Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Г. Бардаков, М. В. Нецадим, Пример нелинеаризуемой квазициклической подгруппы в группе автоморфизмов алгебры многочленов, *Матем. заметки*, 2015, том 98, выпуск 2, 180–186

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10625>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 107.22.136.117

26 апреля 2023 г., 12:40:10

Пример нелинеаризуемой квазициклической подгруппы в группе автоморфизмов алгебры многочленов

В. Г. Бардаков, М. В. Нецадим

Известно, что всякая конечная подгруппа группы автоморфизмов алгебры многочленов ранга 2 над полем нулевой характеристики сопряжена с подгруппой линейных автоморфизмов. Мы покажем, что для произвольной периодической подгруппы это неверно. Будет построен пример абелевой p -подгруппы группы автоморфизмов алгебры многочленов ранга 2 над полем комплексных чисел, которая не сопряжена подгруппе линейных автоморфизмов.

Библиография: 10 названий.

DOI: 10.4213/mzm10625

1. Введение. В настоящей работе рассматривается алгебра многочленов $P_n = k[x_1, x_2, \dots, x_n]$, а также свободная ассоциативная алгебра $A_n = k\langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle$ над полем k от порождающих $x_1, x_2, \dots, x_n$. Считаем, что это алгебры с единицей. Группы k -автоморфизмов этих алгебр, т.е. автоморфизмов, действующих тождественно на элементах из k , будем обозначать символом $\text{Aut } P_n$ и $\text{Aut } A_n$ соответственно. Хорошо известно [1], что группа $\text{Aut } P_2$ изоморфна группе $\text{Aut } A_2$. Положим

$$\tilde{P}_n = k[[x_1, x_2, \dots, x_n]]$$

– алгебра формальных степенных рядов от коммутирующих переменных. Очевидно, что справедливы включения

$$P_n \subseteq \tilde{P}_n, \quad \text{Aut } P_n \subseteq \text{Aut } \tilde{P}_n.$$

В теории автоморфизмов алгебры P_n известна следующая проблема (см. обзор [2]): верно ли, что всякий автоморфизм конечного порядка из $\text{Aut } P_n$ сопряжен в $\text{Aut } P_n$ с линейным автоморфизмом? Соответствующий вопрос для инволюций сформулирован в [3; вопрос 14.68]. Случай инволюций интересен еще и своей связью с проблемой о сокращении (более подробно см., например, [4]).

При $n = 2$ и $k = \mathbb{C}$ – поле комплексных чисел ответ положительный и следует из результата ван дер Кулька [5] о том, что группа $\text{Aut } P_2$ является свободным произведением с объединением. В группе $\text{Aut } P_2$ известен и более сильный результат:

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты №№ 13-01-00513, 13-01-92697-ИНД-а, 14-01-00014), а также при поддержке Лаборатории квантовой топологии Челябинского госуниверситета (грант правительства РФ № 14.Z50.31.0020).

всякая конечная группа сопряжена подгруппе линейных автоморфизмов. Кон [6] изучал алгебры над произвольным полем и доказал, что каждая конечная группа автоморфизмов алгебры A_2 сопряжена с подгруппой группы линейных автоморфизмов при условии, что характеристика основного поля не делит порядок группы. Как указал рецензент, этот результат впервые был получен в работе [7]. К сожалению эта работа недоступна широкому кругу читателей.

С другой стороны, в группе $\text{Aut } P_3$ известны примеры конечных групп (в частности, группы диэдра порядка $8m$ при $m \geq 3$), которые не сопряжены с подгруппами линейных автоморфизмов (см. [8]). В уже упоминавшемся обзоре [2; с. 61] Крафт и Шварц сформулировали такой вопрос: существует ли коммутативная (редуктивная) подгруппа группы $\text{Aut } P_n$, которая не сопряжена подгруппе линейных автоморфизмов?

В работе [9] Шевелин построил пример бесконечной периодической подгруппы группы автоморфизмов свободной алгебры Ли ранга 3 над полем комплексных чисел, которая не сопряжена подгруппе линейных автоморфизмов. Модифицируя этот пример, мы покажем, что справедлива

ТЕОРЕМА. Пусть p – простое число. В группе автоморфизмов $\text{Aut } P_2$ существует континуум попарно несопряженных подгрупп, изоморфных квазициклической p -группе $\mathbb{C}_{p^\infty}$, которые не сопряжены с подгруппами линейных автоморфизмов.

2. Квазициклические подгруппы. Всюду в дальнейшем в качестве основного поля берется поле комплексных чисел $\mathbb{C}$. Работая с автоморфизмами алгебр будем задавать автоморфизм $\psi \in \text{Aut } P_n$ действием на порождающих и писать

$$\psi = (x_1^\psi, x_2^\psi, \dots, x_n^\psi).$$

Пусть p – фиксированное простое число. Напомним (см., например, [10; пп. 1.2.5, 2.4.10]), что квазициклической p -группой $\mathbb{C}_{p^\infty}$ называется множество всех корней уравнений $x^{p^n} = 1$, $n = 1, 2, \dots$, из поля комплексных чисел с обычным умножением. Группа $\mathbb{C}_{p^\infty}$ является бесконечной абелевой p -группой, у которой всякая собственная подгруппа конечная циклическая. Положим

$$G_p = \{(\alpha x_1, \alpha x_2) \mid \alpha \in \mathbb{C}_{p^\infty}\}.$$

Очевидно, G_p является подгруппой группы линейных автоморфизмов в $\text{Aut } P_2$ и изоморфна группе $\mathbb{C}_{p^\infty}$.

Покажем, что существуют и другие вложения группы $\mathbb{C}_{p^\infty}$ в группу $\text{Aut } P_2$. Для этого рассмотрим формальный степенной ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k w_k, \quad a_k \in \mathbb{C}, \quad w_k = x_2^{p^k + 1},$$

из алгебры $\tilde{P}_2$. Тогда отображение $a: \tilde{P}_2 \rightarrow \tilde{P}_2$, определенное равенством

$$a = \left(x_1 + \sum_{k=0}^{\infty} a_k w_k, x_2 \right),$$

является автоморфизмом алгебры $\tilde{P}_2$. Если среди коэффициентов a_k лишь конечное число ненулевых, то a является автоморфизмом алгебры P_2 .

Рассмотрим подгруппу

$$G_p^a = a^{-1}G_p a$$

группы $\text{Aut } \tilde{P}_2$. Покажем, что на самом деле G_p^a лежит в группе $\text{Aut } P_2$, т.е. является подгруппой в группе автоморфизмов алгебры P_2 . Действительно, пусть автоморфизм $\varphi = (\alpha x_1, \alpha x_2)$, $\alpha \in \mathbb{C}_{p^\infty}$, лежит в группе G_p . Сопрягая его автоморфизмом a , получим

$$a^{-1}\varphi a = \left(\alpha x_1 + \alpha \sum_{k=0}^{\infty} a_k (1 - \alpha^{p^k}) w_k, \alpha x_2 \right).$$

Здесь и далее мы считаем, что автоморфизмы действуют слева направо. Учитывая, что $\alpha \in \mathbb{C}_{p^\infty}$, замечаем, что начиная с некоторого номера k_0 все коэффициенты

$$1 - \alpha^{p^k}, \quad k = k_0, k_0 + 1, \dots,$$

обращаются в нуль, а потому $a^{-1}\varphi a \in \text{Aut } P_2$.

По построению группа G_p^a сопряжена с группой G_p в группе автоморфизмов $\text{Aut } \tilde{P}_2$ кольца формальных степенных рядов $\tilde{P}_2$. Выясним вопрос о сопряженности группы G_p^a подгруппе линейных автоморфизмов в $\text{Aut } P_2$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Если автоморфизм*

$$a = \left(x_1 + \sum_{k=0}^{\infty} a_k w_k, x_2 \right)$$

задается бесконечным числом ненулевых коэффициентов a_k , то группа G_p^a не сопряжена ни с какой подгруппой группы линейных автоморфизмов.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть H – подгруппа линейных автоморфизмов, сопряженная с G_p^a , т.е.

$$\theta^{-1}G_p^a\theta = H$$

для некоторого $\theta \in \text{Aut } P_2$. Не уменьшая общности, будем считать, что H лежит в группе диагональных автоморфизмов, и тогда последнее равенство означает, что для всякого автоморфизма $\varphi = (\alpha x_1, \alpha x_2)$ найдется такой автоморфизм $h = (\alpha_1 x_1, \alpha_2 x_2) \in H$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}_{p^\infty}$, для которого справедливо равенство

$$\varphi^a \theta = \theta h. \quad (2.1)$$

Предположим, что $\theta = (f_1, f_2)$, где многочлены $f_1 = f_1(x_1, x_2)$ и $f_2 = f_2(x_1, x_2)$ имеют степень m_1 и m_2 соответственно. Так как эти многочлены порождают алгебру P_2 , то $m_1 > 0$ и $m_2 > 0$. Легко видеть, что равенство (2.1) равносильно следующей системе:

$$\alpha f_1 + \alpha \sum_{k=0}^{\infty} a_k (1 - \alpha^{p^k}) f_2^{p^k+1} = f_1(\alpha_1 x_1, \alpha_2 x_2), \quad \alpha f_2(x_1, x_2) = f_2(\alpha_1 x_1, \alpha_2 x_2).$$

Запишем первое равенство этой системы в виде

$$\alpha \sum_{k=0}^{\infty} a_k (1 - \alpha^{p^k}) f_2^{p^k+1} = f_1(\alpha_1 x_1, \alpha_2 x_2) - \alpha f_1.$$

Видим, что правая часть имеет степень $\leq m_1$. При этом, подбирая соответствующим образом α , можно добиться, чтобы степень левой части была сколь угодно большой. Таким образом, равенство (2.1) невозможно. Предложение доказано.

3. О сопряженности квазициклических подгрупп. В настоящем пункте будет доказано

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Существует континуум попарно не сопряженных в $\text{Aut } P_2$ подгрупп G_p^a .*

Пусть

$$a = \left(x_1 + \sum_{k=0}^{\infty} a_k w_k, x_2 \right), \quad b = \left(x_1 + \sum_{k=0}^{\infty} b_k w_k, x_2 \right),$$

$a_k, b_k \in \mathbb{C}$, $k = 0, 1, 2, \dots$, – два автоморфизма алгебры $\tilde{P}_2$, которые не являются автоморфизмами алгебры P_2 , т.е. каждый из них зависит от бесконечного числа ненулевых коэффициентов. Выясним вопрос о сопряженности подгрупп G_p^a и G_p^b в группе $\text{Aut } P_2$.

Пусть θ – такой автоморфизм алгебры P_2 , для которого справедливо равенство

$$\theta^{-1}(a^{-1}\varphi a)\theta = b^{-1}\varphi b \quad \text{при всех } \varphi \in G_p.$$

Очевидно, что это равенство равносильно такому:

$$(a^{-1}\varphi a)\theta = \theta(b^{-1}\varphi b). \quad (3.1)$$

Предположим, что на порождающих алгебры P_2 автоморфизм θ действует следующим образом:

$$x_1^\theta = f_1(x_1, x_2), \quad x_2^\theta = f_2(x_1, x_2).$$

Тогда равенство (3.1) равносильно следующей системе:

$$\left(\alpha x_1 + \alpha \sum_{k=0}^{\infty} a_k (1 - \alpha^{p^k}) w_k \right)^\theta = f_1^{b^{-1}\varphi b}, \quad (\alpha x_2)^\theta = f_2^{b^{-1}\varphi b},$$

которую можно записать в таком виде:

$$\begin{aligned} \alpha f_1 + \alpha \sum_{k=0}^{\infty} a_k (1 - \alpha^{p^k}) f_2^{p^k+1} &= f_1 \left(\alpha x_1 + \alpha \sum_{k=0}^{\infty} b_k (1 - \alpha^{p^k}) w_k, \alpha x_2 \right), \\ \alpha f_2 &= f_2 \left(\alpha x_1 + \alpha \sum_{k=0}^{\infty} b_k (1 - \alpha^{p^k}) w_k, \alpha x_2 \right). \end{aligned} \quad (3.2)$$

Заметим, что в силу выбора α для достаточно больших k справедливы равенства

$$1 - \alpha^{p^k} = 0.$$

Следовательно, система (3.2) представляет собой равенства в алгебре P_2 .

Если многочлен f_2 содержит переменную x_1 , то разложим его по степеням x_1 . Получим

$$f_2 = \sum_{j=0}^s c_j(x_2)x_1^j, \quad c_j(x_2) \in \mathbb{C}[x_2].$$

Тогда

$$f_2\left(\alpha x_1 + \alpha \sum_{k=0}^{\infty} b_k(1 - \alpha^{p^k})w_k, \alpha x_2\right) = \sum_{j=0}^s c_j(\alpha x_2)\left(\alpha x_1 + \alpha \sum_{k=0}^{\infty} b_k(1 - \alpha^{p^k})w_k\right)^j$$

и мы видим, что ввиду произвольности $\alpha \in \mathbb{C}_{p^\infty}$ степень по x_2 правой части может быть сколь угодно большой. Следовательно, f_2 не содержит x_1 , т.е. $f_2 = f_2(x_2) \in \mathbb{C}[x_2]$. Так как θ – автоморфизм, то

$$f_2 = \beta x_2 + \beta_0, \quad \beta \in \mathbb{C}^*, \quad \beta_0 \in \mathbb{C},$$

и первое равенство системы (3.2) принимает такой вид:

$$\alpha f_1(x_1, x_2) + \alpha \sum_{k=0}^{\infty} a_k(1 - \alpha^{p^k})(\beta x_2 + \beta_0)^{p^k+1} = f_1\left(\alpha x_1 + \alpha \sum_{k=0}^{\infty} b_k(1 - \alpha^{p^k})w_k, \alpha x_2\right). \quad (3.3)$$

Учитывая, что $\theta = (f_1, \beta x_2 + \beta_0)$, замечаем, что

$$f_1 = \gamma x_1 + g(x_2), \quad \gamma \in \mathbb{C}^*, \quad g \in \mathbb{C}[x_2].$$

Поэтому равенство (3.3) примет вид

$$\begin{aligned} & \alpha(\gamma x_1 + g(x_2)) + \alpha \sum_{k=0}^{\infty} a_k(1 - \alpha^{p^k})(\beta x_2 + \beta_0)^{p^k+1} \\ &= \gamma\left(\alpha x_1 + \alpha \sum_{k=0}^{\infty} b_k(1 - \alpha^{p^k})w_k\right) + g(\alpha x_2). \end{aligned}$$

или

$$\alpha g(x_2) - g(\alpha x_2) + \alpha \sum_{k=0}^{\infty} (1 - \alpha^{p^k})[a_k(\beta x_2 + \beta_0)^{p^k+1} - b_k x_2^{p^k+1}] = 0.$$

Так как степень многочлена $g(x_2)$ ограничена и среди коэффициентов a_k и b_k есть бесконечное множество ненулевых, то начиная с некоторого номера k_0 должны выполняться равенства

$$a_k \beta^{p^k+1} = b_k, \quad k \geq k_0.$$

Если это не так, то не существует автоморфизма θ алгебры P_2 такого, что

$$\theta^{-1}(a^{-1}\varphi a)\theta = b^{-1}\varphi b.$$

Таким образом, мы доказали, что если последовательности $\{a_k\}$ и $\{b_k\}$ таковы, что для всякого числа $\beta \in \mathbb{C}^*$ неравенство

$$a_k \beta^{p^k+1} \neq b_k$$

справедливо для бесконечного числа индексов k , то подгруппы G_p^a и G_p^b не сопряжены в $\text{Aut } P_2$.

Для завершения доказательства предложения, надо доказать, что существует континуум таких последовательностей.

Обозначим

$$\Omega = \{\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots) \mid \lambda_i \in \{0, 1\}\}$$

– множество всех бесконечных последовательностей, элементы которых занумерованы натуральными числами и состоят из нулей и единиц. Очевидно, что множество Ω имеет мощность континуум. Более того, справедлива

ЛЕММА. *Существует подмножество $\Omega_0 \subset \Omega$, имеющее мощность континуум и обладающее следующим свойством: для любых двух последовательностей $\lambda, \mu \in \Omega_0$ неравенство $\lambda_k \neq \mu_k$ выполняется для бесконечного числа номеров $k \in \mathbb{N}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. На множестве Ω определим следующее отношение:

$$\lambda \sim \mu \iff \lambda \text{ и } \mu \text{ отличаются лишь на конечном числе мест.}$$

Легко проверить, что так введенное отношение является отношением эквивалентности, а потому разбивает все множество Ω на классы эквивалентности. Причем, каждый класс эквивалентности содержит лишь счетное число элементов, а потому число классов эквивалентности $\Omega / \sim$ несчетно. Выбирая из каждого класса по одному представителю, получим искомое подмножество Ω_0 .

Из доказанной леммы следует, что существует континуум попарно несопряженных в $\text{Aut } P_2$ подгрупп G_p^a , что и завершает доказательство предложения 2.

Теорема, сформулированная во введении, следует из предложений 1 и 2.

Мы нашли достаточное условие того, что две подгруппы G_p^a и G_p^b не сопряжены в $\text{Aut } P_2$.

ВОПРОС 1. Найти необходимое и достаточное условие сопряженности подгрупп G_p^a и G_p^b в группе $\text{Aut } P_2$.

Мы благодарим участников семинара “Эварист Галуа” при Новосибирском государственном университете за плодотворные дискуссии. Также благодарим рецензента за полезные замечания.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] A. J. Czerniakiewicz, “Automorphisms of a free associative algebra of rank 2. I”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **160** (1971), 393–401.
- [2] H. Kraft, G. Schwarz, “Finite automorphisms of affine N -space”, *Automorphisms of Affine Spaces* (Curaçao, 1994), Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1995, 55–66.
- [3] *Куровская тетрадь. Нерешенные вопросы теории групп*, 14-е изд., Ин-т матем. СО РАН, Новосибирск, 1999.
- [4] V. G. Bardakov, M. V. Neshchadim, Yu. V. Sosnovsky, “Groups of triangular automorphisms of a free associative algebra and a polynomial algebra”, *J. Algebra*, **362** (2012), 201–220.
- [5] W. van der Kulk, “On polynomial rings in two variables”, *Nieuw Arch. Wiskunde* (3), **1** (1953), 33–41.

- [6] P. M. Cohn, “The automorphism group of the free algebra of rank two”, *Serdica Math. J.*, **28**:3 (2002), 255–266.
- [7] T. Igarashi, *Finite Subgroups of the Automorphism Group of the Affine Plane*, Thesis, Osaka University, 1977.
- [8] M. Masuda, L. Moser-Jauslin, T. Petrie, “Equivariant algebraic vector bundles over representations of reductive groups: applications”, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, **88**:20 (1991), 9065–9066.
- [9] М. А. Шевелин, “Подгруппы автоморфизмов свободной алгебры Ли ранга 3”, *Сиб. матем. журн.*, **55**:6 (2014), 1424–1427.
- [10] М. И. Каргаполов, Ю. И. Мерзляков, *Основы теории групп*, 4-е изд., Наука, М., 1996.

В. Г. Бардаков

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
г. Новосибирск;
Новосибирский государственный университет;
Челябинский государственный университет
E-mail: bardakov@math.nsc.ru

Поступило

02.10.2014

Исправленный вариант

16.12.2014

М. В. Нещадим

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
г. Новосибирск;
Новосибирский государственный университет
E-mail: neshch@math.nsc.ru