$$

Тогда

$$\begin{aligned} |f(a) - f(b)| &\leq |f(x_0) - f(x_1)| + |f(x_1) - f(x_2)| + \dots + |f(x_{p-1}) - f(x_p)| \\ &\leq C \cdot (\|x_0 - x_1\|^\alpha + \|x_1 - x_2\|^\alpha + \dots + \|x_{p-1} - x_p\|^\alpha) < C\varepsilon. \end{aligned}$$

В силу произвольности числа $\varepsilon > 0$ получаем $f(a) = f(b)$. Следовательно, функция f постоянна на E .

Пусть теперь условие (1) не выполнено. Тогда найдутся такие $a, b \in E$ и $\varepsilon_0 > 0$, что для любого набора точек $x_0 = a, x_1, x_2, \dots, x_p = b$ из E выполнено неравенство $\sum_{k=1}^p \|x_k - x_{k-1}\|^\alpha \geq \varepsilon_0$. Для любого $x \in E$ положим

$$f(x) := \inf \left\{ \sum_{k=1}^p \|x_k - x_{k-1}\|^\alpha : x_0, x_1, x_2, \dots, x_p \in E, x_0 = a, x_p = x \right\}.$$

Имеем $f(a) = 0$, $f(b) \geq \varepsilon_0 > 0$. Следовательно, эта функция непостоянна на E . Если $x, y \in E$, то

$$\begin{aligned} f(y) &\leq \inf \left\{ \sum_{k=1}^p \|x_k - x_{k-1}\|^\alpha : x_0, x_1, x_2, \dots, x_p \in E, x_0 = a, x_{p-1} = x, x_p = y \right\} \\ &= f(x) + \|x - y\|^\alpha. \end{aligned}$$

Аналогично получаем $f(x) \leq f(y) + \|x - y\|^\alpha$. Следовательно,

$$|f(x) - f(y)| \leq \|x - y\|^\alpha \quad \text{при всех } x, y \in E.$$

Значит, $f \in \text{Lip}_\alpha(E)$ и условие (2) не выполнено.

СЛЕДСТВИЕ 1. Для любого натурального $n \geq 2$ и любого связного множества $E \subset \mathbb{R}^n$ всякая функция из класса $\text{Lip}_n(E)$ постоянна на E .

Пусть $n \in \mathbb{N}$. Для любых $x_0 \in \mathbb{R}^n$ и $r > 0$ обозначим через $B(x_0, r)$ шар $\{x : x \in \mathbb{R}^n, \|x - x_0\| < r\}$. Пусть также E – произвольное ограниченное множество в $\mathbb{R}^n$. Напомним (см., например, [3; гл. 1, § 7]), что хаусдорфовой размерностью $\dim_H(E)$ множества E называется величина

$$\inf \left\{ \delta > 0 : \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} r_j^\delta : E \subset \bigcup_j B(x_j, r_j), x_j \in \mathbb{R}^n, r_j < \varepsilon \quad \forall j \right\} = 0 \right\}.$$

При $\dim_H(E) > 0$ также имеет место равенство

$$\dim_H(E) = \sup \left\{ \delta > 0 : \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} r_j^\delta : E \subset \bigcup_j B(x_j, r_j), x_j \in \mathbb{R}^n, r_j < \varepsilon \quad \forall j \right\} = +\infty \right\}.$$

ТЕОРЕМА 3. Для любого натурального $n \geq 2$ и любого $\alpha \in (1; n)$ в $\mathbb{R}^n$ существуют такая кривая $E = E(\alpha)$ хаусдорфовой размерности α и такая непостоянная функция $f : E \rightarrow \mathbb{R}$, что $f \in \text{Lip}_\alpha(E)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $c = 2^{-n/\alpha}$. Тогда $c \in (0, 1/2)$, $0 < 1 - 2c < 1$. Положим также $\Delta_0(c) := [0, 1]$. При $j = 0, 1, 2, \dots$ обозначим через $\Delta_{j+1}(c)$ множество, получаемое из множества $\Delta_j(c)$ удалением 2^j интервалов длины $(1 - 2c)c^j$, с теми же центрами, что и у составляющих $\Delta_j(c)$ отрезков. Определим K_c как пересечение всех множеств $\Delta_j(c)$, $j = 0, 1, 2, \dots$.

Введем в $\mathbb{R}^n$ декартову систему координат $Ox^1x^2 \dots x^n$ и при каждом $j = 0, 1, \dots$ положим

$$Q_j(c) := \Delta_j^n(c) = \Delta_j(c) \times \dots \times \Delta_j(c).$$

Тогда

$$Q := Q_0(c) = \{x = (x^1; x^2; \dots; x^n) \in \mathbb{R}^n : 0 \leq x^j \leq 1, j = 1, 2, \dots, n\}$$

– единичный куб, а множества $Q_j(c)$ при $j = 1, 2, \dots$ представляют собой объединение 2^{nj} непересекающихся кубов с параллельными осям координат ребрами длины c^j . Положим

$$Q_c = K_c^n = K_c \times \dots \times K_c = \bigcap_{j=0}^{\infty} Q_j(c).$$

Докажем по индукции, что для любого натурального n существует конечная последовательность $\{a_m(n)\}$ ($m = 1, 2, \dots, 2^n$), составленная из всех взятых по одному разу двоичных кодов длины n , которая начинается с кода $000 \dots 0$, заканчивается кодом $100 \dots 0$ и обладает тем свойством, что любые два соседних кода отличаются ровно в одной цифре.

При $n = 1$ это последовательность $0, 1$. Пусть существование такой последовательности $\{a_m(n)\}$ доказано при $n = k$. Обозначим через $\{b_m(k)\}$ последовательность, полученную из $\{a_m(k)\}$ в результате записывания ее членов в обратном порядке. Припишем слева к каждому коду последовательности $\{a_m(k)\}$ цифру 0, а к каждому коду последовательности $\{b_m(k)\}$ – цифру 1. Запишем вторую из полученных

последовательностей сразу после первой из них. Нетрудно видеть, что образованная таким образом последовательность из 2^{k+1} двоичных кодов длины $k+1$ обладает всеми необходимыми свойствами.

Пусть I_0 и I_1 – соответственно левый и правый отрезки, составляющие множество $\Delta_1(c)$. Для любого двоичного кода $d_1d_2\dots d_n$ длины n (при любом $j = 1, 2, \dots, n$ либо $d_j = 0$, либо $d_j = 1$) обозначим через $P(d_1d_2\dots d_n)$ куб $I_{d_1} \times I_{d_2} \times \dots \times I_{d_n}$. Для любого $m = 1, 2, \dots, 2^n$ положим $P_m := P(a_m(n))$. Заметим, что $Q_1(c) = \bigsqcup_{m=1}^{2^n} P_m$ и любые два куба с индексами m и $m+1$ из этого объединения отличаются ровно одним отрезком-множителем в определяющих эти кубы декартовых произведениях.

Выберем в кубе Q последовательность точек $\{A_p\}_{p=1}^{2^{n+1}}$, удовлетворяющую следующим условиям:

- (а) точка A_1 имеет координаты $(0; 0; \dots; 0)$, точка $A_{2^{n+1}}$ имеет координаты $(1; 0; \dots; 0)$;
- (б) для любого $m = 1, 2, \dots, 2^n$ точки A_{2m-1} , A_{2m} – смежные вершины куба P_m ;
- (в) для любого $m = 1, 2, \dots, 2^n - 1$ отрезок $A_{2m}A_{2m+1}$ имеет длину $(1 - 2c)$ и параллелен одной из осей координат.

Выберем сначала по индукции точки A_p при $p = 1, 2, \dots, 2^n + 1$. Точка A_1 однозначно определена в условии (а). Пусть для некоторого $m = 1, 2, \dots, 2^{n-1}$ точка A_{2m-1} , удовлетворяющая всем этим условиям, уже выбрана. В качестве точки A_{2m} выберем смежную с ней вершину куба P_m , лежащую на ближайшей к кубу P_{m+1} грани куба P_m (если такая вершина не единственна, выберем любую из таких вершин), а в качестве точки A_{2m+1} – ближайшую к точке A_{2m} вершину куба P_{m+1} . Нетрудно видеть, что эти новые точки также удовлетворяют всем перечисленным выше условиям. Таким образом, последовательность $\{A_p\}$ при $p = 1, 2, \dots, 2^n + 1$ построена.

Заметим, что по построению коды $a_{2^{n-1}}(n)$ и $a_{2^{n-1}+1}(n)$ соответственно равны $010\dots 0$ и $110\dots 0$, т.е. отличаются лишь первой цифрой. Следовательно, кубы $P_{2^{n-1}}$ и $P_{2^{n-1}+1}$ симметричны относительно гиперплоскости $x^1 = 0,5$. Значит, точки A_{2^n} и A_{2^n+1} также симметричны относительно этой гиперплоскости. Выберем теперь точки $\{A_p\}$ при всех $p = 2^n + 2, \dots, 2^{n+1}$ симметрично точкам $A_{2^{n+1}-p+1}$ относительно этой гиперплоскости. Нетрудно видеть, что эти новые точки также удовлетворяют всем перечисленным выше условиям. Построение последовательности $\{A_p\}_{p=1}^{2^{n+1}}$ закончено.

Для любого $k \in \mathbb{N}$ определим по индукции функцию g_k . Пусть функция $g_1 : [0; 1] \mapsto \mathbb{R}^n$ для любого $p = 1, 2, \dots, 2^{n+1} - 1$ линейна на каждом из отрезков

$$S_p = \left[\frac{p-1}{2^{n+1}-1}; \frac{p}{2^{n+1}-1} \right]$$

и имеет место равенство $g_1((p-1)/(2^{n+1}-1)) = A_p$, а также равенство $g_1(1) = A_{2^{n+1}}$.

Пусть теперь $k \geq 2$. Для любого $m = 1, 2, \dots, 2^n$ в пространстве $\mathbb{R}^n$ существует такое преобразование подобия с коэффициентом c , что при этом преобразовании куб Q переходит в куб P_m , а точки A_1 и $A_{2^{n+1}}$ – в точки A_{2m-1} и A_{2m} соответственно. При каждом таком m обозначим через F_m одно из таких преобразований (F_m не зависит от k). Положим $g_k(t) = g_1(t)$ при всех $t \in S_p$, где p четно, и

$$g_k(t) = F_m(g_{k-1}((2^{n+1}-1)t - 2(m-1)))$$

при всех $t \in S_{2m-1}$, $m = 1, 2, \dots, 2^n$.

Нетрудно видеть, что все функции g_k непрерывны на отрезке $[0; 1]$ и при всех натуральных k имеет место равенство

$$\|g_{k+2} - g_{k+1}\| = c \cdot \|g_{k+1} - g_k\|$$

(равномерная норма). Следовательно, функциональная последовательность $\{g_k\}$ является фундаментальной в равномерной норме на отрезке $[0; 1]$ и имеет равномерный предел при $k \rightarrow +\infty$ на этом отрезке. Обозначим предельную функцию через g , а кривую $g([0; 1])$ через $E = E_\alpha$.

Определим функцию $f: E_\alpha \rightarrow \mathbb{R}$. Пусть сначала $x \in Q_c \subset E_\alpha$. Тогда $x \in P_m$ для некоторого натурального $m = m(x) \leq 2^n$. Обозначим через $c_1 = c_1(x)$ число $m - 1$. Для каждого натурального $j \geq 2$ определим по индукции величину $c_j = c_j(x)$ равенством $c_j = c_{j-1}(F_m^{-1}(x))$. Положим

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k 2^{-kn}.$$

Заметим, что при таком определении для любого $p = 1, 2, \dots, 2^n - 1$ значения

$$f(A_{2p}) = (p-1)2^{-n} + \sum_{k=2}^{\infty} (2^n - 1)2^{-nk} \quad \text{и} \quad f(A_{2p+1}) = p2^{-n}$$

совпадают. Следовательно, совпадают и значения функции f в любых двух точках множества Q_c , соединенных отрезком из E .

Для $x \in E_\alpha \setminus Q_c$ положим $f(x) = \sup\{f(x') : x' \in Q_c \cap g([0; g^{-1}(x)])\}$. Определенная таким образом функция f является постоянной на каждом подотрезке кривой E .

Так как

$$f(A_1) = 0 = \min\{f(x) : x \in E\}, \quad f(A_{2^n+1}) = 1 = \max\{f(x) : x \in E\},$$

функция f не является постоянной на E . Покажем, что при любых различных $x_1, x_2 \in E$ имеет место неравенство

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq (1 - 2c)^{-\alpha} \|x_1 - x_2\|^\alpha,$$

т.е. функция f принадлежит классу $\text{Lip}_\alpha(E)$.

Пусть сначала $x_1, x_2 \in Q_c \subset E_\alpha$. Если $c_1(x_1) \neq c_1(x_2)$ (т.е. x_1, x_2 принадлежат разным кубам P_m), то

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq 1 = (1 - 2c)^{-\alpha} (1 - 2c)^\alpha \leq (1 - 2c)^{-\alpha} \|x_1 - x_2\|^\alpha.$$

Если $c_1(x_1) = c_1(x_2)$, то найдется такое натуральное число j , что $c_1(x_1) = c_1(x_2), \dots, c_j(x_1) = c_j(x_2), c_{j+1}(x_1) \neq c_{j+1}(x_2)$. При $r = 1, 2$ положим

$$x'_r = F_{c_{j+1}}^{-1} \circ F_{c_{j-1}+1}^{-1} \circ \dots \circ F_{c_1+1}^{-1}(x_r) \in Q_c.$$

Тогда $c_l(x'_r) = c_{l+j}(x_r)$ при всех таких r и всех натуральных l . Отсюда получаем, что

$$\begin{aligned} |f(x_1) - f(x_2)| &= 2^{-jn} |f(x'_1) - f(x'_2)| = c^{j\alpha} |f(x'_1) - f(x'_2)| \\ &\leq c^{j\alpha} (1 - 2c)^{-\alpha} \|x'_1 - x'_2\|^\alpha = (1 - 2c)^{-\alpha} \|x_1 - x_2\|^\alpha. \end{aligned}$$

Пусть теперь $x_1 \in E \setminus Q_c$, $x_2 \in Q_c$. Тогда множество $\{x : f(x) = f(x_1)\}$ представляет собой параллельный одной из осей координат отрезок $\Delta(x_1)$ с концами из Q_c , ортогональная проекция которого на эту ось координат пересекается с множеством K_c лишь по двум концевым точкам. Следовательно, один из двух концов отрезка $\Delta(x_1)$ расположен в пространстве $\mathbb{R}^n$ ближе к точке x_2 , чем точка x_1 . Обозначим этот конец через $\tilde{x}_1$. Тогда

$$|f(x_1) - f(x_2)| = |f(\tilde{x}_1) - f(x_2)| \leq (1 - 2c)^{-\alpha} \|\tilde{x}_1 - x_2\|^\alpha \leq (1 - 2c)^{-\alpha} \|x_1 - x_2\|^\alpha.$$

Случай, когда $x_1 \in Q_c$, $x_2 \in E \setminus Q_c$, аналогичен рассмотренному случаю.

Пусть, наконец, $x_1, x_2 \in E \setminus Q_c$. Если отрезки $\Delta(x_1)$ и $\Delta(x_2)$ параллельны, то их ортогональные проекции на координатную ось, которой они параллельны, либо совпадают, либо не пересекаются. Значит, найдутся такой конец $\tilde{x}_1 \in Q_c$ первого из этих отрезков и такой конец $\tilde{x}_2 \in Q_c$ второго из них, что $\|\tilde{x}_1 - \tilde{x}_2\| \leq \|x_1 - x_2\|$. Отсюда получаем

$$|f(x_1) - f(x_2)| = |f(\tilde{x}_1) - f(\tilde{x}_2)| \leq (1 - 2c)^{-\alpha} \|\tilde{x}_1 - \tilde{x}_2\|^\alpha \leq (1 - 2c)^{-\alpha} \|x_1 - x_2\|^\alpha.$$

Если отрезки $\Delta(x_1)$ и $\Delta(x_2)$ перпендикулярны, то ортогональная проекция каждого из этих отрезков на прямую, содержащую другой из них, представляет собой точку, не лежащую во внутренности этого отрезка. Следовательно, как и в предыдущем случае, найдутся такой конец $\tilde{x}_1 \in Q_c$ первого из них и такой конец $\tilde{x}_2 \in Q_c$ второго из них, что $\|\tilde{x}_1 - \tilde{x}_2\| \leq \|x_1 - x_2\|$. Далее аналогично предыдущему случаю.

Неравенство

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq (1 - 2c)^{-\alpha} \|x_1 - x_2\|^\alpha$$

доказано при всех различных $x_1, x_2 \in E$.

Покажем теперь, что кривая E имеет хаусдорфову размерность α . Нетрудно видеть, что $\dim_H(E \setminus Q_s) = 1$. Поэтому $\dim_H(E) = \max\{\dim_H(Q_s), 1\}$. Пусть ε – произвольное положительное число, множество $M_1 = \{B(x_j, r_j)\}_{j=1}^\infty$ – какое-либо покрытие множества Q_s шарами с радиусами, меньшими ε . Тогда множество

$$M_2 = \{B(F_m(x_j), r_{j,m}) = F_m(B(x_j, r_j)) : j = 1, 2, \dots, \infty, m = 1, 2, \dots, 2^n\}$$

является покрытием множества Q_s шарами с радиусами, меньшими $c\varepsilon$. При этом

$$\sum_{j=1}^\infty \sum_{m=1}^{2^n} r_{j,m}^\alpha = \sum_{j=1}^\infty \sum_{m=1}^{2^n} c^\alpha r_j^\alpha = \sum_{j=1}^\infty r_j^\alpha.$$

Следовательно,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \inf \left\{ \sum_{j=1}^\infty r_j^\alpha : Q_s \subset \bigcup_j B(x_j, r_j), x_j \in \mathbb{R}^n, r_j < \varepsilon \quad \forall j \right\} < +\infty.$$

Отсюда получаем, что $\dim_H(Q_s) \leq \alpha$ и $\dim_H(E) \leq \alpha$.

По доказанному выше для множества E не выполнено условие (2) теоремы 2. Следовательно, не выполнено и условие (1) этой теоремы. Значит, существуют такое число $\varepsilon_0 > 0$ и такие точки $a, b \in E$, что для любого набора точек $x_0 = a, x_1, x_2, \dots, x_p = b$ из E , выполнено неравенство $\sum_{k=1}^p \|x_k - x_{k-1}\|^\alpha \geq \varepsilon_0$. Нетрудно видеть, что

для всякого покрытия $\{B(x'_j, r_j)\}_{j=1}^\infty$ множества E можно выбрать такой конечный набор попарно различных шаров $\{B(\tilde{x}_k, \tilde{r}_k)\}_{k=1}^p$ из этого покрытия и такой набор точек $x_0 = a, x_1, x_2, \dots, x_p = b$ из E , что $x_{k-1}, x_k \in B(\tilde{x}_k, \tilde{r}_k)$ при всех $k = 1, 2, \dots, p$. Поэтому

$$2^\alpha \sum_{j=1}^\infty r_j^\alpha \geq \sum_{k=1}^p (2\tilde{r}_k)^\alpha > \sum_{k=1}^p \|x_k - x_{k-1}\|^\alpha \geq \varepsilon_0.$$

Следовательно,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \inf \left\{ \sum_{j=1}^\infty r_j^\alpha : E \subset \bigcup_j B(x_j, r_j), x_j \in \mathbb{R}^n, r_j < \varepsilon \quad \forall j \right\} \geq \varepsilon_0 2^{-\alpha} > 0$$

и $\dim_H(E) \geq \alpha$.

Равенство $\dim_H(E) = \alpha$ и теорема 3 доказаны полностью.

Из теорем 2 и 3 вытекает

СЛЕДСТВИЕ 2. Показатель n в теореме 1 уменьшить нельзя.

Теорема 1 доказана П. А. Бородиным, теоремы 2 и 3 доказаны О. Н. Косухиным.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] П. А. Бородин, “Приближение наимпростейшими дробями с ограничением на полюсы”, *Матем. сб.*, **203**:11 (2012), 23–40.
- [2] П. А. Бородин, “Плотность полугруппы в банаховом пространстве”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **78**:6 (2014), 21–48.
- [3] Д. Ю. Бураго, Ю. Д. Бураго, С. В. Иванов, *Курс метрической геометрии*, ИКИ, М.–Ижевск, 2004.

П. А. Бородин

Московский государственный университет
имени М.В.Ломоносова
E-mail: pborodin@inbox.ru

Поступило

30.10.2014

Исправленный вариант

25.03.2015

О. Н. Косухин

Московский государственный университет
имени М.В.Ломоносова
E-mail: kosuhin_oleg@mail.ru