Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. В. Кузнецова, А. В. Шутов, Перекладывающиеся разбиения тора, подстановка Розы и множества ограниченного остатка, *Матем. заметки*, 2015, том 98, выпуск 6, 878–897

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10620>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.45.116

26 апреля 2023 г., 14:22:17

Перекладывающиеся разбиения тора, подстановка Розы и множества ограниченного остатка

Д. В. Кузнецова, А. В. Шутов

Работа посвящена двумерной проблеме распределения дробных долей линейной функции. Введен новый класс разбиений двумерного тора на множества ограниченного остатка с эффективной оценкой остаточного члена. Показано, что примеры рассматриваемых разбиений могут быть получены при помощи геометрического варианта подстановки Розы.

Библиография: 25 названий.

DOI: 10.4213/mzm10620

1. Введение. Пусть $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ таково, что $1, \alpha_1, \alpha_2$ линейно независимы над кольцом целых чисел $\mathbb{Z}$. Определим отображение сдвига

$$S_\alpha: x \rightarrow x + \alpha \pmod{\mathbb{Z}^2}.$$

Отображение S_α переводит двумерный тор $\mathbb{T}^2$ в себя. Пусть теперь $X \in \mathbb{T}^2$ – множество с интегрируемой по Риману характеристической функцией. Тогда согласно теореме Вейля о равномерном распределении [1] для количества точек орбиты отображения S_α , попавших в область X ,

$$N(\alpha, n, X) = \#\{k : 0 \leq k \leq n-1, S_\alpha^k(0) \in X\}$$

справедлива асимптотическая формула

$$N(\alpha, n, X) = n|X| + o(n), \tag{1.1}$$

где $|X|$ – площадь X . Пусть теперь

$$r(\alpha, n, X) = N(\alpha, n, X) - n|X|$$

представляет собой остаточный член асимптотической формулы (1.1).

Множество X будем называть *множеством ограниченного остатка* или *BR-множеством* (для данного сдвига S_α), если имеет место асимптотика

$$r(\alpha, n, X) = O(1). \tag{1.2}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты №№ 14-01-00360-а, 12-01-33080-мол_а_вед).

Впервые множества ограниченного остатка были введены Гекке в одномерном случае [2]. Полное описание интервалов ограниченного остатка было дано Кестеном в работе [3]. Описание одномерных BR -множеств, состоящих из нескольких интервалов, можно найти в [4], [5].

Задача описания многомерных BR -множеств остается нерешенной даже в двумерном случае. Многочисленные примеры множеств ограниченного остатка в размерности 2 и выше можно найти в работах [6]–[13]. Различные критерии, позволяющие доказать, что множество X является множеством ограниченного остатка, содержатся в [14]–[16].

Во многих случаях представляет интерес не просто доказательство ограниченности остатка, но и получение его явной оценки, т.е. эффективизация оценки (1.2). Множество X будем называть $BR(C)$ -множеством для некоторого $C > 0$, если для всех n справедливо неравенство

$$|r(\alpha, n, X)| \leq C.$$

В одномерном случае задача явного вычисления соответствующей константы C получила окончательное решение в работах [17], [18].

В многомерном случае подход к изучению $BR(C)$ -множеств был предложен в работах [16], [12]. Применительно к двумерному случаю данный подход означает построение разбиения тора $\mathbb{T}^2$ на три множества ограниченного остатка специального вида.

В настоящей работе предлагается обобщение данного результата на более общие разбиения двумерного тора. Основным результатом является теорема 2, в которой получено достаточное условие, при котором разбиение двумерного тора на множества трех типов представляет собой его разбиение на $BR(C)$ -множества с эффективно вычислимой константой C .

Далее мы рассматриваем конструкцию, позволяющую строить разбиения тора, удовлетворяющие условиям доказанной теоремы. Эта конструкция использует подстановку ромбов, известную как подстановка Розы [19]. Более того, удастся доказать, что полученная оценка остатка является универсальной, т.е. не зависит от числа итераций подстановки.

Также мы рассматриваем ряд деформаций полученной конструкции. В частности, мы даем новое доказательство того, что введенное в работе [11] разбиение Розы N -го порядка представляет собой разбиение двумерного тора на фрактальные $BR(C)$ -множества с эффективно вычислимой константой C .

2. Перекладывающиеся разбиения тора. Постановку задачи о $BR(C)$ -множествах, описанную во введении, удобно переформулировать в следующем эквивалентном виде. Пусть L – двумерная решетка, v – иррациональный относительно решетки L вектор, т.е. вектор, координаты которого в некотором базисе решетки L линейно независимы над $\mathbb{Z}$ вместе с единицей (очевидно, что данное определение не зависит от выбора базиса). Отображение сдвига

$$S: x \rightarrow x + v \pmod{L}$$

переводит двумерный тор $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/L$ в себя. Множество $X \in \mathbb{T}^2$ будем называть $BR(C)$ -множеством, если

$$|r(v, n, X)| \leq C,$$

где

$$r(v, n, X) = \#\{k : 0 \leq k \leq n-1, S^k(0) \in X\} - n \frac{|X|}{\det L}.$$

Множество T будем называть *фундаментальной областью* решетки L , если

- 1) для любой точки $x \in \mathbb{R}^2$ существует точка $x' \in T$ такая, что $x \equiv x' \pmod{L}$;
- 2) любые две точки $x, x' \in T$ не сравнимы по модулю решетки: $x \not\equiv x' \pmod{L}$.

Очевидно, что существует естественное взаимно-однозначное отображение $\iota: \mathbb{T}^2 \rightarrow T$ между фундаментальной областью T и тором $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/L$.

Рассмотрим теперь разбиение

$$\mathbb{T}^2 = \mathbb{T}_0 \sqcup \mathbb{T}_1 \sqcup \mathbb{T}_2 \quad (2.1)$$

двумерного тора на непересекающиеся множества и порожденное им разбиение

$$T = T_0 \sqcup T_1 \sqcup T_2, \quad \text{где } T_i = \iota(\mathbb{T}_i).$$

Разбиение (2.1) будем называть *перекладывающимся*, если существуют векторы v_0, v_1, v_2 такие, что отображение $S^*: x \rightarrow x + v_j$, если $x \in T_j$, переводит множество T в себя и его действие на множестве T совпадает с действием, индуцированным сдвигом S , т.е. диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{T}^2 & \xrightarrow{S} & \mathbb{T}^2 \\ \downarrow \iota & & \downarrow \iota \\ T & \xrightarrow{S^*} & T \end{array} \quad (2.2)$$

коммутативна. Пример такого разбиения изображен на рис. 1.

Рис. 1. Пример перекладывающегося разбиения.

ТЕОРЕМА 1. Для любого перекладывающегося разбиения двумерного тора множества $\mathbb{T}_i$, $i = 0, 1, 2$, являются $BR(C)$ -множествами с эффективно вычислимой постоянной C .

Два различных доказательства данной теоремы могут быть найдены в работах [16], [13]. При этом работа [16] содержит доказательство в случае произвольной размерности.

Наша цель состоит в том, чтобы получить аналог теоремы 1 для более сложных разбиений тора, состоящих из произвольного числа множеств трех различных типов.

Рассмотрим разбиение двумерного тора $\mathbb{T}^2$

$$\mathbb{T}^2 = \coprod_{i=0}^{\#R-1} R_i \sqcup \coprod_{i=0}^{\#G-1} G_i \sqcup \coprod_{i=0}^{\#B-1} B_i \quad (2.3)$$

на непересекающиеся множества трех типов. Здесь $\#R$, $\#G$ и $\#B$ – количества множеств типов R , G и B соответственно.

Разбиение (2.3) порождает разбиение развертки

$$T = \coprod_{i=0}^{\sharp R-1} R_i \sqcup \coprod_{i=0}^{\sharp G-1} G_i \sqcup \coprod_{i=0}^{\sharp B-1} B_i,$$

в котором $R_i = \iota(\mathbb{R}_i)$, $G_i = \iota(\mathbb{G}_i)$ и $B_i = \iota(\mathbb{B}_i)$.

Пусть теперь отображение S^* таково, что диаграмма (2.2) коммутативна. Разбиение (2.3) будем называть *обобщенным перекладывающимся разбиением тора относительно сдвига S* , если выполняются следующие три условия:

- 1) $S^*(R_i) = R_{i+1}$, $S^*(G_i) = G_{i+1}$, $S^*(B_i) = B_{i+1}$ для всех допустимых значений i ;
- 2) справедливо равенство

$$R_0 \sqcup G_0 \sqcup B_0 = S^*(R_{\sharp R-1}) \sqcup S^*(G_{\sharp G-1}) \sqcup S^*(B_{\sharp B-1})$$

и существуют векторы

$$w_R = (w_R^1, w_R^2), \quad w_G = (w_G^1, w_G^2), \quad w_B = (w_B^1, w_B^2)$$

такие, что

$$S^*(R_{\sharp R-1}) - w_R = R_0, \quad S^*(G_{\sharp G-1}) - w_G = G_0, \quad S^*(B_{\sharp B-1}) - w_B = B_0;$$

- 3) определитель

$$\begin{vmatrix} \sharp R & \sharp G & \sharp B \\ w_R^1 & w_G^1 & w_B^1 \\ w_R^2 & w_G^2 & w_B^2 \end{vmatrix} \neq 0. \quad (2.4)$$

ТЕОРЕМА 2. *Обобщенное перекладывающееся разбиение тора является его разбиением на $BR(C)$ -множества с эффективно вычислимой константой C .*

ЗАМЕЧАНИЕ 3. В работе [20] был получен аналог теоремы 2 с другими условиями 2 и 3, представляющими большую сложность для проверки. Кроме того, в работе [21] приведен пример разбиения двумерного тора, удовлетворяющего условию 1 и не содержащего BR -множеств. Отметим также, что в настоящее время не известно ни одного примера разбиения тора, удовлетворяющего условиям 1 и 2, но не удовлетворяющего условию 3.

3. Доказательство основной теоремы. Перейдем к доказательству теоремы 2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Очевидно, достаточно доказать, что множества R_i , G_i и B_i являются $BR(C)$ -множествами относительно отображения S^* .

Заметим, что из условия 1 из определения обобщенного перекладывающегося разбиения вытекает, что

$$|N(v, R_i, n) - N(v, R_j, n)| \leq 1$$

для любых допустимых i, j . Выбирая $j = 0$ и переходя к остаточным членам, находим

$$|r(v, R_i, n) - r(v, R_0, n)| \leq 1. \quad (3.1)$$

Аналогично,

$$|r(v, G_i, n) - r(v, G_0, n)| \leq 1, \quad (3.2)$$

$$|r(v, B_i, n) - r(v, B_0, n)| \leq 1. \quad (3.3)$$

Таким образом, достаточно доказать, что R_0 , G_0 , B_0 являются $BR(C)$ -множествами.

Далее, так как

$$T = \coprod_{i=0}^{\sharp R-1} R_i \sqcup \coprod_{i=0}^{\sharp G-1} G_i \sqcup \coprod_{i=0}^{\sharp B-1} B_i,$$

имеем

$$\sum_{i=0}^{\sharp R-1} N(v, R_i, n) + \sum_{i=0}^{\sharp G-1} N(v, G_i, n) + \sum_{i=0}^{\sharp B-1} N(v, B_i, n) = n.$$

Переходя к остаткам, находим

$$\sum_{i=0}^{\sharp R-1} r(v, R_i, n) + \sum_{i=0}^{\sharp G-1} r(v, G_i, n) + \sum_{i=0}^{\sharp B-1} r(v, B_i, n) = 0.$$

Используя равенства (3.1)–(3.3), получаем неравенство

$$|\sharp Rr(v, R_0, n) + \sharp Gr(v, G_0, n) + \sharp Br(v, B_0, n)| \leq \sharp R + \sharp G + \sharp B - 3. \quad (3.4)$$

Пусть $T' = R_0 \sqcup G_0 \sqcup B_0$. Определим отображение первого возвращения для S^* на множестве T' формулой

$$d_{T'} S^*(x) = (S^*)^{n_{T'}}(x),$$

где

$$n_{T'}(x) = \min\{k > 0 : (S^*)^k(x) \in T'\}.$$

Из условий 1) и 2) определения обобщенного перекладывающегося разбиения вытекает, что

$$d_{T'} S^*(x) = \begin{cases} x + w_R, & x \in R_0, \\ x + w_G, & x \in G_0, \\ x + w_B, & x \in B_0. \end{cases}$$

Поскольку отображение $d_{T'} S^*$ переводит множество T' в себя, вектор

$$N(v, R_0, n)w_R + N(v, G_0, n)w_G + N(v, B_0, n)w_B \in T'.$$

Переходя к остаточным членам, получим

$$r(v, R_0, n)w_R + r(v, G_0, n)w_G + r(v, B_0, n)w_B + n(|R_0|w_R + |G_0|w_G + |B_0|w_B) \in T'. \quad (3.5)$$

Докажем, что

$$K = |R_0|w_R + |G_0|w_G + |B_0|w_B = 0.$$

Пусть

$$U_1 = r(v, R_0, n)w_R + r(v, G_0, n)w_G + r(v, B_0, n)w_B.$$

Так как вектор v иррационален, из теоремы Вейля о равномерном распределении вытекает, что $r(v, R_0, n) = o(n)$, $r(v, G_0, n) = o(n)$ и $r(v, B_0, n) = o(n)$. Тогда для длины вектора U_1 также имеем $|U_1| = o(n)$. С другой стороны, (3.5) в сочетании с ограниченностью множества T' дает $|U_1| = Kn + O(1)$, что возможно только при $K = 0$. Таким образом, нами доказано, что

$$r(v, R_0, n)w_R + r(v, G_0, n)w_G + r(v, B_0, n)w_B \in T'. \quad (3.6)$$

Перейдем к координатам векторов w_R , w_G и w_B . Пусть K_i – наибольшая по модулю проекция точки $x \in T'$ на соответствующую координатную ось. Тогда (3.6) порождает неравенства

$$|r(v, R_0, n)w_R^1 + r(v, G_0, n)w_G^1 + r(v, B_0, n)w_B^1| \leq K_1, \quad (3.7)$$

$$|r(v, R_0, n)w_R^2 + r(v, G_0, n)w_G^2 + r(v, B_0, n)w_B^2| \leq K_2. \quad (3.8)$$

Из условия (2.4) немедленно вытекает, что неравенства (3.4), (3.7), (3.8) определяют эффективно вычислимый параллелепипед Π в пространстве с координатами $(r(v, R_0, n), r(v, G_0, n), r(v, B_0, n))$. Отсюда следует, что R_0 , G_0 и B_0 являются $BR(C)$ -множествами, причем в качестве C можно взять радиус сферы с центром в начале координат, содержащей параллелепипед Π . В силу эффективной вычислимости Π константа C также эффективно вычислима.

Таким образом, теорема 2 полностью доказана.

Неравенства (3.4), (3.7), (3.8) допускают матричную формулировку. Введем матрицу

$$A = \begin{pmatrix} \#R & \#G & \#B \\ w_R^1 & w_G^1 & w_B^1 \\ w_R^2 & w_G^2 & w_B^2 \end{pmatrix}$$

и векторы

$$r_n = (r(v, R_0, n), r(v, G_0, n), r(v, B_0, n))^t, \quad a_n = Ar_n = (a_n^1, a_n^2, a_n^3)^t.$$

Отметим, что матрица A невырождена. Поскольку

$$r_n = A^{-1}a_n,$$

для любой векторной нормы $\|x\|$ и соответствующей ей матричной нормы $\|M\| = \sup_{\|x\|=1} \|Mx\|$ имеем

$$\|r_n\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|a_n\|, \quad (3.9)$$

причем $\|a_n\|$ во многих случаях может быть оценена с помощью неравенств (3.4), (3.7), (3.8) на компоненты вектора a_n . В частности, для доказательства теоремы 2 необходимо рассмотреть L^∞ -норму

$$\|x\|_{L^\infty} = \max_{i=1,2,3} |x_i| \quad \text{для } x = (x_1, x_2, x_3)^t.$$

При этом неравенства (3.4), (3.7), (3.8) порождают оценку

$$\|a_n\|_{L^\infty} \leq \max\{\#R + \#G + \#B - 3, K_1, K_2\}.$$

Аналогично на основе (3.9) можно получить оценки L^p -норм вектора r_n для любого p .

4. Подстановка Рози. Далее нами будет построено семейство примеров обобщенных перекладывающихся разбиений двумерного тора относительно некоторого сдвига. В основе этих примеров лежит теория обобщенных подстановок, которую мы будем рассматривать в частном случае так называемой подстановки Рози.

В данном пункте мы излагаем все необходимые теоретические сведения о подстановке Розы в соответствии с книгой [19]. Подробные доказательства формулируемых нами утверждений также содержатся в работе [22].

Подстановка Розы определена на множестве Λ , состоящем из так называемых базисных квадратов

$$(x, i^*) = \{x + \lambda e_j + \mu e_j : 0 \leq \lambda, \mu < 1\},$$

где $i = 1, 2, 3$, $x \in \mathbb{Z}^3$ и $e_1 = (1, 0, 0)^t$, $e_2 = (0, 1, 0)^t$, $e_3 = (0, 0, 1)^t$. Точку x будем называть *отмеченной* точкой квадрата (x, i^*) .

Рис. 2. Действие подстановки Θ на базисных квадратах.

Рассмотрим матрицу

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

называемую *матрицей подстановки Розы*, и обозначим через $f_i^{(N)}$ i -й вектор-столбец матрицы $M^{-(N+1)}$. Тогда подстановка Розы Θ определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} (0, 1^*) &\rightarrow (0, 3^*) \sqcup (f_2^{(1)}, 1^*) \sqcup (f_3^{(1)}, 2^*), \\ \Theta: (0, 2^*) &\rightarrow (0, 1^*), \\ (0, 3^*) &\rightarrow (0, 2^*), \end{aligned} \quad \Theta(x, i^*) = M^{-1}x + \Theta(0, i^*),$$

$$\Theta\left(\prod_{\lambda \in \Lambda} \lambda\right) = \prod_{\lambda \in \Lambda} \Theta(\lambda).$$

Действие подстановки Θ на базисных квадратах $(0, i^*)$ изображено на рис. 2. Пусть теперь

$$D_N^{(i)} = \Theta^N(0, i^*), \quad D_N = \prod_{i=1}^3 D_N^{(i)}.$$

На рис. 3 изображены множества D_N для нескольких первых N .

Рис. 3. Множества D_N для малых значений N .

ЛЕММА 4. Для любого $N > 0$ справедливо включение

$$D_{N-1} \subset D_N.$$

Далее, пусть ζ – единственный действительный корень уравнения

$$x^3 + x^2 + x = 1.$$

Обозначим через π проекцию из $\mathbb{R}^3$ вдоль вектора $(1, \zeta, \zeta^2)^t$ на плоскость P , задаваемую уравнением $x_1 + (\zeta + \zeta^2)x_2 + \zeta x_3 = 0$.

ЛЕММА 5. Ограничение отображения π на множество D_N является взаимно-однозначным отображением при любом N .

Пусть теперь

$$D_\infty = \bigcup_{N=0}^{\infty} D_N.$$

В силу леммы 4 множество D_∞ является объединением базисных квадратов. Пусть Γ_∞ – множество отмеченных точек всех базисных квадратов из D_∞ .

ЛЕММА 6. Множество Γ_∞ и плоскость P инвариантны относительно действия отображения M^{-1} . Диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \Gamma_\infty & \xrightarrow{M^{-1}} & \Gamma_\infty \\ \downarrow \pi & & \downarrow \pi \\ P & \xrightarrow{M^{-1}} & P \end{array} \quad (4.1)$$

коммутативна.

Лемма 5 позволяет нам определить множества $T_N = \pi(D_N)$ и $T_N^{(i)} = \pi(D_N^{(i)})$. Определим на множестве T_N отображение S_N^* по правилу

$$S_N^*(x) = x + \pi(f_i^{(N)}), \quad \text{если } x \in T_N^{(i)}.$$

ЛЕММА 7. *Отображение S_N^* является взаимно-однозначным отображением множества T_N в себя.*

Рассмотрим решетки

$$L_0 = \{k_1(e_1 - e_2) + k_2(e_1 - e_3) : k_1, k_2 \in \mathbb{Z}\}, \quad L_N = M^{-N}(L_0).$$

ТЕОРЕМА 8. *Множество T_N представляет собой фундаментальную область решетки $\pi(L_N)$. Кроме того, существует сдвиг*

$$S_N : x \rightarrow x + v_N \pmod{\pi(L_N)}$$

тора $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\pi(L_N)$, действие которого на $\mathbb{R}^2/\pi(L_N)$ изоморфно действию S_N^* на T_N . При этом в качестве вектора v_N можно взять любой из векторов $\pi(f_N^{(i)})$. Если ι_N означает естественную проекцию $\mathbb{R}^2/\pi(L_N) \rightarrow T_N$, то диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2/\pi(L_N) & \xrightarrow{S_N} & \mathbb{R}^2/\pi(L_N) \\ \downarrow \iota_N & & \downarrow \iota_N \\ T_N & \xrightarrow{S_N^*} & T_N \end{array}$$

коммутативна. Более того, все сдвиги S_N^* изоморфны сдвигу

$$x \rightarrow x + (\zeta, \zeta^2) \pmod{\mathbb{Z}^2}$$

тора $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$.

5. Подстановка Розы порождает BR-множества. Согласно результатам предыдущего пункта множество D_N разбито на базисные квадраты вида (x, i^*) . Отображение проекции π переводит это разбиение в разбиение развертки тора T_N на множества трех типов. Наша цель состоит в том, чтобы доказать, что полученное разбиение развертки порождает обобщенное перекладывающееся разбиение тора $\mathbb{T}^2$.

Определим индуктивно множества R_i^N , G_i^N и B_i^N следующим образом. При $N = 0$ положим

$$R_0^0 = \pi(0, 1^*), \quad G_0^0 = \pi(0, 2^*), \quad B_0^0 = \pi(0, 3^*).$$

Пусть множества R_i^N , G_i^N и B_i^N определены для $N = k$. Пусть $R_j^k = \pi(x, 1^*)$ и

$$\Theta(x, 1^*) = (M^{-1}x, 3^*) \sqcup (M^{-1}x + f_2^{(1)}, 1^*) \sqcup (M^{-1}x + f_3^{(1)}, 2^*).$$

Тогда положим

$$\begin{aligned} R_{\sharp G_k + j}^{k+1} &= \pi(M^{-1}x + f_2^{(1)}, 1^*), & G_{\sharp B_k + j}^{k+1} &= \pi(M^{-1}x + f_3^{(1)}, 2^*), \\ B_j^{k+1} &= \pi(M^{-1}x, 3^*), \end{aligned}$$

т.е. фактически

$$R_j^k \rightarrow R_{\#G_k+j}^{k+1} \sqcup G_{\#B_k+j}^{k+1} \sqcup B_j^{k+1}. \quad (5.1)$$

Здесь $\#R_k$, $\#G_k$ и $\#B_k$ — числа множеств R_i^k , G_i^k и B_i^k соответственно. Множество R_j^k будем называть *предком* множеств $R_{\#G_k+j}^{k+1}$, $G_{\#B_k+j}^{k+1}$ и B_j^{k+1} .

Аналогично, для $G_j^k = \pi(x, 2^*)$ и $\Theta(x, 2^*) = (M^{-1}x, 1^*)$ положим

$$R_j^{k+1} = \pi(M^{-1}x, 1^*),$$

т.е.

$$G_j^k \rightarrow R_j^{k+1}. \quad (5.2)$$

Для $B_j^k = \pi(x, 3^*)$ и $\Theta(x, 3^*) = (M^{-1}x, 2^*)$ положим

$$G_j^{k+1} = \pi(M^{-1}x, 2^*),$$

т.е.

$$B_j^k \rightarrow G_j^{k+1}. \quad (5.3)$$

Множества G_j^k и B_j^k будем называть предками множеств R_j^{k+1} и G_j^{k+1} соответственно.

Таким образом каждый базисный квадрат $(x, 1^*) \in D_N$ под действием отображения π переходит в одно из множеств R_j^n , $0 \leq j < \#R_N$. Аналогично, каждый базисный квадрат $(x, 2^*) \in D_N$ переходит в одно из множеств G_j^n , $0 \leq j < \#G_N$, а каждый базисный квадрат $(x, 3^*) \in D_N$ под действием отображения π переходит в одно из множеств B_j^N , $0 \leq j < \#B_N$.

Обозначим

$$\mathbb{R}_j^N = \iota^{-1}(R_j^N), \quad \mathbb{G}_j^N = \iota^{-1}(G_j^N), \quad \mathbb{B}_j^N = \iota^{-1}(B_j^N).$$

ТЕОРЕМА 9. *Разбиение*

$$\mathbb{T}^2 = \prod_{i=0}^{\#R_N-1} \mathbb{R}_i^N \sqcup \prod_{i=0}^{\#G_N-1} \mathbb{G}_i^N \sqcup \prod_{i=0}^{\#B_N-1} \mathbb{B}_i^N \quad (5.4)$$

является обобщенным перекладывающимся разбиением тора $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\pi(L_N)$.

Вначале докажем ряд вспомогательных лемм. Определим последовательность $\{t_i\}$ при помощи рекуррентного соотношения

$$t_{i+3} = t_{i+2} + t_{i+1} + t_i$$

и начальных условий

$$t_0 = t_1 = 1, \quad t_2 = 2.$$

Последовательность $\{t_i\}$ часто называют *последовательностью трибоначчи* по аналогии с знаменитой последовательностью Фибоначчи.

ЛЕММА 10. *Справедливы равенства*

$$\#R_N = t_{N+2}, \quad \#G_N = t_{N+1} + t_N, \quad \#B_N = t_{N+1}. \quad (5.5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО леммы осуществляется методом математической индукции при помощи равенств

$$\sharp R_N = \sharp R_{N-1} + \sharp G_{N-1}, \quad \sharp G_N = \sharp R_{N-1} + \sharp B_{N-1}, \quad \sharp B_N = \sharp R_{N-1},$$

вытекающих из соотношений (5.3)–(5.5).

ЛЕММА 11. *Справедливо равенство*

$$M^N = \begin{pmatrix} t_{N+1} & t_N + t_{N-1} & t_N \\ t_N & t_{N-1} + t_{N-2} & t_{N-1} \\ t_{N-1} & t_{N-2} + t_{N-3} & t_{N-2} \end{pmatrix}. \quad (5.6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проводится индукцией по N .

ЛЕММА 12. *Пусть каждая из букв X и Y означает один из символов R, G, B . Предположим, что предки $Y_{j_1}^N$ и $Y_{j_2}^N$ ромбов $X_{j_1}^{N+1}$ и $X_{j_2}^{N+1}$ связаны соотношением $Y_{j_1}^N = S_N^*(Y_{j_2}^N)$. Тогда*

$$X_{j_1}^{N+1} = S_{N+1}^* X_{j_2}^{N+1}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть

$$Y_{j_1}^N = (y_1, i_y^*), \quad Y_{j_2}^N = (y_2, i_y^*), \quad X_{j_1}^{N+1} = (x_1, i_x^*), \quad X_{j_2}^{N+1} = (x_2, i_x^*).$$

Для доказательства леммы достаточно доказать, что $\pi(x_1) = S_{N+1}^*(\pi(x_2))$. В силу определения S_N^* достаточно показать, что

$$\pi(x_1) - \pi(x_2) = f_{N+1}^{(k_x)}.$$

По предположению леммы имеем $\pi(y_1) = S_N^*(\pi(y_2))$, т.е. $\pi(y_1) - \pi(y_2) = f_N^{(k_y)}$. Так как $(x_1, i_x^*), (x_2, i_x^*)$ являются базисными квадратами одного типа и принадлежат Θ -образам базисных квадратов $(y_1, i_y^*), (y_2, i_y^*)$, имеем $x_1 - x_2 = M^{-1}(y_1 - y_2)$. В силу коммутативности диаграммы (4.1) имеем $\pi(x_1) - \pi(x_2) = M^{-1}(f_N^{(k_y)})$. Поскольку $f_N^{(k)}$ есть k -й столбец матрицы M^{-N} , справедливо равенство $M^{-1}f_N^{(k)} = f_{N+1}^{(k)}$, применяя которое получаем требуемый результат.

Перейдем к доказательству теоремы 9.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы 9 будем проводить индукцией по N . Для $N = 0$ утверждение теоремы проверяется непосредственно.

Предположим, что условия 1)–3) из определения обобщенного перекладывающегося разбиения тора выполнены для $N = k$, и докажем их выполнимость для $N = k + 1$.

Вначале докажем выполнимость условия 1), т.е. то, что

$$S_{k+1}^*(R_i^{k+1}) = R_{i+1}^{k+1}, \quad S_{k+1}^*(G_i^{k+1}) = G_{i+1}^{k+1}, \quad S_{k+1}^*(B_i^{k+1}) = B_{i+1}^{k+1}$$

для всех допустимых значений i . Из предположения индукции и леммы 12 немедленно следует, что

$$S_{k+1}^*(R_i^{k+1}) = R_{i+1}^{k+1} \quad \text{для} \quad 0 \leq i < \sharp G_k - 1, \quad \sharp G_k \leq i < \sharp R_{k+1} - 1.$$

Аналогично,

$$\begin{aligned} S_{k+1}^*(G_i^{k+1}) &= G_{i+1}^{k+1} & \text{для } 0 \leq i < \sharp B_k - 1, \quad \sharp B_k \leq i < \sharp G_{k+1} - 1; \\ S_{k+1}^*(B_i^{k+1}) &= B_{i+1}^{k+1} & \text{для } 0 \leq i < \sharp B_{k+1} - 1. \end{aligned}$$

Таким образом, для завершения проверки условия 1) достаточно доказать два равенства

$$R_{\sharp G_k}^{k+1} = S_{k+1}^*(R_{\sharp G_k-1}^{k+1}), \quad (5.7)$$

$$G_{\sharp B_k}^{k+1} = S_{k+1}^*(G_{\sharp B_k-1}^{k+1}). \quad (5.8)$$

Докажем равенство (5.7). Так как $S_{k+1}^*(R_i^{k+1}) = R_{i+1}^{k+1}$ для $0 \leq i < \sharp G_k - 1$, равенство (5.7) эквивалентно равенству

$$R_{\sharp G_k}^{k+1} = (S_{k+1}^*)^{\sharp G_k}(R_0^{k+1}). \quad (5.9)$$

Поскольку предком $R_{\sharp G_k}^{k+1}$ является R_0^k , отмеченная точка $R_{\sharp G_k}^{k+1}$ есть $\pi((1, 0, -1)^t)$. Для доказательства (5.9) достаточно доказать, что эта точка совпадает с точкой $(S_{k+1}^*)^{\sharp G_k}(\pi((0, 0, 0)^t))$, так как $\pi((0, 0, 0)^t)$ есть отмеченная точка для R_0^{k+1} . Поскольку обе точки принадлежат множеству T_{k+1} , являющемуся фундаментальной областью решетки L_{k+1} , вместо совпадения точек достаточно доказать их сравнимость по модулю этой решетки. В силу теоремы 8 сдвиг S_{k+1}^* можно рассматривать как отображение $x \rightarrow x + \pi(f_3^{(k+1)}) \pmod{L_{k+1}}$. Итак, для доказательства (5.9) достаточно доказать, что

$$\pi((1, 0, -1)^t) \equiv \sharp G_k \pi(f_3^{(k+1)}) \pmod{L_{k+1}}. \quad (5.10)$$

Поддействуем на (5.10) невырожденной матрицей M^{k+1} . Используя коммутативную диаграмму (4.1) и равенство (5.6), находим

$$M^{k+1}(\pi((1, 0, -1)^t)) = \pi(M^{k+1}((1, 0, -1)^t)) = \pi((t_{k+2} - t_{k+1}, t_{k+1} - t_k, t_k - t_{k-1})^t).$$

Согласно определениям имеем

$$M^{k+1}L_{k+1} = L_0 \quad \text{и} \quad M^{k+1}f_3^{(k+1)} = f_3^{(0)} = (1, 0, 0)^t.$$

Учитывая также формулу (5.5) для $\sharp G_k$, преобразуем (5.10) к виду

$$\pi((t_{k+2} - t_{k+1}, t_{k+1} - t_k, t_k - t_{k-1})^t) \equiv (t_{k+1} + t_k)\pi((1, 0, 0)^t) \pmod{L_0}.$$

Учитывая линейность отображения π и определение решетки L_0 , достаточно показать существование целых k_1, k_2 таких, что

$$(t_{k+2} - t_{k+1}, t_{k+1} - t_k, t_k - t_{k-1})^t - (t_{k+1} + t_k)(1, 0, 0)^t = k_1(1, -1, 0)^t + k_2(1, 0, -1)^t.$$

Непосредственной проверкой убеждаемся, что данное равенство выполняется при $k_1 = t_k - t_{k+1}$, $k_2 = t_{k-1} - t_k$. Таким образом, равенство (5.7) полностью доказано. Доказательство равенства (5.8) выполняется полностью аналогично. Таким образом, выполнимость условия 1) определения обобщенного перекладывающегося разбиения для разбиения (5.4) полностью доказана.

Перейдем к доказательству выполнимости условия 2). Для этого определим множества

$$R^* = \pi(e_1, 1^*), \quad G^* = \pi(e_2, 2^*), \quad B^* = \pi(e_3, 3^*).$$

Непосредственной проверкой убеждаемся, что

$$R_0^{k+1} \sqcup G_0^{k+1} \sqcup B_0^{k+1} = R^* \sqcup G^* \sqcup B^*$$

при любом k (множества R_0^{k+1} , G_0^{k+1} , B_0^{k+1} одинаковы для всех k) и существуют не зависящие от k векторы w_R , w_G и w_B такие, что

$$R_0^{k+1} = R^* - w_R, \quad G_0^{k+1} = G^* - w_G, \quad B_0^{k+1} = B^* - w_B.$$

Поэтому для проверки условия 2) достаточно показать, что выполняются равенства

$$R^* = S_{k+1}^*(R_{\#R_{k+1}-1}^{k+1}), \quad (5.11)$$

$$G^* = S_{k+1}^*(G_{\#G_{k+1}-1}^{k+1}), \quad (5.12)$$

$$B^* = S_{k+1}^*(B_{\#B_{k+1}-1}^{k+1}). \quad (5.13)$$

Докажем равенство (5.11). Доказательство будет аналогично доказательству равенства (5.7). Вначале заметим, что в силу того, что условие 1) определения обобщенного перекладывающегося разбиения тора выполнено, (5.11) можно переписать в виде

$$R^* = (S_{k+1}^*)^{\#R_{k+1}}(R_0^{k+1}).$$

Переходя к отмеченным точкам, убеждаемся, что достаточно показать сравнимость

$$\pi((1, 0, 0)^t) \equiv \#R_{k+1}\pi(f_3^{(k+1)}) \pmod{L_{k+1}}.$$

Домножая на матрицу M^{k+1} , с учетом линейности отображения π и формулы (5.15), выражающей $\#R_{k+1}$ через числа трибоначчи, находим, что выполнение (5.11) эквивалентно существованию $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ таких, что

$$(t_{k+2}, t_{k+1}, t_k)^t - t_{k+3}(1, 0, 0)^t = k_1(1, -1, 0)^t + k_2(1, 0, -1)^t.$$

Непосредственной проверкой убеждаемся, что данное равенство выполнено при $k_1 = -t_{k+1}$, $k_2 = -t_k$, что и доказывает (5.11).

Доказательство равенств (5.12), (5.13) проводится полностью аналогично. Следовательно, условие 2) определения обобщенного перекладывающегося разбиения также выполнено.

Перейдем к проверке условия 3). Заметим, что оно эквивалентно отсутствию констант C_R , C_G , C_B , $C_R^2 + C_G^2 + C_B^2 \neq 0$, таких, что

$$\begin{cases} C_R \#R_n + C_G \#G_n + C_B \#B_n = 0, \\ C_R w_R + C_G w_G + C_B w_B = 0. \end{cases}$$

Отсюда ясно, что вместо w_R^i , w_G^i и w_B^i можно взять первые 2 $\mathbb{R}^3$ -координаты векторов w_R , w_G и w_B соответственно. Непосредственное вычисление дает, что

$$\begin{aligned} w_R &= \left(\frac{2 - 2\zeta - \zeta^2}{3 - 2\zeta - \zeta^2}; \frac{-\zeta}{3 - 2\zeta - \zeta^2}; \frac{-\zeta^2}{3 - 2\zeta - \zeta^2} \right), \\ w_G &= \left(\frac{-\zeta - \zeta^2}{3 - 2\zeta - \zeta^2}; \frac{3 - 3\zeta - 2\zeta^2}{3 - 2\zeta - \zeta^2}; \frac{-\zeta + \zeta^2}{3 - 2\zeta - \zeta^2} \right), \\ w_B &= \left(\frac{-\zeta}{3 - 2\zeta - \zeta^2}; \frac{-\zeta^2}{3 - 2\zeta - \zeta^2}; \frac{2 - 3\zeta}{3 - 2\zeta - \zeta^2} \right). \end{aligned}$$

Так как $1/(3 - 2\zeta - \zeta^2) \neq 0$, условие (2.4) перепишется в виде

$$\begin{vmatrix} \sharp R_N & \sharp G_N & \sharp B_N \\ 2 - 2\zeta - \zeta^2 & -\zeta - \zeta^2 & -\zeta \\ -\zeta & 3 - 3\zeta - 2\zeta^2 & -\zeta^2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Непосредственное вычисление определителя дает

$$(-2\sharp R_N + 6\sharp B_N) + \zeta(6\sharp R_N - 14\sharp B_N) + \zeta^2(3\sharp G_N - 4\sharp B_N) \neq 0.$$

Используя формулы (5.5) для $\sharp R_N$, $\sharp G_N$ и $\sharp B_N$, получим, что числа $-2\sharp R_N + 6\sharp B_N$, $6\sharp R_N - 14\sharp B_N$ и $3\sharp G_N - 4\sharp B_N$ целые и одновременно не обращаются в нуль. Поэтому для доказательства выполнимости условия 3) остается заметить, что числа 1, ζ и ζ^2 линейно независимы над кольцом целых чисел $\mathbb{Z}$.

Таким образом, теорема 9 полностью доказана.

СЛЕДСТВИЕ 13. Для любого $N \geq 0$ множества $\mathbb{R}_i^N$, $\mathbb{G}_i^N$, $\mathbb{B}_i^N$ являются $BR(C_N)$ -множествами относительно сдвига S_N с некоторыми эффективно вычислимыми $C_N > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО немедленно получается комбинацией утверждений теорем 2 и 9.

ТЕОРЕМА 14. Существует абсолютная постоянная $C > 0$ такая, что для любого $N \geq 0$ множества $\mathbb{R}_i^N$, $\mathbb{G}_i^N$, $\mathbb{B}_i^N$ являются $BR(C)$ -множествами относительно сдвига S_N .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (3.1)–(3.3) следует, что достаточно доказать теорему для множеств $\mathbb{R}_0^N$, $\mathbb{G}_0^N$ и $\mathbb{B}_0^N$.

Пусть $\mathbb{X}$ – один из символов $\mathbb{R}$, $\mathbb{G}$, $\mathbb{B}$. Рассматривая неравенство (3.9) относительно L^∞ -нормы, находим

$$\sup_n |r(v_N, \mathbb{X}_0^N, n)| \leq \|A_N^{-1}\|_{L^\infty} \|a_N\|_{L^\infty},$$

где с учетом (5.5)

$$A_N = \begin{pmatrix} \sharp t_{N+2} & \sharp t_{N+1} + t_N & \sharp t_{N+1} \\ w_R^1 & w_G^1 & w_B^1 \\ w_R^2 & w_G^2 & w_B^2 \end{pmatrix}, \quad a_N = (t_{N+3} + t_{N+1} - 3, K_1, K_2)^t.$$

Характеристическое уравнение для последовательности трибоначчи имеет один действительный корень, равный $\zeta^{-1} > 1$, и два комплексных корня $\beta, \tilde{\beta}$, по модулю меньших 1. Поэтому для чисел трибоначчи t_N имеет место явная формула

$$t_N = c_1 \zeta^{-N} + c_2 \beta^N + c_3 \tilde{\beta}^N$$

с некоторыми эффективно вычислимыми c_1, c_2, c_3 . Легко проверить, что $|\beta| = |\tilde{\beta}| = \sqrt{\zeta}$, что дает асимптотику

$$t_N = c_1 \zeta^{-N} + O(\zeta^{N/2}). \quad (5.14)$$

Используя полученную асимптотику, получаем, что $\det A_N = c_4 \zeta^{-N} + O(1)$, $c_4 \neq 0$, а алгебраические дополнения A_{ij} матрицы A_N суть $O(1)$ для $i = 1$ и $O(\zeta^{-N})$ для $i = 2, 3$. Отсюда находим, что все элементы матрицы A_N^{-1} ограничены некоторой константой c_5 , не зависящей от N . Так как для произвольной матрицы $X = (x_{ij})$ L^∞ -норма вычисляется по правилу $\|X\|_{L^\infty} = \max_i \sum_j |x_{ij}|$, получаем

$$\|A_N^{-1}\| < c_6$$

для некоторой постоянной c_6 , не зависящей от N . Далее, используя асимптотику (5.14) и определение L^∞ -нормы вектора, находим

$$\|a_N\|_{L^\infty} < c_7 \zeta^{-N}.$$

Таким образом, справедлива оценка

$$\sup_n |r(v_N, \mathbb{X}_0^N, n)| \leq c_8 \zeta^{-N}. \quad (5.15)$$

Далее, из доказательства теоремы 2 видно, что значения постоянных C_N , введенных в следствии 13, однозначно определяются системами неравенств (3.4), (3.7), (3.8), записанными для соответствующих N . При этом из доказательства теоремы 9 легко увидеть, что вид неравенств (3.7), (3.8) не зависит от N . Неравенство (3.4) применительно к разбиению (5.4) принимает вид

$$|\sharp R_N r(v_N, \mathbb{R}_0^N, n) + \sharp G_N r(v_N, \mathbb{G}_0^N, n) + \sharp B_N r(v_N, \mathbb{B}_0^N, n)| \leq \sharp R_N + \sharp G_N + \sharp B_N - 3. \quad (5.16)$$

Покажем, что оно также может быть преобразовано к виду, не зависящему от N .

С учетом асимптотики (5.14), формул (5.5) и оценки (5.15) перепишем (5.16) в виде

$$\begin{aligned} & |c_1 \zeta^{-N} (\zeta^{-2} r(v_N, \mathbb{R}_0^N, n) + (\zeta^{-1} + 1) r(v_N, \mathbb{G}_0^N, n) + \zeta^{-1} r(v_N, \mathbb{B}_0^N, n)) + O(\zeta^{-N/2})| \\ & \leq c_1 (\zeta^{-(N+2)} + 2\zeta^{-(N+1)} + \zeta^{-N}) + O(1), \end{aligned}$$

причем константы под знаком $O(\cdot)$ не зависят ни от n , ни от N . Поделив данное равенство на $c_1 \zeta^{-(N+2)}$, перепишем его в виде

$$|r(v_N, \mathbb{R}_0^N, n) + (\zeta + \zeta^2) r(v_N, \mathbb{G}_0^N, n) + \zeta r(v_N, \mathbb{B}_0^N, n)| = O(1).$$

Константа в $O(1)$ не зависит ни от n , ни от N , что и доказывает теорему.

ЗАМЕЧАНИЕ 15. Уточняя предыдущее рассуждение, можно показать, что константа C из теоремы 14 эффективно вычислима.

6. Фракталы Рози. Следуя [19], рассмотрим ренормализационные множества

$$\mathcal{T} = \lim_{k \rightarrow \infty} M^k(\pi(\Theta^k(D_0))), \quad \mathcal{T}_i = \lim_{k \rightarrow \infty} M^k(\pi(\Theta^k(D_0^{(i)}))).$$

Данные множества корректно определены. При этом множество $\mathcal{T}$ есть односвязное множество с фрактальной границей, а множество $\mathcal{T}^{(i)}$ подобно $\mathcal{T}$ с коэффициентом ζ^i . При этом

$$\mathcal{T} = \prod_{i=1}^3 \mathcal{T}^{(i)}.$$

Введенные множества называют *фракталами Рози*. Впервые они были рассмотрены в работе [7]. Фрактал Рози, разбитый на три подобных ему фрактала, изображен на рис. 4.

Рис. 4. Фрактал Рози.

ТЕОРЕМА 16. *Фрактал Рози $\mathcal{T}$ является фундаментальной областью решетки L_0 , а отображение $S_{\mathcal{R}}^*$, определенное равенством $S_{\mathcal{R}}^*(x) = x + \pi(e_i)$ при $x \in \mathcal{T}^{(i)}$, изоморфно сдвигу тора.*

Рассмотрим теперь разбиение

$$T_N = \prod_{i=0}^{\#R_N-1} R_i^N \sqcup \prod_{i=0}^{\#G_N-1} G_i^N \sqcup \prod_{i=0}^{\#B_N-1} B_i^N.$$

Ему соответствует разбиение множества D_N вида

$$D_N = \prod_{i=0}^{\#R_N-1} (x_i^{(1)}, 1^*) \sqcup \prod_{i=0}^{\#G_N-1} (x_i^{(2)}, 2^*) \sqcup \prod_{i=0}^{\#B_N-1} (x_i^{(3)}, 3^*).$$

Из определений $\mathcal{T}$ и T_N следует, что

$$\mathcal{T} = \lim_{k \rightarrow \infty} M^{N+k}(\pi(\Theta^k(D_N))).$$

Определим множества

$$\mathcal{R}_i^N = \lim_{k \rightarrow \infty} M^{N+k}(\pi(\Theta^k(x^{(1)}, 1^*))).$$

Тогда $\mathcal{R}_i^N$ представляет собой множество $M^N \mathcal{T}^{(i)}$, сдвинутое на некоторый вектор и, следовательно, подобно фракталу Рози. Аналогично можно определить множества $\mathcal{G}_i^N, \mathcal{B}_i^N$.

Отсюда получаем разбиение

$$\mathcal{T} = \coprod_{i=0}^{\sharp R_N-1} \mathcal{R}_i^N \sqcup \coprod_{i=0}^{\sharp G_N-1} \mathcal{G}_i^N \sqcup \coprod_{i=0}^{\sharp B_N-1} \mathcal{B}_i^N \tag{6.1}$$

фрактала Розы на подобные ему фракталы. Разбиение (6.1) впервые было введено в работе [11] под названием *разбиения Розы порядка N* . Разбиения Розы малых порядков изображены на рис. 5.

Рис. 5. Разбиения Розы порядков $0 \leq N \leq 4$.

Очевидно, что действие отображения $S_{\mathcal{R}}^*$ на разбиении (6.1) изоморфно действию отображения S_N^* на исходном разбиении. Таким образом, нами доказана следующая теорема.

ТЕОРЕМА 17. *Разбиение Розы порядка N порождает разбиение тора на фрактальные $BR(C)$ -множества с эффективно вычислимой константой C .*

Отметим, что в работе [11] содержится принципиально иное доказательство теоремы 17 с $C = 1.7$.

7. Дальнейшие обобщения. В заключение кратко обсудим ряд дальнейших обобщений рассмотренных нами конструкций.

Рис. 6. Деформация подстановочной конструкции.

Во-первых, очевидно, что описанная нами конструкция обобщенного перекладывающегося разбиения (5.4) носит аффинный характер, и без изменения доказательств мы можем осуществить деформацию рассматриваемой подстановочной конструкции, выбрав в качестве векторов e_1, e_2, e_3 произвольную тройку линейно независимых векторов в $\mathbb{R}^3$. При этом в общем случае мы будем получать аффинно

неэквивалентные аналоги разбиения (5.4) (рис. 6). Действительно, уже при $N = 0$ имеем

$$T_0 = R_0^0 \sqcup G_0^0 \sqcup B_0^0,$$

где R_0^0 , G_0^0 , B_0^0 представляют собой тройку параллелограммов, натянутых на векторы $\pi(e_1)$, $\pi(e_2)$, $\pi(e_3)$ (рис. 7). При этом в силу линейной независимости e_1 , e_2 , e_3 в качестве $\pi(e_1)$, $\pi(e_2)$, $\pi(e_3)$ можно получить любую тройку рационально независимых векторов, ни один из которых не лежит в секторе, образованном двумя другими векторами. Более того, применяя процедуру ренормализации, описанную в предыдущем пункте, получим разбиение тора на фрактальные множества, в общем случае аффинно не эквивалентное разбиению Рози.

Рис. 7. Тройка параллелограммов, натянутых на векторы $\pi(e_1)$, $\pi(e_2)$, $\pi(e_3)$.

Во-вторых, параллелограммы R_i^N , G_i^N , B_i^N могут быть заменены на “обобщенные” параллелограммы путем замены их сторон копиями произвольных гладких кривых γ_1 , γ_2 и γ_3 с тем условием, чтобы параллельные стороны заменялись копиями одной и той же кривой. Если введенные кривые не будут иметь общих точек, отличных от вершин параллелограммов, мы вновь получим обобщенное перекладывающееся разбиение тора (рис. 8).

Рис. 8. Обобщенные перекладывающиеся разбиения тора, полученные деформацией сторон параллелограммов.

В-третьих, подстановка Рози является очень частным случаем гораздо более общей конструкции обобщенных подстановок [22], [19]. При этом можно выписать условия на подстановку, при которых справедливы аналоги теорем 8 и 16. При этом возникает естественный вопрос: справедливы ли в этом случае аналоги теорем 9, 14 и 17? Ответ в настоящее время неизвестен.

Теорема 2 допускает естественное обобщение на случай разбиений d -мерного тора $\mathbb{T}^d$ на множества $d + 1$ типа. Доказательство соответствующего обобщения будет полностью аналогично доказательству теоремы 2. К сожалению, в настоящее время неизвестны конструкции обобщенных перекладывающихся разбиений тора в размерностях $d > 2$. Возможно, они могут быть получены при помощи обобщенных подстановок и обобщенных фракталов Рози [19]. Отметим также, что при $d = 1$ обобщенные перекладывающиеся разбиения представляют собой разбиения окружности на отрезки двух различных длин, известные под названием разбиений Фибоначчи [23]–[25].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] H. Weyl, “Über die Gleichverteilung von Zahlen mod. Eins”, *Math. Ann.*, **77**:3 (1916), 313–352.
- [2] E. Hecke, “Über analytische Funktionen und die Verteilung von Zahlen mod. Eins”, *Hamb. Abh.*, **1** (1921), 54–76.
- [3] H. Kesten, “On a conjecture of Erdős and Szűs related to uniform distribution mod 1”, *Acta Arith.*, **12** (1966), 193–212.
- [4] I. Oren, “Admissible functions with multiple discontinuities”, *Israel J. Math.*, **42**:4 (1982), 353–360.
- [5] А. В. Шутов, “Проблема Гекке–Кестена для нескольких интервалов”, *Чебышевский сб.*, **12**:1 (2011), 172–177.
- [6] P. Liardet, “Regularities of distribution”, *Compositio Math.*, **61**:3 (1987), 267–293.
- [7] G. Rauzy, “Nombres algébriques et substitutions”, **110**:2 (1982), 147–178.
- [8] R. Szűs, “Über die Verteilung der Vielfachen einer Komplexen Zahl nach dem Modul des Einheitsquadrats”, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, **5** (1954), 35–39.
- [9] А. А. Абросимова, “Множества ограниченного остатка на двумерном торе”, *Чебышевский сб.*, **12**:4 (2011), 15–23.
- [10] В. Г. Журавлев, “Многогранники ограниченного остатка”, *Математика и информатика*, 1, К 75-летию со дня рождения Анатолия Алексеевича Карацубы, Совр. пробл. матем., **16**, МИАН, М., 2012, 82–102.
- [11] В. Г. Журавлев, “Разбиения Рози и множества ограниченного остатка на торе”, *Труды по теории чисел*, Зап. научн. сем. ПОМИ, **322**, ПОМИ, СПб., 2005, 83–106.
- [12] А. В. Шутов, “Двумерная проблема Гекке–Кестена”, *Чебышевский сб.*, **12**:2 (2011), 151–162.
- [13] А. В. Шутов, “Об одном семействе двумерных множеств ограниченного остатка”, *Чебышевский сб.*, **12**:4 (2011), 264–271.
- [14] S. Ferenczi, “Bounded remainder sets”, *Acta Arith.*, **61**:4 (1992), 319–326.
- [15] G. Rauzy, *Ensembles à restes bornés*, Exp. No. 24, Seminaire de Theorie des Nombres, Univ. Bordeaux I, 1984.
- [16] В. Г. Журавлев, “Многомерная теорема Гекке о распределении дробных частей”, *Алгебра и анализ*, **24**:1 (2012), 95–130.
- [17] В. В. Красильщиков, А. В. Шутов, “Описание и точные значения максимума и минимума остаточного члена проблемы распределения дробных долей”, *Матем. заметки*, **89**:1 (2011), 43–52.
- [18] А. В. Шутов, “Оптимальные оценки в проблеме распределения дробных долей на множествах ограниченного остатка”, *Вестн. СамГУ. Естественнонаучн. сер.*, 2007, № 7 (57), 168–175.
- [19] *Substitutions in Dynamics, Arithmetics and Combinatorics*, Lecture Notes in Math., **1794**, eds. N. Pytheas Fogg, V. Berthé, S. Ferenczi, C. Mauduit, A. Siegel, Springer-Verlag, Berlin, 2001.

- [20] А. В. Шутов, “Перекладывания на торе и многомерная проблема Гекке–Кестена”, *Уч. зап. Орловск. гос. ун-та*, **6**:2 (2012), 249–253.
- [21] Д. В. Кузнецова, А. В. Шутов, “О временах первого возвращения для сдвигов тора”, *Чебышевский сб.*, **14**:4 (2013), 127–130.
- [22] P. Arnoux, S. Ito, “Pisot substitutions and Rauzy fractals”, *Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin*, **8**:2 (2011), 181–207.
- [23] В. Г. Журавлев, “Одномерные разбиения Фибоначчи”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **71**:2 (2007), 89–122.
- [24] А. В. Шутов, *Обобщенные разбиения Фибоначчи и их приложения*, Lambert Acad. Publ., 2012.
- [25] А. В. Шутов, “Системы счисления и множества ограниченного остатка”, *Чебышевский сб.*, **7**:3 (2006), 110–128.

Д. В. Кузнецова

Владимирский государственный университет
имени Александра Григорьевича
и Николая Григорьевича Столетовых
E-mail: WolvShatakeruk@gmail.com

Поступило

18.05.2015

А. В. Шутов

Владимирский государственный университет
имени Александра Григорьевича
и Николая Григорьевича Столетовых
E-mail: a1981@mail.ru