Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. А. Давыдова, Существование и устойчивость решений с пограничными слоями в многомерных сингулярно возмущенных задачах реакция-диффузия-адвекция, *Матем. заметки*, 2015, том 98, выпуск 6, 853–864

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10623>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.164.48.24

26 апреля 2023 г., 09:19:25

Существование и устойчивость решений с пограничными слоями в многомерных сингулярно возмущенных задачах реакция-диффузия-адвекция

М. А. Давыдова

Рассматривается краевая задача для нелинейного эллиптического уравнения, содержащего малый параметр при производных и вырождающегося в конечное уравнение, в случае равенства нулю малого параметра. Доказана теорема существования решения с пограничным слоем и его устойчивость по Ляпунову.

Библиография: 10 названий.

DOI: 10.4213/mzm10623

1. Постановка задачи. Рассмотрим следующую сингулярно возмущенную задачу с малым параметром $\varepsilon > 0$:

$$\begin{aligned}\varepsilon^2 \Delta u - f(\varepsilon \nabla u, u, x) &= 0, & x = (x_1, \dots, x_N) \in D \subset \mathbb{R}^N, \\ u(x, \varepsilon) &= g(x), & x \in \partial D,\end{aligned}\tag{1.1}$$

где функции f , g и граница ∂D – достаточно гладкие (степень гладкости определяется порядком строящейся асимптотики), $\Delta = \sum_{k=1}^N \partial^2 / \partial x_k^2$ – оператор Лапласа. Под обозначением $\varepsilon \nabla u$ подразумевается зависимость функции f от аргументов $\nu_1 \equiv \varepsilon \partial u / \partial x_1$, $\nu_2 \equiv \varepsilon \partial u / \partial x_2$, $\dots$, $\nu_N \equiv \varepsilon \partial u / \partial x_N$. Предполагается также, что функция f удовлетворяет стандартному условию не более чем квадратичного роста по ∇u .

Исследование решений задачи (1.1) с пограничными слоями непосредственно связано с изучением вопроса о существовании решений с внутренними слоями (контрастных структур) в задачах типа реакция-диффузия-адвекция [1]–[4]. Следует отметить, что теория контрастных структур является одним из приоритетных направлений в современной теории сингулярных возмущений.

Будем предполагать выполнение следующего условия

УСЛОВИЕ 1. *Вырожденное уравнение $f(0, u, x) = 0$ имеет изолированное решение $u = \varphi(x)$, причем $f_u(0, \varphi(x), x) > 0$ при $x \in \bar{D}$.*

Определим достаточно малую окрестность ∂D^δ поверхности ∂D : $\partial D^\delta = \{x \in D : \text{dist}(x, \partial D) < \delta\}$, $\delta > 0$, и локальные координаты в этой окрестности $x \in \partial D^\delta \mapsto (y, r) \in \partial D \times [0; \delta]$, где $y \in \partial D$, причем $r = \text{dist}(x, \partial D) = \text{dist}(x, y)$. Если $\mathbf{n}(y)$ – единичная внутренняя нормаль к поверхности ∂D в точке y , то взаимно однозначное соответствие между координатами дается выражениями

$$x_i = y_i(\theta_1, \dots, \theta_{N-1}) + r n_i(\theta_1, \dots, \theta_{N-1}), \quad i = 1, \dots, N, \quad (1.2)$$

где $\{\theta_1, \dots, \theta_{N-1}\}$ – криволинейные координаты на поверхности ∂D , $n_i(\theta_1, \dots, \theta_{N-1})$ – направляющие косинусы нормали $\mathbf{n}(y)$. В этой системе координат производные $\partial u / \partial x_i$ вычисляются следующим образом:

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = d^i(r, \theta) \frac{\partial u}{\partial r} + \sum_{j=1}^{N-1} q_j^i(r, \theta) \frac{\partial u}{\partial \theta_j}, \quad i = 1, \dots, N,$$

где $d^i(r, \theta)$, $q_j^i(r, \theta)$ – известные функции, $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_{N-1}) \in \Theta$, Θ – область изменения координаты θ на поверхности ∂D .

На поверхности ∂D определим присоединенную систему уравнений

$$\frac{\partial \tilde{v}}{\partial \rho} = f(d^1(0, \theta) \tilde{v}, \dots, d^N(0, \theta) \tilde{v}, \tilde{u}, 0, \theta), \quad \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \rho} = \tilde{v}, \quad 0 < \rho < +\infty, \quad (1.3)$$

где θ рассматривается как параметр. Анализ линеаризованной системы, которая соответствует системе (1.3), показывает, что в силу условия 1 локальное поведение фазовых траекторий в малой окрестности точки покоя $(\varphi(0, \theta), 0)$ на плоскости $(\tilde{u}, \tilde{v})$ будет таким же, как и в случае точки покоя типа седла [5; с. 253–260]. Далее мы предполагаем выполнение следующего условия.

УСЛОВИЕ 2. На фазовой плоскости системы (1.3) прямая $\tilde{u} = (0, g)$ пересекает сепаратрису, входящую в седло $(\varphi(0, \theta), 0)$ при $\rho \rightarrow +\infty$ и $\theta \in \Theta$.

2. Асимптотика, существование и устойчивость решений с пограничными слоями. Асимптотику решения погранслоного типа ищем в виде

$$u(x, \varepsilon) = \bar{u}(x, \varepsilon) + \Pi u(\rho, \theta, \varepsilon), \quad (2.1)$$

где

$$\bar{u}(x, \varepsilon) = \bar{u}_0(x_1, \dots, x_N) + \varepsilon \bar{u}_1(x_1, \dots, x_N) + \dots$$

– регулярный ряд,

$$\Pi u(\rho, \theta_1, \dots, \theta_{N-1}, \varepsilon) = \Pi_0 u(\rho, \theta_1, \dots, \theta_{N-1}) + \varepsilon \Pi_1 u(\rho, \theta_1, \dots, \theta_{N-1}) + \dots$$

– пограничный ряд, описывающий пограничный слой в окрестности границы ∂D , $\rho = r/\varepsilon$. Далее, учитывая представление нелинейного оператора $\varepsilon^2 \Delta - f(\varepsilon \nabla \dots, \dots, x)$

в переменных (r, θ)

$$\begin{aligned} & \varepsilon^2 \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + k(r, \theta) \frac{\partial}{\partial r} + \sum_{j=1}^{N-1} \left(m_j(r, \theta) \frac{\partial^2}{\partial \theta_j^2} + \bar{n}_j(r, \theta) \frac{\partial}{\partial \theta_j} \right) \right] \\ & - f \left(\varepsilon \left(d^1(r, \theta) \frac{\partial}{\partial r} + \sum_{j=1}^{N-1} q_j^1(r, \theta) \frac{\partial}{\partial \theta_j} \right), \dots, \right. \\ & \left. \varepsilon \left(d^N(r, \theta) \frac{\partial}{\partial r} + \sum_{j=1}^{N-1} q_j^N(r, \theta) \frac{\partial}{\partial \theta_j} \right), \dots, r, \theta \right), \end{aligned}$$

где $k(r, \theta)$, $m_j(r, \theta)$, $\bar{n}_j(r, \theta)$ – известные функции, и подставляя ряд (2.1) в уравнение (1.1) в соответствии с методом пограничных функций [6] получаем уравнения для определения членов этого ряда:

$$\begin{aligned} & \varepsilon^2 \Delta \bar{u}(x, \varepsilon) - f \left(\varepsilon \frac{\partial \bar{u}(x, \varepsilon)}{\partial x_1}, \dots, \varepsilon \frac{\partial \bar{u}(x, \varepsilon)}{\partial x_N}, \bar{u}(x, \varepsilon), x \right) = 0, \\ & \left[\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \varepsilon k(\varepsilon \rho, \theta) \frac{\partial}{\partial \rho} + \varepsilon^2 \sum_{j=1}^{N-1} \left(m_j(\varepsilon \rho, \theta) \frac{\partial^2}{\partial \theta_j^2} + \bar{n}_j(\varepsilon \rho, \theta) \frac{\partial}{\partial \theta_j} \right) \right] \Pi u(\rho, \theta, \varepsilon) \\ & - f \left(d^1(\varepsilon \rho, \theta) \left(\varepsilon \frac{\partial \bar{u}}{\partial r}(\varepsilon \rho, \theta, \varepsilon) + \frac{\partial \Pi u}{\partial \rho} \right) + \varepsilon \sum_{j=1}^{N-1} q_j^1(\varepsilon \rho, \theta) \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \theta_j}(\varepsilon \rho, \theta, \varepsilon) + \frac{\partial \Pi u}{\partial \theta_j} \right), \dots, \right. \\ & \left. d^N(\varepsilon \rho, \theta) \left(\varepsilon \frac{\partial \bar{u}}{\partial r}(\varepsilon \rho, \theta, \varepsilon) + \frac{\partial \Pi u}{\partial \rho} \right) \right. \\ & \left. + \varepsilon \sum_{j=1}^{N-1} q_j^N(\varepsilon \rho, \theta) \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \theta_j}(\varepsilon \rho, \theta, \varepsilon) + \frac{\partial \Pi u}{\partial \theta_j} \right), \bar{u}(\varepsilon \rho, \theta, \varepsilon) + \Pi u, \varepsilon \rho, \theta \right) \\ & + f \left(\varepsilon \left(d^1(\varepsilon \rho, \theta) \frac{\partial \bar{u}}{\partial r}(\varepsilon \rho, \theta, \varepsilon) + \sum_{j=1}^{N-1} q_j^1(\varepsilon \rho, \theta) \frac{\partial \bar{u}}{\partial \theta_j}(\varepsilon \rho, \theta, \varepsilon) \right), \dots, \right. \\ & \left. \varepsilon \left(d^N(\varepsilon \rho, \theta) \frac{\partial \bar{u}}{\partial r}(\varepsilon \rho, \theta, \varepsilon) + \sum_{j=1}^{N-1} q_j^N(\varepsilon \rho, \theta) \frac{\partial \bar{u}}{\partial \theta_j}(\varepsilon \rho, \theta, \varepsilon) \right), \bar{u}(\varepsilon \rho, \theta, \varepsilon), \varepsilon \rho, \theta \right) = 0. \end{aligned}$$

В нулевом приближении приходим к нелинейной задаче

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \rho^2} - f \left(d^1(0, \theta) \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \rho}, \dots, d^N(0, \theta) \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \rho}, \tilde{u}, 0, \theta \right) = 0, \\ & \tilde{u}(0, \theta) = g(0, \theta), \quad \tilde{u}(+\infty, \theta) = \varphi(0, \theta), \end{aligned} \quad (2.2)$$

где введено обозначение $\tilde{u}(\rho, \theta) = \bar{u}_0(0, \theta) + \Pi_0 u(\rho, \theta)$, $\bar{u}_0(r, \theta) = \varphi(r, \theta)$. Уравнению из системы (2.2) соответствует система (1.3). Условие 2 гарантирует существование решения задачи (2.2), но не гарантирует его единственность, так как прямая $\tilde{u} = g(\rho, \theta)$ на плоскости $(\tilde{u}, \tilde{\nu})$ может пересекать сепаратрису, входящую в седло $(\varphi(0, \theta), 0)$, более одного раза. Это возможно, если сепаратриса пересекает ось $\tilde{\nu} = 0$. В качестве решения задачи (2.2) выберем ту функцию, которая монотонно изменяется от значения $\tilde{u} = g(0, \theta)$ при $\rho = 0$ до значения $\tilde{u} = \varphi(0, \theta)$ при $\rho \rightarrow +\infty$ и фиксированном $\theta \in \Theta$. При этом, если $g(0, \theta) < \varphi(0, \theta)$, то $\tilde{u}(\rho, \theta)$ возрастает ($\tilde{\nu} > 0$); если

$g(0, \theta) > \varphi(0, \theta)$, то $\tilde{u}(\rho, \theta)$ убывает ($\tilde{\nu} < 0$). Далее, для определенности будем считать, что $g(0, \theta) > \varphi(0, \theta)$ и фазовый портрет выглядит так, как показано на рис. 1.

Рис. 1

Справедлива следующая

ЛЕММА. Функции $\Pi_0 u$ и $\tilde{\nu} = \partial \Pi_0 u / \partial \rho$ удовлетворяют неравенствам

$$C(\theta) \exp(-\lambda_1(\theta) - \sigma(\theta))\rho \leq |\Pi_0 u| \leq C(\theta) \exp(-\lambda_1(\theta) + \sigma(\theta))\rho, \quad (2.3)$$

$$C(\theta) \exp(-\lambda_1(\theta) - \sigma(\theta))\rho \leq |\tilde{\nu}| \leq C(\theta) \exp(-\lambda_1(\theta) + \sigma(\theta))\rho, \quad (2.4)$$

где $-\lambda_1(\theta) < 0$ – отрицательное собственное значение матрицы

$$\begin{pmatrix} f_\nu(d^1(0, \theta)\nu, \dots, d^N(0, \theta)\nu, u, 0, \theta) & f_u(d^1(0, \theta)\nu, \dots, d^N(0, \theta)\nu, u, 0, \theta) \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

при $\nu = 0$, $u = \varphi(0, \theta)$, $\theta \in \Theta$. Функция $\sigma(\theta) > 0$ достаточно малая, не зависящая от ε , $0 \leq \rho < +\infty$, $C(\theta) > 0$.

Не зависящие от ε положительные функции, значения которых не являются существенными, здесь и далее обозначаются символами $C(\theta)$ и $C_j(\theta)$.

Для доказательства леммы в окрестности точки $(\varphi(0, \theta), 0)$ воспользуемся представлением

$$\tilde{\nu}(\tilde{u}, \theta) = \tilde{\nu}(\varphi(0, \theta), \theta) + \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial \tilde{u}}(\varphi(0, \theta), \theta)(\tilde{u} - \varphi(0, \theta)) + o(\tilde{u} - \varphi(0, \theta)).$$

Дифференцируя уравнение $\tilde{\nu} \partial \tilde{\nu} / \partial \tilde{u} = f(d^1(0, \theta)\tilde{\nu}, \dots, d^1(0, \theta)\tilde{\nu}, \tilde{u}, 0, \theta)$ по $\tilde{u}$ и полагая $\tilde{u} = \varphi(0, \theta)$, $\tilde{\nu} = 0$, находим

$$\left. \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial \tilde{u}} \right|_{\tilde{u}=\varphi(0, \theta)} = \frac{1}{2} (f_{\tilde{\nu}}(0, \varphi(0, \theta), 0, \theta) \pm \sqrt{f_{\tilde{\nu}}^2(0, \varphi(0, \theta), 0, \theta) + 4f_{\tilde{u}}(0, \varphi(0, \theta), 0, \theta)}),$$

где

$$f_{\tilde{\nu}}(0, \varphi(0, \theta), 0, \theta) = \sum_{k=1}^N d^k(0, \theta) f_{\nu_k}(0, \varphi(0, \theta), 0, \theta) = \bar{f}_\nu(\theta).$$

Следовательно,

$$\tilde{\nu}(\tilde{u}, \theta) = -\lambda_1(\theta)(\tilde{u} - \varphi(0, \theta)) + o(\tilde{u} - \varphi(0, \theta)),$$

где

$$-\lambda_1(\theta) = 2^{-1}(\bar{f}_\nu(\theta) - \sqrt{\bar{f}_\nu^2(\theta) + 4\bar{f}_u(\theta)}), \quad \bar{f}_u(\theta) = f_u(0, \varphi(0, \theta), 0, \theta).$$

Значит, при достаточно больших $\rho > \tilde{\rho}$, т.е. при малых значениях $|\tilde{u} - \varphi(0, \theta)|$ найдутся функции $\chi_1(\theta)$ и $\chi_2(\theta)$ такие, что

$$-\chi_2(\theta)(\tilde{u} - \varphi(0, \theta)) \leq \tilde{v}(\tilde{u}, \theta) \leq -\chi_1(\theta)(\tilde{u} - \varphi(0, \theta)),$$

$-\chi_1(\theta) = -\lambda_1(\theta) + \sigma(\theta)$, $-\chi_2(\theta) = -\lambda_1(\theta) - \sigma(\theta)$, $\sigma(\theta) > 0$ – достаточно малая, не зависящая от ε функция. Интегрируя неравенство

$$-\chi_2(\theta)\Pi_0 u \leq \frac{\partial \Pi_0 u}{\partial \rho}(\rho, \theta) \leq -\chi_1(\theta)\Pi_0 u \quad (2.5)$$

по ρ в пределах от $\tilde{\rho}$ до ρ , получаем оценку (2.3). Если учесть (2.3), то из неравенства (2.5) следует оценка (2.4).

В дальнейшем нам понадобятся оценки производных $\partial \Pi_0 u / \partial \theta_j$ и $\partial \tilde{v} / \partial \rho$, которые легко получить. Действительно, если продифференцировать задачу (2.2) по θ_j , то относительно функции $q_j(\rho, \theta) = \partial \Pi_0 u / \partial \theta_j$ приходим к задаче

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 q_j}{\partial \rho^2} - \sum_{k=1}^N d^k(0, \theta) \tilde{f}_{\nu_k}(\rho, \theta) \frac{\partial q_j}{\partial \rho} - \tilde{f}_u(\rho, \theta) q_j &= G_j(\rho, \theta), \\ q_j(0, \theta) &= \frac{\partial g}{\partial \theta_j}(0, \theta) - \frac{\partial \varphi}{\partial \theta_j}(0, \theta), \quad q_j(+\infty, \theta) = 0, \end{aligned}$$

решение которой дается формулой

$$\begin{aligned} q_j(\rho, \theta) &= q_j(0, \theta) \tilde{v}^{-1}(0, \theta) \tilde{v}(\rho, \theta) \\ &- \tilde{v}(\rho, \theta) \int_0^\rho p^{-1}(s, \theta) \tilde{v}^{-2}(s, \theta) ds \int_s^{+\infty} p(\eta, \theta) \tilde{v}(\eta, \theta) G_j(\eta, \theta) d\eta, \end{aligned} \quad (2.6)$$

где введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} G_j(\rho, \theta) &= (\tilde{f}_u(\rho, \theta) - \bar{f}_u(\theta)) \frac{\partial \varphi(0, \theta)}{\partial \theta_j} + \tilde{f}_{\theta_j}(\rho, \theta) - \bar{f}_{\theta_j}(\theta) \\ &+ \sum_{k=1}^N (\tilde{f}_{\nu_k}(\rho, \theta) - \bar{f}_{\nu_k}(\theta)) \frac{\partial d^k(0, \theta)}{\partial \theta_j} \frac{\partial \Pi_0 u}{\partial \rho} + \sum_{k=1}^N \bar{f}_{\nu_k}(\theta) \frac{\partial d^k(0, \theta)}{\partial \theta_j} \frac{\partial \Pi_0 u}{\partial \rho}, \\ \tilde{f}_j(\rho, \theta) &= f_j(d^1(0, \theta) \tilde{v}, \dots, d^N(0, \theta) \tilde{v}, \tilde{u}, 0, \theta), \quad \bar{f}_j(\theta) = f_j(0, \varphi(0, \theta), 0, \theta), \\ p(\rho, \theta) &= \exp \left(- \int_0^\rho \sum_{k=1}^N \tilde{f}_{\nu_k}(\eta, \theta) d^k(0, \theta) d\eta \right). \end{aligned}$$

Тогда

$$|G_j(\rho, \theta)| \leq C_j(\theta) |\tilde{v}| + C_j(\theta) |\Pi_0 u| \leq C_j(\theta) \exp(-\chi_1(\theta)\rho). \quad (2.7)$$

Повторяя рассуждения работы [7], приходим к оценке относительно функции $p(\rho, \theta)$:

$$\bar{C}_1(\theta) \exp(-\bar{f}_\nu(\theta)\rho) < p(\rho, \theta) < \bar{C}_2(\theta) \exp(-\bar{f}_\nu(\theta)\rho). \quad (2.8)$$

Оценим произведение $\tilde{\nu}p$, входящее в (2.6):

$$C(\theta) \exp[(\chi_2(\theta) - \bar{f}_\nu(\theta))\rho] < |\tilde{\nu}|p < C(\theta) \exp[(\chi_1(\theta) - \bar{f}_\nu(\theta))\rho].$$

Поскольку

$$-\lambda_1(\theta) = \bar{f}_\nu(\theta) - \sqrt{\bar{f}_\nu^2(\theta) + 4\bar{f}_u(\theta)},$$

где $\bar{f}_u(\theta) > 0$, то при достаточно малом $\sigma(\theta)$ показатель в экспоненте отрицательный. Далее,

$$\tilde{\nu}^{-2}p^{-1} < C(\theta) \exp[(2\chi_2(\theta) + \bar{f}_\nu(\theta))\rho].$$

Из формулы (2.6) с использованием оценок (2.3), (2.4), (2.7) получаем неравенство

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial \Pi_0 u}{\partial \theta_j} \right| &\leq C_j(\theta) \exp[-\chi_1(\theta)\rho] \\ &+ C_j(\theta) \exp[-\chi_1(\theta)\rho] \int_0^\rho \exp[(2\chi_2(\theta) + \bar{f}_\nu(\theta))s] \int_{+\infty}^s \exp[(-2\chi_1(\theta) - \bar{f}_\nu(\theta))\eta] d\eta ds \\ &\leq C_j(\theta) \exp[-\chi_1(\theta)\rho] + C_j(\theta) \exp[(-\chi_1(\theta) + \Delta(\theta))\rho] \leq C_j(\theta) \exp[-\tilde{\chi}_1(\theta)\rho], \end{aligned} \quad (2.9)$$

$0 < \tilde{\chi}_1(\theta) = \chi_1(\theta) - \Delta(\theta) < \chi_1(\theta)$, $\Delta(\theta) > 0$ – малая функция.

Функция $\partial\tilde{\nu}/\partial\rho$ удовлетворяет неравенству

$$C(\theta) \exp(-\chi_1(\theta))\rho \leq \left| \frac{\partial\tilde{\nu}}{\partial\rho} \right| \leq C(\theta) \exp(-\chi_1(\theta))\rho. \quad (2.10)$$

Для доказательства неравенства (2.10) достаточно правую часть первого уравнения из системы (1.3) разложить в ряд с центром в точке покоя:

$$\frac{\partial\tilde{\nu}}{\partial\rho} = \sum_{k=1}^N f_{\nu_k}(0, \varphi(0, \theta), 0, \theta) d^k(0, \theta) \tilde{\nu} + f_u(0, \varphi(0, \theta), 0, \theta) \Pi_0 u + R(\tilde{\nu}, \Pi_0 u).$$

Здесь $R(\tilde{\nu}, \Pi_0 u)$ – остаточный член.

В следующем приближении имеем линейную задачу

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Pi_1 u}{\partial \rho^2} - \sum_{k=1}^N d^k(0, \theta) \tilde{f}_{\nu_k}(\rho, \theta) \frac{\partial \Pi_1 u}{\partial \rho} - \tilde{f}_u(\rho, \theta) \Pi_1 u &= H_1(\rho, \theta), \\ \Pi_1 u(0, \theta) &= -\bar{u}_1(0, \theta), \quad \Pi_1 u(+\infty, \theta) = 0, \end{aligned} \quad (2.11)$$

где

$$\begin{aligned} H_1(\rho, \theta) &= \sum_{k=1}^N \tilde{f}_{\nu_k}(\rho, \theta) \left(d^k(0, \theta) \frac{\partial \varphi}{\partial r}(0, \theta) + \frac{\partial d^k}{\partial r}(0, \theta) \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \rho} \rho + \sum_{j=1}^{N-1} q_j^k(0, \theta) \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \theta_j}(\rho, \theta) \right) \\ &+ \tilde{f}_u(\rho, \theta) \left(\bar{u}_1(0, \theta) + \frac{\partial \varphi}{\partial r}(0, \theta) \rho \right) \\ &+ \tilde{f}_r(\rho, \theta) \rho - \sum_{k=1}^N \bar{f}_{\nu_k}(\theta) \left(d^k(0, \theta) \frac{\partial \varphi}{\partial r}(0, \theta) + \sum_{j=1}^{N-1} q_j^k(0, \theta) \frac{\partial \varphi}{\partial \theta_j}(0, \theta) \right) \\ &- \tilde{f}_u(\theta) \left(\bar{u}_1(0, \theta) + \frac{\partial \varphi}{\partial r}(0, \theta) \rho \right) - \bar{f}_r(\theta) \rho - k(0, \theta) \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \rho}, \end{aligned}$$

и

$$\bar{u}_1(x) = -f_u^{-1}(0, \varphi(x), x) \sum_{k=1}^N f_{\nu_k}(0, \varphi(x), x) \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_k}.$$

Решение задачи (2.11) дается формулой

$$\begin{aligned} \Pi_1 u(\rho, \theta) &= \Pi_1 u(0, \theta) \tilde{\nu}^{-1}(0, \theta) \tilde{\nu}(\rho, \theta) \\ &- \tilde{\nu}(\rho, \theta) \int_0^\rho p^{-1}(s, \theta) \tilde{\nu}^{-2}(s, \theta) ds \int_s^{+\infty} p(\eta, \theta) \tilde{\nu}(\eta, \theta) H_1(\eta, \theta) d\eta. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Получим оценку поведения функции $\Pi_1 u(\rho, \theta)$ при больших значениях ρ . Несложно показать, что

$$\begin{aligned} |H_1(\rho, \theta)| &\leq (C(\theta) + C(\theta)\rho)|\tilde{\nu}| + (C(\theta) + C(\theta)\rho)|\Pi_0 u| + \sum_{j=1}^{N-1} C_j(\theta) \left| \frac{\partial \Pi_0 u}{\partial \theta_j} \right| \\ &\leq C(\theta) \exp(-\tilde{\chi}_1(\theta)\rho). \end{aligned} \quad (2.13)$$

Здесь использовались оценки (2.3), (2.4) и (2.9). С учетом этого и по аналогии с тем, как было получено неравенство (2.9), находим

$$|\Pi_1 u| \leq C(\theta) \exp[(-\chi_1(\theta))\rho] + C(\theta) \exp[(-\chi_1(\theta) + \bar{\Delta}(\theta))\rho] \leq C(\theta) \exp[(-\bar{\chi}_1(\theta))\rho], \quad (2.14)$$

где $0 < \bar{\chi}_1(\theta) = \chi_1(\theta) - \bar{\Delta}(\theta) < \chi_1(\theta)$, $\bar{\Delta}(\theta)$ – малая функция.

Дифференцируя решение (2.12) по ρ , приходим к равенству

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi_1 u}{\partial \rho} &= \Pi_1 u(0, \theta) \tilde{\nu}^{-1}(0, \theta) \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial \rho} \\ &- \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial \rho} \int_0^\rho p^{-1}(s, \theta) \tilde{\nu}^{-2}(s, \theta) ds \int_s^{+\infty} p(\eta, \theta) \tilde{\nu}(\eta, \theta) H_1(\eta, \theta) d\eta \\ &+ p^{-1}(\rho, \theta) \tilde{\nu}^{-1}(\rho, \theta) \int_{+\infty}^\rho p(\eta, \theta) \tilde{\nu}(\eta, \theta) H_1(\eta, \theta) d\eta \end{aligned} \quad (2.15)$$

и далее, оценивая (2.15) с учетом (2.10) и (2.13), приходим к оценке

$$\left| \frac{\partial \Pi_1 u}{\partial \rho} \right| \leq C(\theta) \exp[-\bar{\chi}_1(\theta)\rho]. \quad (2.16)$$

При $n > 1$ получаем линейные задачи

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Pi_n u}{\partial \rho^2} - \sum_{k=1}^N d^k(0, \theta) \tilde{f}_{\nu_k}(\rho, \theta) \frac{\partial \Pi_n u}{\partial \rho} - \tilde{f}_u(\rho, \theta) \Pi_n u &= H_n(\rho, \theta), \\ \Pi_n u(0, \theta) &= -\bar{u}_n(0, \theta), \quad \Pi_n u(+\infty, \theta) = 0, \end{aligned} \quad (2.17)$$

где функции $H_n(\rho, \theta)$ известны и выражаются через члены асимптотики порядка $k < n$, для которых справедливы оценки типа (2.14). Следовательно,

$$|H_n(\rho, \theta)| \leq C(\theta) \exp(-\tilde{\chi}_n(\theta)\rho), \quad \tilde{\chi}_n(\theta) > 0.$$

Поскольку функции $\Pi_n u$ и $\partial \Pi_n u / \partial \rho$ представимы формулами типа (2.12) и (2.15), то имеют место оценки

$$|\Pi_n u| \leq C(\theta) \exp[-\bar{\chi}_n(\theta)\rho], \quad \left| \frac{\partial \Pi_n u}{\partial \rho} \right| \leq C(\theta) \exp[-\bar{\chi}_n(\theta)\rho], \quad 0 < \bar{\chi}_n(\theta) < \chi_1(\theta).$$

Далее напомним, что дважды непрерывно дифференцируемые в D и непрерывные в $D \cup \partial D$ функции $\alpha(x, \varepsilon)$ и $\beta(x, \varepsilon)$ называются соответственно *нижним* и *верхним* решениями задачи (1.1), если они удовлетворяют неравенствам

$$\varepsilon^2 \Delta \alpha - f(\varepsilon \nabla \alpha, \alpha, x) \geq 0, \quad (2.18)$$

$$\varepsilon^2 \Delta \beta - f(\varepsilon \nabla \beta, \beta, x) \leq 0, \quad (2.19)$$

$$\alpha(x, \varepsilon) \leq \beta(x, \varepsilon), \quad (2.20)$$

$$\alpha(x, \varepsilon) \leq g(x) \leq \beta(x, \varepsilon), \quad x \in \partial D. \quad (2.21)$$

Существование функций $\alpha(x, \varepsilon)$ и $\beta(x, \varepsilon)$ гарантирует существование решения $u(x, \varepsilon)$ задачи (1.1), которое удовлетворяет неравенству $\alpha(x, \varepsilon) \leq u(x, \varepsilon) \leq \beta(x, \varepsilon)$. В соответствии с асимптотическим методом дифференциальных неравенств [8], [9] в качестве верхнего решения выберем следующую функцию:

$$\begin{aligned} \beta_n(x, \varepsilon) = & \varphi(x) + \varepsilon \bar{u}_1(x) + \dots + \varepsilon^{n-1} \bar{u}_{n-1}(x) + \varepsilon^n \bar{u}_{n\beta}(x) + \Pi_0 u(\rho, \theta) \\ & + \varepsilon \Pi_1 u(\rho, \theta) + \dots + \varepsilon^{n-1} \Pi_{n-1} u(\rho, \theta) + \varepsilon^n \Pi_n u_\beta(\rho, \theta), \end{aligned}$$

где $\bar{u}_{n\beta}(x) = \bar{u}_n(x) + \gamma$, $\gamma > 0$, функция $\Pi_n u_\beta(\rho, \theta)$ – решение задачи

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Pi_n u_\beta}{\partial \rho^2} - \sum_{k=1}^N d^k(0, \theta) \tilde{f}_{\nu_k}(\rho, \theta) \frac{\partial \Pi_n u_\beta}{\partial \rho} - \tilde{f}_u(\rho, \theta) \Pi_n u_\beta - H_{n\beta}(\rho, \theta) = \omega_\beta(\rho, \theta), \quad \rho > 0, \\ \Pi_n u_\beta(0, \theta) = \Pi_n u(0, \theta), \quad \Pi_n u_\beta(+\infty, \theta) = 0. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \omega_\beta(\rho, \theta) = & -\Psi(\rho, \theta), \quad 0 < \Psi(\rho, \theta) \leq C(\theta) \exp(-\bar{\sigma}\rho), \quad \bar{\sigma} > 0, \quad C(\theta) > 0, \\ H_{n\beta}(\rho, \theta) = & H_n(\rho, \theta) + \gamma(\tilde{f}_u(\rho, \theta) - \bar{f}_u(\theta)). \end{aligned}$$

Аналогично строится нижнее решение $\alpha_n(x, \varepsilon)$, причем задача для определения функции $\Pi_n u_\alpha(\rho, \theta)$ формально совпадает с (2.22) при замене символа “ β ” на символ “ α ”. При этом

$$\begin{aligned} \bar{u}_{n\alpha}(x) = & \bar{u}_n(x) - \gamma, \quad H_{n\alpha}(\rho, \theta) = H_n(\rho, \theta) - \gamma(\tilde{f}_u(\rho, \theta) - \bar{f}_u(\theta)), \\ \omega_\alpha(\rho, \theta) = & \Psi(\rho, \theta). \end{aligned}$$

Проверим выполнение неравенства (2.19):

$$\begin{aligned} & \varepsilon^2 \Delta \beta_n - f(\varepsilon \nabla \beta_n, \beta_n, x) \\ & = O(\varepsilon^{n+1}) - \varepsilon^n \gamma f_u(0, \varphi(0, \theta), 0, \theta) \\ & \quad + \varepsilon^n \left(\frac{\partial^2 \Pi_n u_\beta}{\partial \rho^2} - \sum_{k=1}^N d^k(0, \theta) \tilde{f}_{\nu_k}(\rho, \theta) \frac{\partial \Pi_n u_\beta}{\partial \rho} - \tilde{f}_u(\rho, \theta) \Pi_n u_\beta - H_{n\beta}(\rho, \theta) \right) < 0, \end{aligned}$$

так как $f_u(0, \varphi(0, \theta), 0, \theta) > 0$, а функция $\Pi_n u_\beta$ удовлетворяет задаче (2.22). На границе области имеем

$$\beta_n(x, \varepsilon)|_{x \in \partial D} = g(0, \theta) + \varepsilon^n \gamma > g(0, \theta),$$

что означает выполнение соответствующего неравенства (2.21).

Аналогично проверяется выполнение неравенства (2.18) и соответствующего неравенства (2.21).

Справедливость (2.20) следует из способа построения функций $\alpha_n(x, \varepsilon)$ и $\beta_n(x, \varepsilon)$. Вне зоны пограничного слоя выполнение (2.20) очевидно. Функция

$$V(\rho, \theta) = \Pi_n u_\beta(\rho, \theta) - \Pi_n u_\alpha(\rho, \theta)$$

является решением краевой задачи, которая получается с использованием задачи (2.22) и аналогичной задачи относительно функции $\Pi_n u_\alpha(\rho, \theta)$. Решение этой задачи выписывается явно:

$$\begin{aligned} V(\rho, \theta) &= -\tilde{\nu}(\rho, \theta) \int_0^\rho p^{-1}(s, \theta) \tilde{\nu}^{-2}(s, \theta) ds \\ &\quad \times \int_s^{+\infty} p(\eta, \theta) \tilde{\nu}(\eta, \theta) [H_{n\beta}(\eta, \theta) - H_{n\alpha}(\eta, \theta) - 2\Psi(\eta, \theta)] d\eta \\ &= -2\tilde{\nu}(\rho, \theta) \int_0^\rho p^{-1}(s, \theta) \tilde{\nu}^{-2}(s, \theta) ds \\ &\quad \times \int_s^{+\infty} p(\eta, \theta) \tilde{\nu}(\eta, \theta) [\gamma(\tilde{f}_u(\eta, \theta) - \bar{f}_u(\theta)) - \Psi(\eta, \theta)] d\eta. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Поскольку $\tilde{\nu}(\rho, \theta) < 0$, то выбирая $\Psi(\eta, \theta)$ так, чтобы выражение в квадратных скобках оказалось меньше нуля, обеспечиваем выполнение неравенства (2.20) в зоне пограничного слоя.

Итак, решение $u(x, \varepsilon)$ задачи (1.1) существует, причем имеет место оценка остаточного члена

$$\begin{aligned} |u - U_n| &\leq |u - U_{n+1}| + |U_{n+1} - U_n| \\ &\leq |u - \beta_{n+1}| + |\beta_{n+1} - U_{n+1}| + |U_{n+1} - U_n| \leq C\varepsilon^{n+1}, \end{aligned} \quad (2.24)$$

где U_n — частичная сумма n -го порядка ряда (2.1), константа C не зависит от ε . Таким образом, справедлива

ТЕОРЕМА. Если функции f , g и граница ∂D достаточно гладкие, то при выполнении условий 1, 2 существует решение $u(x, \varepsilon)$ задачи (1.1), для которого в области $D \cup \partial D$ справедлива равномерная оценка (2.24).

ЗАМЕЧАНИЕ. Если рассмотреть параболическую задачу, соответствующую задаче (1.1), с начальной функцией $u^0(x)$ такой, что $\alpha_n(x, \varepsilon) \leq u^0(x) \leq \beta_n(x, \varepsilon)$, то решение $u(x, \varepsilon)$ задачи (1.1) окажется устойчивым по Ляпунову, что следует из методики доказательства теоремы (см., например, [8], [10]).

3. Пример. В качестве примера приведем класс задач, для которого удастся сформулировать достаточное условие выполнения требования 2 в виде условия на коэффициенты уравнения.

Рассмотрим краевую задачу Дирихле для уравнения

$$\varepsilon^2 \Delta u - A(u, x)(\varepsilon \nabla u)^2 - B(u, x) = 0, \quad x \in D \subset \mathbb{R}^N,$$

которому соответствует присоединенная система

$$\frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial \rho} = A(\tilde{u}, 0, \theta) \sum_{i=1}^N (d^i(0, \theta) \tilde{\nu})^2 + B(\tilde{u}, 0, \theta), \quad \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \rho} = \tilde{\nu}, \quad (3.1)$$

имеющая первый интеграл, представимый явно:

$$\begin{aligned} \tilde{\nu}^2 = & C \exp \left(\int M(\tilde{u}, \theta) d\tilde{u} \right) \\ & + 2 \exp \left(\int M(\tilde{u}, \theta) d\tilde{u} \right) \int B(\tilde{u}, 0, \theta) \exp \left(- \int M(\tilde{u}, \theta) d\tilde{u} \right) d\tilde{u}. \end{aligned}$$

Здесь $M(u, \theta) = 2A(u, 0, \theta) \sum_{i=1}^N (d^i(0, \theta))^2$, C – константа. Пусть вырожденное уравнение $B(u, x) = 0$ имеет изолированное решение $u = \varphi(x)$, причем $B_u(\varphi(x), x) > 0$. Тогда при условии, что $g(0, \theta) > \varphi(0, \theta)$, уравнение сепаратрисы, входящей в седло $(\varphi(0, \theta), 0)$ при $\rho \rightarrow +\infty$, имеет вид

$$\tilde{\nu}(\tilde{u}, \theta) = - \sqrt{\int_{\varphi(0, \theta)}^{\tilde{u}} 2B(\xi, 0, \theta) \exp \left(\int_{\xi}^{\tilde{u}} M(\eta, \theta) d\eta \right) d\xi}. \quad (3.2)$$

Для существования точки

$$(g(0, \theta), \tilde{\nu}^0), \quad \tilde{\nu}^0 = - \sqrt{\int_{\varphi(0, \theta)}^{g(0, \theta)} 2B(\xi, 0, \theta) \exp \left(\int_{\xi}^{g(0, \theta)} M(\eta, \theta) d\eta \right) d\xi},$$

в которой сепаратриса (3.2) пересекает прямую $\tilde{u} = g(0, \theta)$, достаточно выполнения условия

$$\int_{\varphi(0, \theta)}^{g(0, \theta)} B(\xi, 0, \theta) \exp \left(\int_{\xi}^{g(0, \theta)} M(\eta, \theta) d\eta \right) d\xi > 0. \quad (3.3)$$

Итак, выполнение неравенства (3.3) обеспечивает разрешимость задачи нулевого приближения для уравнения 2-го порядка, эквивалентного системе (3.1), с дополнительными условиями $\tilde{u}(0, \theta) = g(0, \theta)$, $\tilde{u}(+\infty, \theta) = \varphi(0, \theta)$.

В следующих приближениях относительно членов погранслоного разложения получаем линейные краевые задачи для уравнений следующего вида ($n \geq 1$):

$$N(\rho, \theta) \Pi_n u = H_n(\rho, \theta), \quad (3.4)$$

где

$$N(\rho, \theta) = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} - 2A(\tilde{u}, 0, \theta) \sum_{i=1}^N (d^i(0, \theta))^2 \tilde{\nu} \frac{\partial}{\partial \rho} - A_u(\tilde{u}, 0, \theta) \sum_{i=1}^N (d^i(0, \theta) \tilde{\nu})^2 - B_u(\tilde{u}, 0, \theta),$$

$H_n(\rho, \theta)$ – известные функции, коэффициенты $d^i(0, \theta)$ определяются видом границы ∂D .

В частности, если $D \subset R^3$ и ∂D – сфера радиуса R , то в некоторой декартовой системе координат с центром внутри области D поверхность ∂D описывается уравнениями

$$x_1 = R \sin \theta_1 \cos \theta_2, \quad x_2 = R \sin \theta_1 \sin \theta_2, \quad x_3 = R \cos \theta_1, \\ 0 \leq \theta_1 \leq \pi, \quad 0 \leq \theta_2 < 2\pi.$$

Определим локальные координаты в окрестности этой поверхности:

$$x \in \partial D^\delta \mapsto (r, \theta_1, \theta_2) \in [0, \delta] \times [0, \pi] \times [0, 2\pi).$$

Тогда связь (1.2) между декартовыми и локальными координатами определяется уравнениями

$$x_1 = (R - r) \sin \theta_1 \cos \theta_2, \quad x_2 = (R - r) \sin \theta_1 \sin \theta_2, \quad x_3 = (R - r) \cos \theta_1.$$

Производные $\partial u / \partial x_i$, $i = 1, 2, 3$, в локальных координатах вычисляются следующим образом:

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = -\sin \theta_1 \cos \theta_2 \frac{\partial u}{\partial r} + \cos \theta_1 \cos \theta_2 (R - r)^{-1} \frac{\partial u}{\partial \theta_1} - \sin \theta_2 (\sin \theta_1 (R - r))^{-1} \frac{\partial u}{\partial \theta_2}, \\ \frac{\partial u}{\partial x_2} = -\sin \theta_1 \sin \theta_2 \frac{\partial u}{\partial r} + \cos \theta_1 \sin \theta_2 (R - r)^{-1} \frac{\partial u}{\partial \theta_1} + \cos \theta_2 (\sin \theta_1 (R - r))^{-1} \frac{\partial u}{\partial \theta_2}, \\ \frac{\partial u}{\partial x_3} = -\cos \theta_1 \frac{\partial u}{\partial r} - \sin \theta_1 (R - r)^{-1} \frac{\partial u}{\partial \theta_1}.$$

С учетом этого нелинейный оператор $\varepsilon^2 \Delta - A(\dots, x)(\varepsilon \nabla)^2$ в переменных (r, θ) имеет вид

$$\varepsilon^2 \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} - 2(R - r)^{-1} \frac{\partial}{\partial r} \right. \\ + \cos \theta_1 (\sin \theta_1 (R - r)^2)^{-1} \frac{\partial}{\partial \theta_1} + (R - r)^{-2} \frac{\partial^2}{\partial \theta_1^2} + (\sin \theta_1 (R - r))^{-2} \frac{\partial^2}{\partial \theta_2^2} \\ - A(\dots, 0, \theta) \left(\left(\sin \theta_1 \cos \theta_2 \frac{\partial}{\partial r} - \cos \theta_1 \cos \theta_2 (R - r)^{-1} \frac{\partial}{\partial \theta_1} \right. \right. \\ \left. \left. + \sin \theta_2 (\sin \theta_1 (R - r))^{-1} \frac{\partial}{\partial \theta_2} \right)^2 \right. \\ \left. + \left(\sin \theta_1 \sin \theta_2 \frac{\partial}{\partial r} - \cos \theta_1 \sin \theta_2 (R - r)^{-1} \frac{\partial}{\partial \theta_1} - \cos \theta_2 (\sin \theta_1 (R - r))^{-1} \frac{\partial}{\partial \theta_2} \right)^2 \right. \\ \left. + \left(\cos \theta_1 \frac{\partial}{\partial r} + \sin \theta_1 (R - r)^{-1} \frac{\partial}{\partial \theta_1} \right)^2 \right].$$

Следовательно, в нулевом приближении пограничный слой описывается нелинейной краевой задачей для уравнения

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \rho^2} - A(\tilde{u}, 0, \theta) \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \rho} \right)^2 = B(\tilde{u}, 0, \theta),$$

а в следующих приближениях – линейными задачами для уравнений (3.4), где

$$N(\rho, \theta) = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} - 2A(\tilde{u}, 0, \theta)\tilde{\nu}\frac{\partial}{\partial \rho} - A_u(\tilde{u}, 0, \theta)\tilde{\nu}^2 - B_u(\tilde{u}, 0, \theta).$$

Автор выражает глубокую благодарность проф. Н. Н. Нефёдову за постоянное внимание к работе и полезное обсуждение ее результатов.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Н. Н. Нефедов, М. А. Давыдова, “Контрастные структуры в многомерных сингулярно возмущенных задачах реакция-диффузия-адвекция”, *Дифференц. уравнения*, **48:5** (2012), 738–748.
- [2] Н. Н. Нефедов, М. А. Давыдова, “Контрастные структуры в сингулярно возмущенных квазилинейных уравнениях реакция-диффузия-адвекция”, *Дифференц. уравнения*, **49:6** (2013), 715–733.
- [3] N. N. Nefedov, K. Sakamoto, “Multi-dimensional stationary internal layers for spatially inhomogeneous reaction-diffusion equations with balanced nonlinearity”, *Hiroshima Math. J.*, **33:3** (2003), 391–432.
- [4] Н. Т. Левашова, Н. Н. Нефедов, А. В. Ягремцев, “Контрастные структуры в уравнениях реакция-диффузия-адвекция в случае сбалансированной адвекции”, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **53:3** (2013), 365–376.
- [5] Л. С. Понтрягин, *Обыкновенные дифференциальные уравнения*, Наука, М., 1982.
- [6] А. Б. Васильева, В. Ф. Бутузов, *Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений*, Актуальные вопросы прикладной и вычислительной математики, Высшая школа, М., 1990.
- [7] А. Б. Васильева, “О периодических решениях параболической задачи с малым параметром при производных”, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **43:7** (2003), 975–986.
- [8] А. Б. Васильева, В. Ф. Бутузов, Н. Н. Нефедов, “Сингулярно возмущенные задачи с пограничными и внутренними слоями”, *Дифференциальные уравнения и топология. I*, Тр. МИАН, **268**, МАИК, М., 2010, 268–283.
- [9] Н. Н. Нефедов, “Метод дифференциальных неравенств для некоторых классов сингулярно возмущенных уравнений в частных производных”, *Дифференц. уравнения*, **31:4** (1995), 719–722.
- [10] N. Nefedov, “Comparison principle for reaction-diffusion-advection problems with boundary and internal layers”, *Numerical Analysis and Its Applications*, Lecture Notes in Comput. Sci., **8236**, Springer-Verlag, Heidelberg, 2013, 62–72.

М. А. Давыдова
 Московский государственный университет
 имени М.В.Ломоносова
E-mail: m.davydova@bk.ru

Поступило
 27.10.2014
 Исправленный вариант
 17.03.2015