Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Н. Миронов, Л. Б. Миронова, Об инвариантах Лапласа для уравнения с доминирующей частной производной третьего порядка с двумя независимыми переменными, *Матем. заметки*, 2016, том 99, выпуск 1, 89–96

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10613>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.209.52.79

26 апреля 2023 г., 13:27:22

Об инвариантах Лапласа для уравнения с доминирующей частной производной третьего порядка с двумя независимыми переменными

А. Н. Миронов, Л. Б. Миронова

Построены инварианты Лапласа, в терминах которых записаны определяющие уравнения. Выделены классы уравнений, допускающих четырехмерные алгебры Ли.

Библиография: 12 названий.

DOI: 10.4213/mzm10613

Приложения инвариантов Лапласа уравнения

$$u_{xy} + a(x, y)u_x + b(x, y)u_y + c(x, y)u = 0 \quad (1)$$

широко известны и изложены, в частности, в работах [1; с. 116–125], [2], [3; с. 175–186].

В данной работе построены инварианты Лапласа для уравнения

$$L(u) \equiv u_{xxy} + a_{20}(x, y)u_{xx} + a_{11}(x, y)u_{xy} + a_{10}(x, y)u_x + a_{01}(x, y)u_y + a_{00}(x, y)u = 0, \quad (2)$$

а также указаны некоторые приложения этих инвариантов.

В работе [4] построены инварианты Лапласа для трехмерного аналога уравнения (1) (уравнения Бианки третьего порядка), а также обсуждается возможность построения аналогов инвариантов Лапласа для (2) путем факторизации дифференциального оператора. Здесь используется другой подход, основанный на линейном преобразовании функции u . Некоторые приложения инвариантов Лапласа для уравнения Бианки третьего порядка указаны в статье [5].

Уравнение (2) с различных точек зрения исследовалось в [6]–[8]. Оно относится к одному из канонических видов, выделенных в [9]. Отметим еще, что частным случаем (2) является уравнение Аллера

$$u_t = (au_x + bu_{xt})_x,$$

встречающееся при моделировании процесса переноса влаги в почве [10], [11; пп. 1.5 и 9.6].

Инвариантами Лапласа называют инварианты преобразования

$$u = \lambda(x, y)v, \quad (3)$$

где v – новая неизвестная функция. Указанные инварианты для уравнения (2) имеют вид

$$\begin{aligned} h_1 &= 2a_{20x} + a_{20}a_{11} - a_{10}, & h_2 &= a_{11y} + a_{20}a_{11} - a_{10}, & h_3 &= a_{11x} + \frac{a_{11}^2}{2} - 2a_{01}, \\ h_4 &= 2a_{20xx} - a_{20}a_{11}^2 + 2a_{20}a_{01} + a_{11}a_{10} - 2a_{00}, \\ h_5 &= a_{11xy} - a_{20}a_{11}^2 + 2a_{20}a_{01} + a_{11}a_{10} - 2a_{00}. \end{aligned} \quad (4)$$

Действительно, преобразование (3) приводит (2) к виду

$$v_{xxy} + b_{20}(x, y)v_{xx} + b_{11}(x, y)v_{xy} + b_{10}(x, y)v_x + b_{01}(x, y)v_y + b_{00}(x, y)v = 0, \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned} b_{20} &= \frac{\lambda_y}{\lambda} + a_{20}, & b_{11} &= 2\frac{\lambda_x}{\lambda} + a_{11}, & b_{10} &= 2\frac{\lambda_{xy}}{\lambda} + 2a_{20}\frac{\lambda_x}{\lambda} + a_{11}\frac{\lambda_y}{\lambda} + a_{10}, \\ b_{01} &= \frac{\lambda_{xx}}{\lambda} + a_{11}\frac{\lambda_x}{\lambda} + a_{01}, & b_{00} &= \frac{1}{\lambda}L(\lambda). \end{aligned} \quad (6)$$

Имеют место соотношения

$$\begin{aligned} \frac{\lambda_x}{\lambda} &= (\ln \lambda)_x, & \frac{\lambda_y}{\lambda} &= (\ln \lambda)_y, \\ \frac{\lambda_{xy}}{\lambda} &= (\ln \lambda)_{xy} + (\ln \lambda)_x(\ln \lambda)_y, & \frac{\lambda_{xx}}{\lambda} &= (\ln \lambda)_{xx} + ((\ln \lambda)_x)^2, \\ \frac{\lambda_{xxy}}{\lambda} &= (\ln \lambda)_{xxy} + 2(\ln \lambda)_x(\ln \lambda)_{xy} + (\ln \lambda)_{xx}(\ln \lambda)_y + ((\ln \lambda)_x)^2(\ln \lambda)_y. \end{aligned}$$

С учетом этих соотношений формулы (6) принимают вид

$$\begin{aligned} b_{20} &= (\ln \lambda)_y + a_{20}, & b_{11} &= 2(\ln \lambda)_x + a_{11}, \\ b_{10} &= 2(\ln \lambda)_{xy} + 2(\ln \lambda)_x(\ln \lambda)_y + 2a_{20}(\ln \lambda)_x + a_{11}(\ln \lambda)_y + a_{10}, \\ b_{01} &= (\ln \lambda)_{xx} + ((\ln \lambda)_x)^2 + a_{11}(\ln \lambda)_x + a_{01}, \\ b_{00} &= (\ln \lambda)_{xxy} + 2(\ln \lambda)_x(\ln \lambda)_{xy} + (\ln \lambda)_{xx}(\ln \lambda)_y + ((\ln \lambda)_x)^2(\ln \lambda)_y \\ &\quad + a_{20}((\ln \lambda)_{xx} + ((\ln \lambda)_x)^2) + a_{11}((\ln \lambda)_{xy} + (\ln \lambda)_x(\ln \lambda)_y) \\ &\quad + a_{10}(\ln \lambda)_x + a_{01}(\ln \lambda)_y + a_{00}, \end{aligned}$$

или, в другой форме,

$$\begin{aligned} b_{20} - a_{20} &= (\ln \lambda)_y, & b_{11} - a_{11} &= 2(\ln \lambda)_x, \\ b_{10} - b_{20}b_{11} - a_{10} + a_{20}a_{11} &= 2(\ln \lambda)_{xy}, \\ b_{01} - \left(\frac{b_{11}}{2}\right)^2 - a_{01} + \left(\frac{a_{11}}{2}\right)^2 &= (\ln \lambda)_{xx}, \\ b_{00} - b_{20}b_{01} - \frac{b_{11}b_{10}}{2} + \frac{b_{20}b_{11}^2}{2} - a_{00} + a_{20}a_{01} + \frac{a_{11}a_{10}}{2} - \frac{a_{20}a_{11}^2}{2} &= (\ln \lambda)_{xxy}. \end{aligned} \quad (7)$$

Следовательно, уравнение (2) переходит в уравнение (5) при преобразовании (3) тогда и только тогда, когда существует функция $\ln \lambda$, удовлетворяющая условиям (7).

Ясно, что если уравнение (2) эквивалентно по функции уравнению (5), т.е. y (2) и (5) инварианты Лапласа (4) совпадают, то соответствующее преобразование (3) имеет множитель

$$\lambda = \exp\left(\int \frac{b_{11} - a_{11}}{2} dx + (b_{20} - a_{20}) dy\right);$$

подынтегральное выражение является полным дифференциалом.

Аналогичные вычисления приводят к выводу, что инварианты Лапласа для (2) и сопряженного уравнения

$$w_{xxy} - (a_{20}(x, y)w)_{xx} - (a_{11}(x, y)w)_{xy} + (a_{10}(x, y)w)_x + (a_{01}(x, y)w)_y - a_{00}(x, y)w = 0$$

связаны соотношениями

$$\begin{aligned} h_1^* &= h_2, & h_2^* &= h_1, & h_3^* &= h_3, \\ h_4^* &= -h_5 + 2h_{2x} + h_{3y}, & h_5^* &= -h_4 + 2h_{1x} + h_{3y}. \end{aligned}$$

Если искать допускаемый уравнением (2) оператор

$$\alpha \partial_x + \beta \partial_y + \gamma \partial_z + \tau \partial_u,$$

то оказывается, что часть системы определяющих уравнений [1; с. 66] составят

$$\partial_u \alpha = \partial_u \beta = \partial_u \gamma = 0, \quad \partial_u^2 \tau = 0.$$

Известно [1; с. 99–100], что в таком случае алгебра Ли уравнения (2) есть $L = L^r \oplus L^\infty$, где алгебра L^r размерности r образована операторами вида

$$X = \xi(x, y) \partial_x + \eta(x, y) \partial_y + \sigma(x, y) u \partial_u, \quad (8)$$

а L^∞ – это типичная для линейных уравнений абелева подалгебра с оператором $\omega(x, y) \partial_u$, ω – решение уравнения (2). Ясно, что оператор $u \partial_u$ допускается любым уравнением (2), поэтому указанный оператор можно включить в L^∞ и считать, что $\sigma(x, y)$ определяется в (8) с точностью до постоянного слагаемого.

Определяющие уравнения для (2) вычисляются по стандартному алгоритму. Находим трижды продолженный оператор (8)

$$\begin{aligned} X_3 &= \xi \partial_x + \eta \partial_y + \sigma u \partial_u + \tau^1 \partial_{u_1} + \tau^2 \partial_{u_2} + \tau^{11} \partial_{u_{11}} + \tau^{12} \partial_{u_{12}} \\ &\quad + \tau^{22} \partial_{u_{22}} + \tau^{111} \partial_{u_{111}} + \tau^{112} \partial_{u_{112}} + \tau^{122} \partial_{u_{122}} + \tau^{222} \partial_{u_{222}}, \end{aligned}$$

где $u_1 = u_x, \dots, u_{222} = u_{yyy}$. Нам требуются коэффициенты

$$\begin{aligned} \tau^1 &= \sigma_x u + (\sigma - \xi_x) u_1 - \eta_x u_2, & \tau^2 &= \sigma_y u - \xi_y u_1 + (\sigma - \eta_y) u_2, \\ \tau^{11} &= \sigma_{xx} u + (2\sigma_x - \xi_{xx}) u_1 - \eta_{xx} u_2 + (\sigma - 2\xi_x) u_{11} - 2\eta_x u_{12}, \\ \tau^{12} &= \sigma_{xy} u + (\sigma_y - \xi_{xy}) u_1 + (\sigma_x - \eta_{xy}) u_2 - \xi_y u_{11} + (\sigma - \xi_x - \eta_y) u_{12} - \eta_x u_{22}, \\ \tau^{112} &= \sigma_{xxy} u + (2\sigma_{xy} - \xi_{xxy}) u_1 + (\sigma_{xx} - \eta_{xxy}) u_2 \\ &\quad + (\sigma_y - 2\xi_{xy}) u_{11} + (2\sigma_x - 2\eta_{xy} - \xi_{xx}) u_{12} + \eta_{xx} u_{22} \\ &\quad - \xi_{yy} u_{111} + (\sigma - \eta_y - 2\xi_x) u_{112} - 2\eta_x u_{122}. \end{aligned}$$

Применение оператора X_3 к уравнению (2) и расщепление относительно свободных параметров $u, u_1, \dots, u_{122}$ приводит к определяющим уравнениям

$$\begin{aligned} \xi_y &= 0, & \eta_x &= 0, \\ 2\sigma_x + a_{11y}\eta + (a_{11}\xi)_x - \xi_{xx} &= 0, & \sigma_y + (a_{20}\eta)_y + a_{20x}\xi &= 0, \\ 2\sigma_{xy} + 2a_{20}\sigma_x + a_{11}\sigma_y + (a_{10}\eta)_y + (a_{10}\xi)_x - a_{20}\xi_{xx} &= 0, \\ \sigma_{xx} + a_{11}\sigma_x + (a_{01}\xi)_x + a_{01y}\eta + a_{01}\xi_x &= 0, \\ \sigma_{xxy} + a_{20}\sigma_{xx} + a_{11}\sigma_{xy} + a_{10}\sigma_x + a_{01}\sigma_y + (a_{00}\eta)_y + (a_{00}\xi)_x + a_{00}\xi_x &= 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Уравнения (9) (кроме первых двух) могут быть записаны в терминах инвариантов Лапласа (4).

Третье и четвертое уравнения можно записать в виде

$$(2\sigma + 2a_{20}\eta + a_{11}\xi)_y = (h_2 - h_1)\xi, \quad (2\sigma + 2a_{20}\eta + a_{11}\xi)_x = (h_1 - h_2)\eta + \xi_{xx}, \quad (10)$$

пятое – в двух различных формах

$$(h_1\xi)_x + (h_1\eta)_y = 0, \quad (h_2\xi)_x + (h_2\eta)_y = 0, \quad (11)$$

шестое преобразуется к виду

$$\xi_{xxx} - (h_3\xi)_x - h_3\xi_x - h_{3y}\eta = 0, \quad (12)$$

наконец, седьмое можно снова записать в виде двух уравнений

$$\xi_{xx}h_1 + (h_4\xi)_x + h_4\xi_x + (h_4\eta)_y = 0, \quad (13)$$

$$\xi_{xx}h_2 + (h_5\xi)_x + h_5\xi_x + (h_5\eta)_y = 0. \quad (14)$$

Первые два уравнения (9) означают, что $\xi = \xi(x)$, $\eta = \eta(y)$.

Далее ограничимся рассмотрением уравнений (2), для которых выполняется хотя бы одно из условий $h_1 \neq 0$, $h_2 \neq 0$.

Дальнейшие рассуждения проводятся, следуя книге [1; с. 122–123].

Введем обозначения

$$p_{12} = \frac{h_1}{h_2}, \quad p_{21} = \frac{h_2}{h_1}, \quad q_i = \frac{(\ln h_i)_{xy}}{h_i}, \quad i = 1, 2.$$

Наличие уравнений (11) позволяет сформулировать, дословно повторяя рассуждения из [1; с. 122], достаточные условия, при которых алгебра Ли L^r не более чем одномерна.

Действительно, пусть $h_2 \neq 0$. Тогда из (11) следует уравнение

$$\xi p_{12x} + \eta p_{12y} = 0, \quad (15)$$

позволяющее утверждать, что либо p_{12} инвариант группы G с оператором (8), либо $p_{12} = \text{const}$. Далее, если отношение p_{12} инвариантов Лапласа не есть постоянная, то алгебра Ли операторов (8) не более чем одномерна. Действительно, пусть пары (ξ, η) , (ξ_1, η_1) удовлетворяют уравнению (15). Тогда при $p_{12} \neq \text{const}$ будет $\xi_1 = Q\xi$, $\eta_1 = Q\eta$, где $Q = \text{const}$. Тогда из (10) следует, что $\sigma_1 = Q\sigma$, что и требовалось.

Совершенно аналогично рассуждаем в случае $h_1 \neq 0$.

Пусть теперь $p_{12} = \text{const}$. Тогда, записывая второе уравнение (11) в виде

$$\xi(\ln h_2)_x + \eta(\ln h_2)_y + \xi_x + \eta_y = 0 \quad (16)$$

и дифференцируя это равенство по x и по y , получим

$$\xi((\ln h_2)_{xy})_x + \eta((\ln h_2)_{xy})_y + \xi_x + \eta_y = 0. \quad (17)$$

Вычтем из уравнения (17) уравнение (16). Получаем

$$\xi q_{2x} + \eta q_{2y} = 0.$$

Снова можем утверждать, что либо q_2 инвариант группы G с оператором (8), либо $q_2 = \text{const}$.

Аналогичный вывод справедлив и относительно конструкции q_1 .

Итак, справедливо утверждение: если хотя бы одна из функций p_{12} , p_{21} , q_1 , q_2 не равна тождественно постоянной, то алгебра Ли L^r операторов (8) не более чем одномерна.

Отметим, что если q_i постоянны, инварианты h_i удовлетворяют уравнению Лиувилля

$$(\ln h_i)_{xy} = q_i h_i. \quad (18)$$

Общее решение уравнения Лиувилля известно [1; с. 123].

Укажем теперь некоторые классы уравнений вида (2), аналогичные указанным в [1; теорема на с. 123]. Точнее, сконструируем уравнения, которые являются представителями классов уравнений вида (2), допускающими алгебру Ли L^r наибольшей размерности. Поскольку q_i в этом случае постоянны, структура коэффициентов уравнений определяется из (18) однозначно (с точностью до эквивалентности, определяемой преобразованиями (3)).

Анализ определяющих уравнений всюду проводится аналогично изложенному в [1; с. 124–125].

1) Пусть

$$q_1 = q_2 \equiv 0, \quad (\ln h_2)_{xy} = 0, \quad h_1 = p h_2, \quad h_3 = h_4 = h_5 = h_6 \equiv 0.$$

Учитывая вид решения уравнения Лиувилля (18) [1; с. 123], приходим к уравнению

$$u_{xxy} + \frac{px}{2} u_{xx} + y u_{xy} + \frac{pxy}{2} u_x + \frac{y^2}{4} u_y + \frac{pxy^2}{8} u = 0.$$

Определяющие уравнения дают

$$\xi = C_1 x + C_2, \quad \eta = -C_1 y + C_3, \quad \sigma = -\frac{1}{2}(C_3 x + C_2 p y).$$

Коэффициенты ξ , η получены из (11). Это означает, что если $q_1 = q_2 \equiv 0$, то размерность интересующей нас алгебры Ли L^r для любого уравнения (2) не превышает трех при выполнении условия $h_1^2 + h_2^2 \neq 0$ при любых h_3 , h_4 , h_5 , h_6 . Построенное уравнение допускает алгебру L^3 , образованную операторами

$$X_1 = x \partial_x - y \partial_y, \quad X_2 = \partial_x - \frac{1}{2} p y u \partial_u, \quad X_3 = \partial_y - \frac{1}{2} x u \partial_u.$$

2) Поменяем переменные ролями. Рассуждаем аналогично вышеизложенному. Пусть

$$q_1 = q_2 \equiv 0, \quad (\ln h_1)_{xy} = 0, \quad h_2 = ph_1, \quad h_3 = h_4 = h_5 = h_6 \equiv 0.$$

Получаем уравнение

$$u_{xxy} + \frac{x}{2} u_{xx} + pyu_{xy} + \frac{pxy}{2} u_x + \frac{p^2 y^2}{4} u_y + \frac{p^2 xy^2}{8} u = 0.$$

Из определяющих уравнений находим

$$\xi = C_1 x + C_2, \quad \eta = -C_1 y + C_3, \quad \sigma = -\frac{1}{2}(C_3 p x + C_2 y).$$

Данное уравнение допускает алгебру L^3 , образованную операторами

$$X_1 = x \partial_x - y \partial_y, \quad X_2 = \partial_x - \frac{1}{2} y u \partial_u, \quad X_3 = \partial_y - \frac{1}{2} p x u \partial_u.$$

3) Рассмотрим уравнение

$$u_{xxy} + \frac{A_{20}}{x+y} u_{xx} + \frac{A_{11}}{x+y} u_{xy} + \frac{A_{10}}{(x+y)^2} u_x + \frac{A_{01}}{(x+y)^2} u_y + \frac{A_{00}}{(x+y)^3} u = 0, \quad (19)$$

где все $A_{ij} = \text{const}$. При всевозможных значениях параметров A_{ij} данное уравнение допускает алгебру L^2 , образованную операторами

$$X_1 = \partial_x - \partial_y, \quad X_2 = x \partial_x - y \partial_y.$$

В этом легко убедиться, используя определяющие уравнения (10)–(14).

Отметим, что уравнение (19) может рассматриваться в качестве аналога уравнения Эйлера–Пуассона. В частности, в работе [12] для частных случаев уравнения (19) предложен метод каскадного интегрирования, обобщающий известный результат для уравнения Эйлера–Пуассона [3; с. 177–181].

Нетрудно видеть что инварианты Лапласа для уравнения (19) имеют структуру

$$h_i = \frac{\alpha_i}{(x+y)^2}, \quad i = 1, 2, 3, \quad h_j = \frac{\alpha_j}{(x+y)^3}, \quad j = 4, 5,$$

α_i, α_j – постоянные.

Если $h_1^2 + h_2^2 \neq 0$, то из (11) следует [1; с. 124]

$$\xi = Cx^2 + C_1 x + C_2, \quad \eta = -Cy^2 + C_1 y - C_2.$$

Ясно, что размерность допускаемой алгебры Ли L^r не может быть больше трех.

Из (13) и (14) следует: если $h_1 \neq 0$ и $h_4 \equiv 0$, то $C = 0$; если $h_2 \neq 0$ и $h_5 \equiv 0$, то $C = 0$. В обоих случаях размерность допускаемой алгебры Ли L^r не превышает двух.

Построим уравнения, являющиеся частными случаями (19), которые допускают трехмерные алгебры L^3 (ясно, что для этих уравнений либо $h_1 h_4 \neq 0$, либо $h_2 h_5 \neq 0$).

1) Рассмотрим уравнение

$$\begin{aligned} u_{xxy} - \frac{2/q}{x+y} u_{xy} + \frac{q+1}{q^2(x+y)^2} u_y &= 0, \\ h_1 = h_3 = h_4 &\equiv 0, \quad h_2 = \frac{2/q}{(x+y)^2}, \quad h_5 = -\frac{4/q}{(x+y)^3}. \end{aligned} \quad (20)$$

Здесь $q_2 = q \neq 0$. Нетрудно убедиться, что определяющие уравнения (12)–(14) обращаются в тождества. Определив σ из (10), приходим к выводу, что уравнение (20) допускает алгебру Ли L^3 , образованную операторами

$$X_1 = \partial_x - \partial_y, \quad X_2 = x \partial_x - y \partial_y, \quad X_3 = x^2 \partial_x - y^2 \partial_y + \frac{q+1}{q} x u \partial_u.$$

2) Рассмотрим теперь уравнение

$$\begin{aligned} u_{xxy} - \frac{1/q}{x+y} u_{xx} &= 0, \\ h_2 = h_3 = h_5 &\equiv 0, \quad h_1 = \frac{2/q}{(x+y)^2}, \quad h_4 = -\frac{4/q}{(x+y)^3}, \quad q_1 = q \neq 0. \end{aligned} \quad (21)$$

Определяющие уравнения (12)–(14) снова обращаются в тождества. Уравнение (12) допускает алгебру Ли L^3 , образованную операторами

$$X_1 = \partial_x - \partial_y, \quad X_2 = x \partial_x - y \partial_y, \quad X_3 = x^2 \partial_x - y^2 \partial_y + \frac{qx-y}{q} u \partial_u.$$

3) Перейдем к уравнению, для которого $q_1 \neq 0$ и $q_2 \neq 0$, $h_1 h_4 \neq 0$ и $h_2 h_5 \neq 0$. Оно имеет вид

$$u_{xxy} - \frac{1/q}{x+y} u_{xx} - \frac{2/q}{x+y} u_{xy} + \frac{2}{q^2(x+y)^2} u_x + \frac{q+1}{q^2(x+y)^2} u_y - \frac{q+1}{q^3(x+y)^3} u = 0. \quad (22)$$

Очевидно,

$$h_1 = h_2 = \frac{2/q}{(x+y)^2}, \quad h_3 \equiv 0, \quad h_4 = h_5 = -\frac{4/q}{(x+y)^3}.$$

Аналогично предыдущим случаям определяющие уравнения (12)–(14) обращаются в тождества. Уравнение (22) допускает алгебру Ли L^3 , образованную операторами

$$X_1 = \partial_x - \partial_y, \quad X_2 = x \partial_x - y \partial_y, \quad X_3 = x^2 \partial_x - y^2 \partial_y + \left(\frac{q+1}{q} x - \frac{1}{q} y \right) u \partial_u.$$

Из предыдущих рассуждений вытекает

ТЕОРЕМА. Пусть выполняется условие $h_1^2 + h_2^2 \neq 0$. Уравнение (2) допускает более чем одномерную алгебру Ли операторов (8) тогда и только тогда, когда функции p_{ij} , q_i , $i, j = 1, 2$, тождественно постоянны. Если p_{ij} и q_i постоянны, то наибольшая размерность допускаемой алгебры Ли L^r операторов (8) равна трем как в случае $q_1^2 + q_2^2 \equiv 0$, так и в случае $q_1^2 + q_2^2 \neq 0$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Л. В. Овсянников, *Групповой анализ дифференциальных уравнений*, Наука, М., 1978.
- [2] Н. Х. Ибрагимов, “Групповой анализ обыкновенных дифференциальных уравнений и принцип инвариантности в математической физике (к 150-летию со дня рождения Софуса Ли)”, *УМН*, **47**:4 (1992), 83–144.
- [3] Ф. Трикоми, *Лекции по уравнениям в частных производных*, ИЛ, М., 1957.
- [4] О. М. Джогадзе, “Об инвариантах Лапласа для некоторых классов линейных дифференциальных уравнений в частных производных”, *Дифференц. уравнения*, **40**:1 (2004), 58–68.
- [5] А. Н. Миронов, “Некоторые классы уравнений Бианки третьего порядка”, *Матем. заметки*, **94**:3 (2013), 389–400.
- [6] А. П. Солдатов, М. Х. Шхануков, “Краевые задачи с общим нелокальным условием А. А. Самарского для псевдопараболических уравнений высокого порядка”, *Докл. АН СССР*, **297**:3 (1987), 547–552.
- [7] В. И. Жегалов, Е. А. Уткина, “Об одном псевдопараболическом уравнении третьего порядка”, *Изв. вузов. Матем.*, 1999, № 10, 73–76.
- [8] О. М. Джогадзе, “Влияние младших членов на корректность постановки характеристических задач для гиперболических уравнений третьего порядка”, *Матем. заметки*, **74**:4 (2003), 517–528.
- [9] Т. Д. Джураев, Я. Попёлек, “О канонических видах уравнений с частными производными третьего порядка”, *УМН*, **44**:4 (1989), 237–238.
- [10] А. М. Нахушев, *Уравнения математической биологии*, Высшая школа, М., 1995.
- [11] А. М. Нахушев, *Задачи со смещением для уравнений в частных производных*, Наука, М., 2006.
- [12] Е. А. Уткина, “Об одном уравнении в частных производных с сингулярными коэффициентами”, *Изв. вузов. Матем.*, 2006, № 9, 67–70.

А. Н. Миронов

Елабужский институт (филиал)
Казанского (Приволжского)
федерального университета

Поступило

28.11.2014

Л. Б. Миронова

Елабужский институт (филиал)
Казанского (Приволжского)
федерального университета
E-mail: lbmironova@yandex.ru