Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Ю. Артамонов, Качество приближения средними Фурье в терминах общих модулей гладкости, *Матем. заметки*, 2015, том 98, выпуск 1, 3–11

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10627>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 10:51:26

Качество приближения средними Фурье в терминах общих модулей гладкости

С. Ю. Артамонов

Доказана эквивалентность ошибки приближения средними Фурье и общих модулей гладкости при условии эквивалентности их генераторов.

Библиография: 13 названий.

DOI: 10.4213/mzm10627

1. Введение. В работах [1], [2] введены общие модули гладкости в пространствах $L_2[0; 2\pi)$. В работе [3] введено понятие общего модуля гладкости в пространствах $L_p[0; 2\pi)$ при $1 \leq p \leq +\infty$, который порождается 2π -периодической функцией θ , называемой генератором модуля. Более точно, пусть θ – непрерывная комплекснозначная 2π -периодической функция такая, что $\theta(-\xi) = \overline{\theta(\xi)}$ для всех $\xi \in \mathbb{R}$ и

$$\sigma(\theta) \equiv \|\{\theta^\wedge(\nu)\}_{\nu \in \mathbb{Z}}\|_{l_1} = \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} |\theta^\wedge(\nu)| < +\infty.$$

Класс функций, удовлетворяющих приведенным выше условиям, будем, следуя [3], обозначать G . Символом $\mathcal{G}$ обозначим подмножество G , состоящее из функций, которые дополнительно удовлетворяют условиям $\theta(0) = 0$ и $\theta^\wedge(0) = -1$, и назовем это подмножество *классом генераторов модуля*. Тогда если $\theta \in \mathcal{G}$, то общий модуль гладкости определяется следующим образом:

$$\omega_\theta(f, \delta)_p = \sup_{0 \leq h \leq \delta} \left\| \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} \theta^\wedge(\nu) f(x + \nu h) \right\|_p, \quad \delta \geq 0. \quad (1.1)$$

Ниже мы будем пользоваться стандартными определениями и обозначениями. Уточним некоторые из них. Символами $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}_0$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$ будем обозначать множества натуральных, неотрицательных целых, целых и вещественных чисел соответственно. Мы рассматриваем пространства $L_p(\mathbb{T})$, где $\mathbb{T} = [0, 2\pi)$ и $p \geq 1$. Отношение $A(f, \sigma) \asymp B(f, \sigma)$ означает эквивалентность, т.е. существуют положительные константы c_1 и c_2 , не зависящие от f и σ , такие, что

$$c_1 A(f, \sigma) \leq B(f, \sigma) \leq c_2 A(f, \sigma).$$

Как обычно, коэффициенты Фурье функции $f \in L_1(\mathbb{T})$ будем обозначать $f^\wedge(k)$, преобразование Фурье функции $f \in L_1(\mathbb{R})$ – символом $F[f]$. Норма линейного ограниченного оператора $\mathcal{A}$ в $L_p(\mathbb{T})$ обозначается $\|\mathcal{A}\|_{(p)}$. Пространства тригонометрических полиномов порядка не выше σ обозначаем $\mathcal{T}_\sigma$ и $\mathcal{T} = \bigcup_{\sigma \geq 0} \mathcal{T}_\sigma$.

Средние Фурье $\mathcal{F}_\sigma^{(\varphi)}$ (см., например, [4]–[6]) определяются как свертка функции $f \in L_p(\mathbb{T})$ с ядром

$$W_\sigma^\varphi(h) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \varphi\left(\frac{k}{\sigma}\right) e^{ikh}, \quad \sigma > 0, \quad W_0^\varphi(h) \equiv 1,$$

где генератор метода φ является непрерывной комплекснозначной функцией, имеющей компактный носитель ($r(\varphi) = \sup\{|\xi| : \xi \in \text{supp } \varphi\} < +\infty$) такой, что

$$\varphi(-\xi) = \overline{\varphi(\xi)}, \quad \xi \in \mathbb{R}, \quad \varphi(0) = 1.$$

Класс функций, удовлетворяющих описанным выше условиям для генератора метода φ , обозначим символом $\mathcal{K}$. В дальнейшем считаем, что $r(\varphi) = 1$. Отметим [4], что $\mathcal{F}_\sigma^{(\varphi)}$, $\sigma > 0$, – линейный оператор, отображающий $L_p(\mathbb{T})$ в $\mathcal{T}_{r(\varphi)\sigma}$; более того, если $F[\varphi] \in L_1(\mathbb{R})$, то

$$\|\mathcal{F}_\sigma^{(\varphi)}\|_{(p)} \leq \|\mathcal{F}_\sigma^{(\varphi)}\|_{(1)} = \|\mathcal{F}_\sigma^{(\varphi)}\|_{(\infty)} = (2\pi)^{-1} \|W_\sigma^\varphi\|_1 = (2\pi)^{-1} \|F[\varphi]\|_1.$$

Пусть χ – непрерывная комплекснозначная функция, удовлетворяющая условию $\chi(-\xi) = \overline{\chi(\xi)}$ для $\xi \in \mathbb{R}$. Она порождает семейство операторов ($0 < \sigma \leq +\infty$)

$$A_\infty(\chi) \equiv \chi(0)I, \quad A_\sigma(\chi)T(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \chi\left(\frac{k}{\sigma}\right) T^\wedge(k) e^{ikx}, \quad T \in \mathcal{T},$$

где I – тождественный оператор, которые корректно определены, по крайней мере, на множестве тригонометрических полиномов. Заметим [3], [4], что в пространстве тригонометрических полиномов $T \in \mathcal{T}$

$$\mathcal{F}_\sigma^{(\varphi)}(T; x) = A_\sigma(\varphi)T(x), \quad \Delta_h^{(\theta)}T(x) = \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} \theta^\wedge(\nu) T(x + \nu h) = A_{1/h}(\theta)T(x).$$

Неравенства мультипликаторного типа [7], [8] являются обобщениями классического неравенства Бернштейна. Мы будем работать с неравенствами вида

$$\|A_\sigma(\mu)T\|_p \leq c(p, \mu, \nu) \|A_\sigma(\nu)T\|_p, \quad T \in \mathcal{T}_\sigma, \quad \sigma > 0, \quad (1.2)$$

$$\|A_\sigma(\chi)T\|_p \leq c(p, \mu, \nu) \|T\|_p, \quad T \in \mathcal{T}_\sigma, \quad \sigma > 0, \quad (1.3)$$

где $\chi(\xi) = \mu(\xi)/\nu(\xi)$, $\xi \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Если $\mu(0) = \nu(0) = 0$, то из (1.3) следует (1.2) не зависимо от значения $\chi(0)$ для всех $p \geq 1$. Более того, если χ – непрерывная функция, имеющая компактный носитель, и $F[\chi] \in L_1(\mathbb{R})$, то последнее неравенство справедливо в $L_p(\mathbb{T})$, т.е. выполняется для всех $T \in \mathcal{T}_\sigma$ и $\sigma > 0$ с некоторой положительной константой, не зависящей от T и σ .

Мы будем использовать метод сравнения генераторов, разработанный в [8] и [9]. Пусть $u(\cdot)$ и $v(\cdot)$ принадлежат $C(\mathbb{R})$ и функция $\eta(\cdot)$ является бесконечно дифференцируемой и имеет компактный носитель. Мы используем обозначение

$$u(\cdot) \stackrel{(\eta)}{\prec} v(\cdot),$$

если $F[(u(\cdot)/v(\cdot))\eta(\cdot)] \in L_1(\mathbb{R})$. Скажем, что $u(\cdot) \stackrel{(\eta)}{\asymp} v(\cdot)$, если $u(\cdot) \stackrel{(\eta)}{\prec} v(\cdot)$ и $v(\cdot) \stackrel{(\eta)}{\prec} u(\cdot)$ выполняются одновременно. Будем говорить, что пара бесконечно дифференцируемых функций (η, τ) с компактными носителями образует *плоское разбиение единицы* на $[-r, r]$, $r > 0$, если существует $0 < \rho < r/2$ такое, что

$$\begin{aligned} \eta(\xi) &= 1 & \text{при } |\xi| \leq \rho, \\ \tau(\xi) &= 1 & \text{при } 2\rho \leq |\xi| \leq r, \\ \eta(\xi) + \tau(\xi) &= 1 & \text{при } |\xi| \leq r. \end{aligned}$$

В [3; теорема 1] получена прямая оценка типа Джексона для модуля (1.1). Заметим, что если на генератор модуля θ наложить дополнительное условие $\Theta_2(\xi) = \theta(2\xi)/\theta(\xi) \in G$, то

$$\omega_\theta(f, t\delta)_p \leq \sigma(\Theta_2)(t+1)^{\log_2 \sigma(\Theta_2)} \omega_\theta(f, \delta)_p. \quad (1.4)$$

В самом деле, оператор $A_{1/h}(\Theta_2)$, изначально определенный на $\mathcal{T}$, может быть расширен на $L_p(\mathbb{T})$ в силу [3; лемма 1] по формуле

$$A_{1/h}(\Theta_2)f(x) = \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} \Theta_2^\wedge(\nu) f(x + \nu h).$$

Тогда $\|A_{1/h}(\Theta_2)\|_{(p)} \leq \sigma(\Theta_2)$ и для $f \in L_p(\mathbb{T})$ выполнено $\Delta_{2h}^{(\Theta_2)} = A_{1/h}(\Theta_2) \circ \Delta_h^{(\theta)}$. Следовательно,

$$\|\Delta_{2h}^{(\theta)} f(x)\|_p \leq \|A_{1/h}(\Theta_2)\|_{(p)} \cdot \|\Delta_h^{(\theta)} f(x)\|_p \leq \sigma(\Theta_2) \|\Delta_h^{(\theta)} f(x)\|_p,$$

откуда $\omega_\theta(f, 2\delta)_p \leq \sigma(\Theta_2) \omega_\theta(f, \delta)_p$. Несложно показать, что $\sigma(\Theta_2) \geq 1$. Если $0 \leq t \leq 1$, то (1.4) очевидно. Пусть $t > 1$. Выбираем $m \in \mathbb{N}$ из условия $2^{m-1} < t \leq 2^m$. Тогда

$$\begin{aligned} \omega_\theta(f, t\delta)_p &\leq \omega_\theta(f, 2^m \delta)_p \leq (\sigma(\Theta_2))^m \omega_\theta(f, \delta)_p \leq (\sigma(\Theta_2))^{\log_2 t + 1} \omega_\theta(f, \delta)_p \\ &= 2^{(\log_2 t + 1) \log_2 \sigma(\Theta_2)} \omega_\theta(f, \delta)_p = \sigma(\Theta_2) t^{\log_2 \sigma(\Theta_2)} \omega_\theta(f, \delta)_p. \end{aligned}$$

В [10] получена эквивалентность ошибки приближения семействами линейных полиномиальных операторов, обобщенного K -функционала (см. [8]) и общего модуля гладкости при условии эквивалентности их генераторов. Так как генератор ψ обобщенного K -функционала – однородная функция, она задает степенной порядок роста в нуле для φ и θ . В данной работе мы получаем эквивалентность ошибки приближения средними Фурье и общих модулей гладкости в общем случае, когда подходящий K -функционал может и не существовать.

Введем в рассмотрение функцию

$$\Phi(\xi) = - \int_0^\xi \theta(t) dt, \quad \theta \in \mathcal{G}.$$

Основным результатом работы является

ТЕОРЕМА 1. Пусть $1 \leq p \leq +\infty$, $\varphi \in \mathcal{K}$, $F[\varphi] \in L_1(\mathbb{R})$, $\varphi(\xi) \neq 1$ при $\xi \neq 0$, абсолютно непрерывная функция $\theta \in \mathcal{G}$ и $\Phi(\xi) \neq 0$ при $|\xi| \geq \lambda$ для некоторого $\lambda > 0$,

$\Theta_2 \in G, \theta(\xi) \neq 0$ при $\xi \neq 0, \xi \in [0, 2\pi)$. Если существует плоское разбиение единицы (η, τ) на $[-1, 1]$ и $m \in \mathbb{N}$ такое, что

$$1 - \varphi(\cdot) \stackrel{(\eta)}{\prec} \theta(\cdot), \quad \theta(\cdot) \stackrel{(\tau)}{\prec} 1, \quad (\varphi(\cdot))^m \stackrel{(\tau)}{\prec} 1 - \varphi(\cdot),$$

то

$$\sup_{\sigma \geq 1/\delta} \|f - \mathcal{F}_\sigma^{(\varphi)}(f)\|_p \prec \omega_\theta(f, \delta)_p, \quad f \in L_p(\mathbb{T}), \quad \sigma > 0. \quad (1.5)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Условие $\varphi(\xi) \neq 1$ при $\xi \neq 0$ является существенным. Отметим, в частности, работу [11], в которой для метода Бернштейна–Стечкина, не удовлетворяющему этому условию, предложены специальные конструкции модулей гладкости.

2. Доказательства. Верхняя и нижняя оценки доказываются по единой схеме: сначала мы доказываем требуемую оценку, используя неравенства мультипликаторного типа, только для $t \in \mathcal{T}_\sigma$, а затем распространяем это неравенство на все $f \in L_p(\mathbb{T})$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $1 \leq p \leq +\infty$, $\varphi \in \mathcal{K}$, $F[\varphi] \in L_1(\mathbb{R})$, абсолютно непрерывная функция $\theta \in \mathcal{G}$ и $\Phi(\xi) \neq 0$ при $|\xi| \geq \lambda$ для некоторого $\lambda > 0$, $\Theta_2 \in G$, $\theta(\xi) \neq 0$ при $\xi \neq 0$, $\xi \in [0, 2\pi)$. Если существует плоское разбиение единицы (η, τ) на $[-1, 1]$ такое, что

$$1 - \varphi(\cdot) \stackrel{(\eta)}{\prec} \theta(\cdot), \quad 1 \stackrel{(\tau)}{\prec} \theta(\cdot),$$

то

$$\|f - \mathcal{F}_\sigma^{(\varphi)}(f)\|_p \leq c \cdot \omega_\theta(f, \sigma^{-1})_p, \quad f \in L_p(\mathbb{T}), \quad \sigma > 0,$$

где положительная константа $c \equiv c(p, \varphi, \theta)$ не зависит от f и σ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Шаг 1. Пусть α – бесконечно дифференцируемая функция, имеющая компактный носитель и удовлетворяющая условиям $\alpha(\xi) = 1$ для $\xi \in [-1, 1]$ и $\text{supp } \alpha \subset (-\pi; \pi)$. Положим

$$\chi(\xi) = \alpha(\xi) \cdot \frac{1 - \varphi(\xi)}{\theta(\xi)}, \quad \xi \in \mathbb{R}/\{0\}.$$

Так как $1 - \varphi(\cdot) \stackrel{(\eta)}{\prec} \theta(\cdot)$, то $\chi(\xi)$ может быть доопределена в 0 по непрерывности. Заметим, что $\chi(\xi)$ может быть представлена в следующем виде:

$$\chi(\cdot) = \eta(\cdot) \cdot \frac{1 - \varphi(\cdot)}{\theta(\cdot)} + (1 - \varphi(\cdot)) \cdot \frac{\alpha(\cdot) - \eta(\cdot)}{\theta(\cdot)}.$$

Следовательно,

$$A_\sigma(\chi(\cdot)) = A_\sigma\left(\eta(\cdot) \cdot \frac{1 - \varphi(\cdot)}{\theta(\cdot)}\right) + A_\sigma(1 - \varphi(\cdot)) \circ A_\sigma\left(\frac{\alpha(\cdot) - \eta(\cdot)}{\theta(\cdot)}\right). \quad (2.1)$$

Учитывая, что условие $F[\varphi] \in L_1(\mathbb{R})$ гарантирует ограниченность норм средних Фурье, т.е. $\sup_{\sigma > 0} \|\mathcal{F}_\sigma^{(\varphi)}\|_{(p)} < +\infty$ и $\mathcal{F}_\sigma^{(\varphi)}(t) = A_\sigma(\varphi)t$ для $t \in \mathcal{T}_\sigma$, получаем

$$\|A_\sigma(1 - \varphi)t\|_p \leq \|t\|_p + \|\mathcal{F}_\sigma^{(\varphi)}\|_{(p)} \cdot \|t\|_p \leq \|t\|_p + c_1\|t\|_p = c_2\|t\|_p. \quad (2.2)$$

Шаг 2. Так как $1 - \varphi(\cdot) \stackrel{(\eta)}{\prec} \theta(\cdot)$, т.е. $F[\eta \cdot (1 - \varphi)/\theta] \in L_1(\mathbb{R})$, то учитывая (1.3), (2.1) и (2.2), получаем

$$\begin{aligned} \|A_\sigma(\chi)t\|_p &\leq \left\| A_\sigma \left(\eta \cdot \frac{1 - \varphi}{\theta} \right) t \right\|_p + \|A_\sigma(1 - \varphi)\|_{(p)} \cdot \left\| A_\sigma \left(\frac{\alpha - \eta}{\theta} \right) t \right\|_p \\ &\leq c_3 \|t\|_p + c_4 \left\| A_\sigma \left(\frac{\alpha - \eta}{\theta} \right) t \right\|_p. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Принимая во внимание, что $F[(\alpha - \eta)/\theta] \in L_1(\mathbb{R})$, так как $1 \stackrel{(\tau)}{\prec} \theta(\cdot)$, будем иметь

$$\left\| A_\sigma \left(\frac{\alpha - \eta}{\theta} \right) t \right\|_p \leq c \|t\|_p;$$

следовательно, по (2.3) получаем

$$\|A_\sigma(\chi)t\|_p \leq c \|t\|_p \quad (2.4)$$

для всех $t \in \mathcal{T}_\sigma$.

Применяя неравенство (1.2) с $\mu(\xi) = \alpha(\xi) \cdot (1 - \varphi(\xi))$ и $\nu(\xi) = \theta(\xi)$, из (2.4) следует, что

$$\|A_\sigma(\alpha(1 - \varphi))t\|_p \leq c \|A_\sigma(\theta)t\|_p, \quad t \in \mathcal{T}_\sigma. \quad (2.5)$$

Учитывая, что $A_\sigma(\alpha(1 - \varphi))t = A_\sigma(1 - \varphi)t$ и $A_\sigma(\theta)t = \Delta_{1/\sigma}^{(\theta)}t$ для $t \in \mathcal{T}_\sigma$, перепишем (2.5) следующим образом:

$$\|t - \mathcal{F}_\sigma^{(\varphi)}(t)\|_p \leq c \|\Delta_{1/\sigma}^{(\theta)}t\|_p, \quad t \in \mathcal{T}_\sigma. \quad (2.6)$$

Шаг 3. В силу (2.6) и учитывая, что $F[\varphi] \in L_1(\mathbb{R})$, получим для $t \in \mathcal{T}_\sigma$

$$\begin{aligned} \|f - \mathcal{F}_\sigma^{(\varphi)}(f)\|_p &= \|(f - t) + (t - \mathcal{F}_\sigma^{(\varphi)}(t)) + (\mathcal{F}_\sigma^{(\varphi)}(t) - \mathcal{F}_\sigma^{(\varphi)}(f))\|_p \\ &\leq \|(f - t)\|_p + c \|\Delta_{1/\sigma}^{(\theta)}t\|_p + \|\mathcal{F}_\sigma^{(\varphi)}\|_{(p)} \cdot \|f - t\|_p \\ &\leq c' (\|(f - t)\|_p + \|\Delta_{1/\sigma}^{(\theta)}t\|_p). \end{aligned} \quad (2.7)$$

Пусть t^* – тригонометрический полином наилучшего приближения порядка не выше σ . Применяя прямую оценку типа Джексона для общего модуля гладкости [3; теорема 1] в комбинации с (1.4), будем иметь

$$\|f - t^*\|_p \leq c_1 \omega_\theta \left(f, \frac{1}{\sigma} \right), \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned} \|\Delta_{1/\sigma}^{(\theta)}t^*\|_p &\leq \|\Delta_{1/\sigma}^{(\theta)}(f - t^*)\|_p + \|\Delta_{1/\sigma}^{(\theta)}f\|_p \leq \omega_\theta \left(f - t^*, \frac{1}{\sigma} \right)_p + \omega_\theta \left(f, \frac{1}{\sigma} \right)_p \\ &\leq c_1 \sigma(\theta) \|f - t^*\|_p + \omega_\theta \left(f, \frac{1}{\sigma} \right)_p \leq C \omega_\theta \left(f, \frac{1}{\sigma} \right)_p. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Объединяя (2.7)–(2.9), получаем

$$\|f - \mathcal{F}_\sigma^{(\varphi)}(f)\|_p \leq c \cdot \omega_\theta(f, \sigma^{-1})_p.$$

Доказательство завершено.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Условие $\Theta_2 \in G$ означает, что $\Theta_2(\xi)$ может быть доопределена по непрерывности в точках ξ , таких, что $\theta(\xi) = 0$, и полученная таким путем функция удовлетворяет описанным выше условиям.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $1 \leq p \leq +\infty$, $\varphi \in \mathcal{K}$, $F[\varphi] \in L_1(\mathbb{R})$, $\varphi(\xi) \neq 1$ при $\xi \neq 0$, $\theta \in \mathcal{G}$. Если существует плоское разбиение единицы (η, β) на $[-1, 1]$ и $m \in \mathbb{N}$ такие, что

$$\theta(\cdot) \overset{(\eta)}{\prec} 1 - \varphi(\cdot), \quad \theta(\cdot) \overset{(\beta)}{\prec} 1, \quad (\varphi(\cdot))^m \overset{(\beta)}{\prec} 1 - \varphi(\cdot),$$

то

$$\|\Delta_{1/\sigma}^{(\theta)} f\|_p \leq c \cdot \|f - \mathcal{F}_\sigma^{(\varphi)}(f)\|_p, \quad f \in L_p(\mathbb{T}), \quad \sigma > 0,$$

где положительная константа $c \equiv c(p, \varphi, \theta)$ не зависит от f и σ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Шаг 1. Положим

$$\chi(\xi) = (\eta(\xi) + \beta(\xi)) \cdot \frac{\theta(\xi)}{1 - \varphi(\xi)}, \quad \xi \in \mathbb{R}/\{0\}.$$

Так как $\theta(\cdot) \overset{(\eta)}{\prec} 1 - \varphi(\cdot)$ и (η, β) – плоское разбиение единицы, т.е. $\beta(\xi) = 0$ на $[-\rho, \rho]$, функция $\chi(\xi)$ может быть доопределена по непрерывности в 0. Применяя тождество для $y \in (-1, 1)$

$$\frac{1}{1-y} = \sum_{j=0}^{m-1} y^j + \frac{y^m}{y-1}$$

и

$$\beta(\xi) = (1 - \eta(2\xi))(\eta(\xi) + \beta(\xi))\beta(\xi), \quad \xi \in [-1, 1],$$

получаем

$$\begin{aligned} \chi(\cdot) &= \eta(\cdot) \frac{\theta(\cdot)}{1 - \varphi(\cdot)} + \theta(\cdot) \beta(\cdot) \sum_{j=0}^{m-1} \varphi^j(\xi) \\ &\quad + \theta(\cdot) (1 - \eta^*(\cdot)) (\eta(\cdot) + \beta(\cdot)) \frac{\beta(\cdot) \varphi^m(\cdot)}{1 - \varphi(\cdot)}, \end{aligned}$$

где $\eta^*(\cdot) = \eta(2\cdot)$. Отсюда получаем операторное представление предыдущей формулы:

$$\begin{aligned} A_\sigma(\chi) &= A_\sigma\left(\frac{\eta\theta}{1-\varphi}\right) + A_\sigma(\theta\beta) \circ \left(\sum_{j=1}^{m-1} (A_\sigma(\varphi))^j\right) \\ &\quad + A_\sigma(\theta(1-\eta^*)(\eta+\beta)) \circ A_\sigma\left(\frac{\beta\varphi^m}{1-\varphi}\right). \end{aligned} \quad (2.10)$$

Из условий

$$\theta(\cdot) \overset{(\eta)}{\prec} 1 - \varphi(\cdot), \quad (\varphi(\cdot))^m \overset{(\beta)}{\prec} 1 - \varphi(\cdot), \quad \theta(\cdot) \overset{(\beta)}{\prec} 1$$

следует, что

$$F[\theta(1 - \eta^*)(\eta + \beta)] \in L_1(\mathbb{R}).$$

Следовательно, принимая во внимание, что $F[\chi] \in L_1(\mathbb{R})$ обеспечивает $\|A_\sigma(\chi)t\|_p \leq c\|t\|_p$ для $t \in \mathcal{T}_\sigma$, $\sigma > 0$, получаем, учитывая (2.10),

$$\begin{aligned} \|A_\sigma(\chi)t\|_p &\leq \left\| A_\sigma\left(\frac{\eta\theta}{1-\varphi}\right)t \right\|_p + c_1 \sum_{j=0}^{m-1} \|(A_\sigma(\varphi))^j t\|_p + c_2 \left\| A_\sigma\left(\frac{\beta(\varphi)^m}{1-\varphi}\right)t \right\|_p \\ &\leq c'_1 \|t\|_p + c'_2 \left(\sum_{j=0}^{m-1} c^j \right) \|t\|_p + c'_3 \|t\|_p \leq C \|t\|_p, \end{aligned} \quad (2.11)$$

где $t \in \mathcal{T}_\sigma$. Используя неравенство (1.2) с $\mu(\cdot) = (\eta(\cdot) + \beta(\cdot))\theta(\cdot)$ и $\nu(\cdot) = 1 - \varphi(\cdot)$ и принимая во внимание (2.11), получаем

$$\|A_\sigma((\eta + \beta)\theta)t\|_p \leq c\|A_\sigma(1 - \varphi)t\|_p, \quad t \in \mathcal{T}_\sigma, \quad \sigma > 0.$$

Так как $A_\sigma((\eta + \beta)\theta)t = A_\sigma(\theta)t$ для $t \in \mathcal{T}_\sigma$, то

$$\|A_\sigma(\theta)t\|_p \leq c\|t - \mathcal{F}_\sigma^{(\varphi)}(t)\|_p, \quad t \in \mathcal{T}_\sigma, \quad \sigma > 0.$$

Поскольку $A_\sigma(\theta)t = \Delta_{1/\sigma}^{(\theta)}t$ для $t \in \mathcal{T}_\sigma$, то

$$\|\Delta_{1/\sigma}^{(\theta)}t\|_p \leq c\|t - \mathcal{F}_\sigma^{(\varphi)}(t)\|_p, \quad t \in \mathcal{T}_\sigma, \quad \sigma > 0. \quad (2.12)$$

Шаг 2. Применяя (2.12), получаем для $f \in L_p(\mathbb{T})$

$$\|\Delta_{1/\sigma}^{(\theta)}f\|_p \leq \|\Delta_{1/\sigma}^{(\theta)}(f - t)\|_p + \|\Delta_{1/\sigma}^{(\theta)}(t)\|_p \leq \sigma(\theta)\|f - t\|_p + c\|t - \mathcal{F}_\sigma^{(\varphi)}(t)\|_p, \quad (2.13)$$

где $t \in \mathcal{T}_\sigma$. Так как $\mathcal{F}_\sigma^{(\varphi)}(f; x) \in \mathcal{T}_\sigma$ как функция от x , то полагаем в (2.13) $t = \mathcal{F}_\sigma^{(\varphi)}(f)$ и, принимая во внимание условие $\|\mathcal{F}_\sigma^{(\varphi)}\|_{(p)} < +\infty$, будем иметь

$$\begin{aligned} \|\Delta_{1/\sigma}^{(\theta)}f\|_p &\leq \sigma(\theta)\|f - \mathcal{F}_\sigma^{(\varphi)}(f)\|_p + c\|\mathcal{F}_\sigma^{(\varphi)}(f) - \mathcal{F}_\sigma^{(\varphi)}(\mathcal{F}_\sigma^{(\varphi)}(f))\|_p \\ &\leq \sigma(\theta)\|f - \mathcal{F}_\sigma^{(\varphi)}(f)\|_p + c_2\|f - \mathcal{F}_\sigma^{(\varphi)}(f)\|_p \leq c\|f - \mathcal{F}_\sigma^{(\varphi)}(f)\|_p. \end{aligned}$$

Доказательство завершено.

Объединяя теорему 2 и теорему 3, мы получаем теорему 1.

3. Примеры. Из теоремы 1 следуют, в частности, следующие известные результаты. Если

$$\varphi(\xi) = \begin{cases} \cos\left(\frac{\pi\xi}{2}\right), & |\xi| \leq 1, \\ 0, & |\xi| > 1, \end{cases} \quad \theta(\xi) = -(1 - e^{i\xi})^2,$$

то мы получаем эквивалентность ошибки приближения средних Рогозинского классическому модулю гладкости второго порядка [12]. Если

$$\varphi(\xi) = (1 - |\xi|)_+, \quad a_+ = \max(a, 0), \quad \theta(\xi) = -\left(\frac{2}{\pi}\right)|\xi|, \quad \xi \in [-\pi; \pi],$$

то (1.5) выражает эквивалентность ошибки приближения средними Фейера и модуля гладкости, соответствующего производной Рисса [13]. Если

$$\varphi(\xi) = (1 + i\xi^{2r+1})\eta(\xi),$$

где $\eta(\xi)$ – бесконечно дифференцируемая четная функция с компактным носителем на $[-1; 1]$ такая, что $\eta(\xi) = 1$ при $|\xi| \leq \rho$ для некоторого $0 < \rho < 1$ и

$$\theta(\xi) = -(1 - e^{i\xi})^{2r+1}, \quad r \in \mathbb{N}_0,$$

то мы получаем эквивалентность ошибки приближения средними Фурье модулю гладкости нечетного порядка [8], [9]. Доказательства эквивалентности генераторов могут быть найдены, например, в [8]–[10].

Заметим, что при построении конкретных примеров наибольшую трудность представляет проверка условия $\Theta_2 \in G$. Для построения новых примеров мы применяем “обходной” путь, заменяя условие $\Theta_2 \in G$ условием $(i\xi)^k \stackrel{(\eta)}{\prec} \theta(\cdot)$ для некоторого $k \in \mathbb{N}$. Справедлива следующая теорема, являющаяся частным случаем, доказанного в [10] утверждения.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $1 \leq p \leq +\infty$, $\theta \in G_1$ и существует плоское разбиение (η, τ) единицы на $[-1, 1]$ такое, что $(i \cdot)^k \stackrel{(\eta)}{\prec} \theta(\cdot)$, $1 \stackrel{(\tau)}{\prec} \theta(\cdot)$, где k – четное натуральное число. Тогда

$$\omega_k(f, \delta)_p \leq c\omega_\theta(f, \delta)_p, \quad f \in L_p(\mathbb{T}), \quad \delta \geq 0,$$

где $\omega_k(f, \delta)_p$ – классический модуль гладкости k -го порядка, а положительная постоянная c не зависит от f и δ .

Используя теорему 4, схему доказательств теоремы 2 и теоремы 3, а также оценку Джексона для классического модуля гладкости [5], получаем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 5. Пусть $1 \leq p \leq +\infty$, $\varphi \in \mathcal{K}$, $F[\varphi] \in L_1(\mathbb{R})$, $\varphi(\xi) \neq 0$ при $\xi \neq 1$, $\theta \in G_1$, $\theta(\xi) \neq 0$ при $\xi \neq 0$, $\xi \in [0, 2\pi]$. Если существуют плоское разбиение (η, τ) единицы на $[-1, 1]$ и $m \in \mathbb{N}$ такие, что

$$1 - \varphi(\cdot) \stackrel{(\eta)}{\succ} \theta(\cdot), \quad \theta(\cdot) \stackrel{(\tau)}{\succ} 1, \quad (\varphi(\cdot))^m \stackrel{(\tau)}{\prec} 1 - \varphi(\cdot)$$

и существует $k \in \mathbb{N}$ такое, что $(i\xi)^k \stackrel{(\eta)}{\prec} \theta(\xi)$, то

$$\sup_{\sigma \geq 1/\delta} \|f - \mathcal{F}_\sigma^{(\varphi)}(f)\|_p \asymp \omega_\theta(f, \delta)_p, \quad f \in L_p(\mathbb{T}), \quad \delta > 0.$$

Данный подход не позволяет полностью отказаться от степенной зависимости для θ . Однако теорема 5 позволяет рассматривать общие модули гладкости (и соответствующие средние Фурье), порожденные, например, генератором

$$\theta(\xi) = C \frac{|\xi|^s}{\ln(2\pi/|\xi|)}, \quad s > \frac{1}{2}, \quad \xi \in [-\pi, \pi],$$

где постоянная C выбирается из условия $\theta^\wedge(0) = -1$.

Автор выражает благодарность К. В. Руновскому за постоянное внимание к работе и рецензенту за ценные замечания.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] А. И. Козко, А. В. Рождественский, “О неравенстве Джексона в L_2 с обобщенным модулем непрерывности”, *Матем. сб.*, **195**:8 (2004), 3–46.
- [2] С. Н. Васильев, “Неравенство Джексона в $L_2(\mathbb{T}^N)$ с обобщенным модулем непрерывности”, Тр. ИММ УрО РАН, **15**, 2009, 102–110.
- [3] К. В. Руновский, “Прямая теорема теории приближений для общего модуля гладкости”, *Матем. заметки*, **95**:6 (2014), 899–910.
- [4] K. Runovski, H.-J. Schmeisser, “On the convergence of Fourier means and interpolation means”, *J. Comput. Anal. Appl.*, **6**:3 (2004), 211–220.
- [5] R. A. DeVore, G. G. Lorentz, *Constructive Approximation*, Grundlehren Math. Wiss., **303**, Springer-Verlag, Berlin, 1993.
- [6] K. Runovski, H.-J. Schmeisser, “Methods of trigonometric approximation and generalized smoothness. I”, *Eurasian Math. J.*, **2**:3 (2011), 98–124.
- [7] K. Runovski, H.-J. Schmeisser, “On some extensions of Bernstein’s inequalities for trigonometric polynomials”, *Funct. Approx. Comment. Math.*, **29** (2001), 125–142.
- [8] V. Rukasov, K. Runovski, H.-J. Schmeisser, “Approximation by families of linear trigonometric polynomial operators and smoothness properties of functions”, *Math. Nachr.*, **284**:11–12 (2011), 1523–1537.
- [9] Z. Burinska, K. Runovski, H.-J. Schmeisser, “On quality of approximation by families of generalized sampling series”, *Sampl. Theory Signal Image Process*, **8**:2 (2009), 105–126.
- [10] K. Runovski, H.-J. Schmeisser, “General Moduli of Smoothness and Approximation by Families of Linear Polynomial Operators”, *New Perspectives on Approximation and Sampling Theory*, Festschrift in Honor of Paul Butzer’s 85th Birthday, eds. A. I. Zayed, G. Schmeisser, Birkhäuser, 2014, 269–298.
- [11] Р. М. Тригуб, “Точный порядок приближения периодических функций полиномами Бернштейна–Стечкина”, *Матем. сб.*, **204**:12 (2013), 127–146.
- [12] Р. М. Тригуб, “Абсолютная сходимость интегралов Фурье, суммируемость рядов Фурье и приближение полиномами функций на торе”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **44**:6 (1980), 1378–1409.
- [13] K. Runovski, H.-J. Schmeisser, *On Modulus of Continuity Related to Riesz Derivative*, Jenaer Schriften für Mathematik und Informatik. Math/Inf/01/11, 2011.

С. Ю. Артамонов

Черноморский филиал Московского
государственного университета
им. М. В. Ломоносова, г. Севастополь
E-mail: sartr14@yandex.ru

Поступило

04.02.2015