Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. Г. Скляренко, Мягкие пучки цепей для сингулярных го-
мологий, *Матем. заметки*, 1999, том 65, выпуск 3, 396–401

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1063>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подра-
зумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.196.121.252

26 апреля 2023 г., 17:36:27

УДК 515.142.21

МЯГКИЕ ПУЧКИ ЦЕПЕЙ ДЛЯ СИНГУЛЯРНЫХ ГОМОЛОГИЙ

Е. Г. Складенко

С помощью итераций оператора барицентрического подразделения в сингулярном комплексе строятся мягкие пучки цепей для сингулярных гомологий.

Библиография: 7 названий.

Для открытых множеств $U \subset X$ пусть $S_*(X, X \setminus U; \mathcal{A})$ – либо конечные, либо локально конечные сингулярные цепи пар пространств, $\mathcal{A}$ – локально постоянные коэффициенты. Любая локально конечная цепь пары $(X, X \setminus U)$ для достаточно малого $V \subset U$ отображается в конечную цепь $(X, X \setminus V)$. Поэтому оба предпучка $U \rightarrow S_*(X, X \setminus U; \mathcal{A})$ индуцируют один и тот же градуированный дифференциальный пучок $\mathcal{S}_*(\mathcal{A})$ [1, гл. VI, лемма 5].

Предпучки, очевидно, удовлетворяют условию (S1) определения пучка [2]. При $U = X$ для предпучка локально конечных цепей выполнено и условие (S2) (при $U \neq X$ оно может быть нарушено, поскольку один и тот же симплекс может пересекать U в разных местах). Поэтому сечения $\Gamma(\mathcal{S}_*(\mathcal{A}))$ составляют комплекс всех локально конечных цепей X с коэффициентами в $\mathcal{A}$, причем носители сечений совпадают с обычными носителями сингулярных цепей. Тем самым, $\Gamma_\varphi(\mathcal{S}_*(\mathcal{A}))$ – это комплекс локально конечных сингулярных цепей с носителями в семействе φ , а $\Gamma_c(\mathcal{S}_*(\mathcal{A}))$ – обычные (конечные) сингулярные цепи [2, гл. I, упражнение 12]. Соответствующие φ сингулярные гомологии обозначаем через $H_*^\varphi(X; \mathcal{A})$ (в случае локально компактного пространства X определяемые всеми локально конечными сингулярными цепями группы $H_*(X; \mathcal{A})$ – известные сингулярные гомологии второго рода [3]).

Для обсуждаемых пучков имеет место полезное в приложениях соотношение [4, § 6]

$$\mathcal{S}_*(\mathcal{A} \otimes \mathcal{Y}) = \mathcal{S}_*(\mathcal{A}) \otimes \mathcal{Y}.$$

Известно, что пучки $\mathcal{S}_*(\mathcal{A})$ являются гомотопически тонкими (см. [2, гл. 2, упражнение 32], [4, § 6]; ср. [1, гл. VII, предложение 7]). Гомотопическая тонкость существенна для построения спектральной последовательности, связывающей сингулярные гомологии локально компактного пространства с пучковыми когомологиями [5] (следствием которой, в частности, оказывается двойственность Пуанкаре).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 96-01-01403, и фонда INTAS, грант № 96-0712.

Однако гомотопическая тонкость дифференциального пучка $\mathcal{S}_*(\mathcal{A})$ – свойство довольно специфическое, не обеспечивающее возможность применения других стандартных конструкций гомологической алгебры, типичных для теории пучков, особенно в задачах, касающихся гомологий подпространства, использующих операцию $\smile$ -умножения и др. Вместо сингулярных цепей в таких случаях обычно применяют цепи типа Чеха или цепи Масси, определяющие гомологии Стиррода–Ситникова и складывающиеся на локально компактных хаусдорфовых пространствах в вьющие дифференциальные пучки и в мягкие – на паракомпактных пространствах. При этом, конечно, в естественных условиях следует уметь отождествлять получаемые результаты с конструктивно возможными в рамках сингулярной теории. Наиболее типичное среди таких условий (по-существу необходимое) – это требование гомологической локальной связности топологического пространства по отношению к сингулярным гомологиям (принадлежность рассматриваемого пространства к классу HLC-пространств).

Задача сравнения сингулярных гомологий с общими оказывается неожиданно сложной даже для постоянных коэффициентов и $\varphi = c$. В этом частном случае определено естественное преобразование сингулярной теории гомологий в любую иную (аксиоматическую), в частности, в обсуждаемую общую теорию гомологий Стиррода–Ситникова, оказывающееся изоморфизмом в категории HLC-пространств. Относящиеся к этому результаты освещены в [6, § 8] (см. также [4, § 10]).

Указанное преобразование построено без сравнения определяющих те и другие гомологии цепей и потому не может быть тем же способом распространено на непостоянные коэффициенты или на гомологии с отличными от c семействами носителей. Именно в связи с этим в [2, гл. 5, § 1] предложена модифицированная конструкция пучков цепей для сингулярной теории. Пусть

$$S'_*(X, X \setminus U; \mathcal{A}) = \varinjlim_n \{A_n(U)\},$$

где $A_n(U) = S_*^c(X, X \setminus U; \mathcal{A})$ – обычные сингулярные цепи, а каждое отображение $A_n(U) \rightarrow A_{n+1}(U)$ есть оператор барицентрического подразделения в сингулярных цепях, и пусть $S''_*(X, X \setminus U; \mathcal{A})$ – комплекс, получаемый таким же образом из локально конечных цепей. Поскольку функтор $\varinjlim$ точен, имеем включения $S'_*(X, X \setminus U; \mathcal{A}) \subset S''_*(X, X \setminus U; \mathcal{A})$. По тем же причинам, что и для $\mathcal{S}_*(\mathcal{A})$, оба предпучка индуцируют один и тот же пучок $\mathcal{S}'_*(\mathcal{A})$, причем возникает преобразование $\alpha: \mathcal{S}_*(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{S}'_*(\mathcal{A})$ (ср. с преобразованием (3) в [2, гл. 5, § 1]). Поскольку оператор барицентрического подразделения индуцирует изоморфизм гомологий, а точный функтор $\varinjlim$ перестановочен с операцией H_* , α индуцирует изоморфизм производных пучков $H_*(\mathcal{S}'_*(\mathcal{A})) = H_*(\mathcal{S}_*(\mathcal{A}))$. Поскольку функторы $\varinjlim$ и $\otimes$ перестановочны, по тем же причинам, что и в [4, § 6], выполнено $\mathcal{S}'_*(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}) = \mathcal{S}'_*(\mathcal{A}) \otimes \mathcal{B}$.

Пучки $\mathcal{S}'_*(\mathcal{A})$ и преобразование α строятся в [2] в терминах теории копредпучков и копучков, и поэтому только для локально компактных пространств. В частности, устанавливается c -мягкость (и потому также мягкость) пучков $\mathcal{S}'_*(\mathcal{A})$, соотношение $\Gamma_c(\mathcal{S}'_*(R)) = \mathcal{S}'_*(X; R)$ (R – основное кольцо) и, тем самым, равенство $H_*^c(X; R) = H_*(\Gamma_c(\mathcal{S}'_*(R)))$. С помощью отвечающего α преобразования спектральных последовательностей обоих дифференциальных пучков при стандартном ограничении $\dim_{\varphi, R} X < \infty$ для паракомпактифицирующих семейств φ устанавливаются также изоморфизмы $H_*^\varphi(X; \mathcal{A}) = H_*(\Gamma_\varphi(\mathcal{S}'_*(\mathcal{A})))$ (см. [2, гл. 5, § 1]).

С помощью этого результата для локально компактных НЛС-пространств строится преобразование сингулярных гомологий в общие, оказывающиеся (сверх случая, когда $\mathcal{A} = R$ и $\varphi = c$) изоморфизмом при дополнительном условии $\dim_R X < \infty$ [2, гл. 5, следствия 11.9 и 11.16].

На самом деле имеет место следующий более общий факт.

ТЕОРЕМА. *Для любого паракомпактного хаусдорфова пространства X пучки $\mathcal{S}'_*(\mathcal{A})$ являются мягкими и для любого семейства носителей φ имеет место изоморфизм $H_*(\Gamma_\varphi(\mathcal{S}'_*(\mathcal{A}))) = H_*^\varphi(X; \mathcal{A})$.*

Кроме условия локальной компактности снимается ограничение на размерность X и требование паракомпактифицируемости семейства φ (ср. [2, гл. 5, п. 1.16]).

Несколько более слабая версия этого результата была анонсирована автором в теореме 10.3 в [4] и использовалась там для дальнейшего изучения преобразования сингулярных гомологий локально компактных НЛС-пространств с носителями в паракомпактифицирующих семействах и с локально постоянными коэффициентами в аналогичные гомологии Стиррода–Ситникова. Показано, что преобразования групп типа $H_*^c(X; \mathcal{A})$ и $H_*(X; \mathcal{A})$ изоморфны без ограничения на размерность X (см. [4, теорема 10.11]). Эти изоморфизмы использовались в [4] для отождествления классического $\smile$ -умножения в сингулярной теории с некоторыми общими (описанными в монографиях Бредона, Масси и некоторых других источниках). Ниже дается прямое доказательство сформулированной теоремы, не опирающееся на аппарат спектральных последовательностей.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. Прежде всего, поскольку оператор барицентрического подразделения B в сингулярных цепях сохраняет носители, определен комплекс $\varinjlim_n \{S_*^\varphi(X; \mathcal{A})\}$. Поскольку носители сохраняют и соответствующий оператор гомотопии D , а функторы $\varinjlim$ и H_* перестановочны, выполнено

$$H_*^\varphi(X; \mathcal{A}) = H_*\left(\varinjlim_n \{S_*^\varphi(X; \mathcal{A})\}\right).$$

Как будет показано ниже, носители сохраняют и естественное преобразование

$$S_*''(X; \mathcal{A}) \rightarrow \Gamma(\mathcal{S}'_*(\mathcal{A})).$$

Теорема оказывается следствием наличия эпиморфизма

$$\varkappa: \varinjlim \{S_*^\varphi(X; \mathcal{A})\} \rightarrow \Gamma_\varphi(\mathcal{S}'_*(\mathcal{A}))$$

с ациклическим ядром $C_*^\varphi = \text{Ker } \varkappa$, равным 0 при $\varphi = c$. (В теореме 10.3 из [4] без доказательства ошибочно утверждается, что $\varkappa$ – изоморфизм. Ясно, что эта неточность несущественна.)

Рассмотрим сначала ядро C_*^φ . Пусть $z \in C_*^\varphi$ имеет носитель $|z| \in \varphi$. Для всякой точки $x \in X$ найдется окрестность U_x такая, что образ z в $S_*''(X, X \setminus U_x; \mathcal{A})$ равен 0. Это означает, что для некоторого $n = n(x)$ образ $B^n(\xi)$ в $S_*''(X, X \setminus U_x; \mathcal{A})$ равен 0, где ξ – представляющая z цепь (носитель которой по определению содержит в себе носитель z). Более того, для $z \in C_*^\varphi$ имеем $\bigcap_n |B^n(\xi)| = \emptyset$. В частности, если $\varphi = c$, то $B^n(\xi) = 0$

для некоторого конечного n , т.е. $C_*^\varphi = 0$. В общем случае, если z – цикл, можно считать, что и $\partial\xi = 0$. В этом случае $B(\xi) - \xi = \partial D(\xi)$. Аналогично,

$$B^2(\xi) - B(\xi) = \partial D(B(\xi)), \quad \dots, \quad B^{n+1}(\xi) - B^n(\xi) = \partial D(B^n(\xi)), \quad \dots$$

Все фигурирующие цепи локально конечны, а их носители содержатся в $|\xi| \in \varphi$. Поскольку $\{U_x\}$ – покрытие X , все указанные равенства можно сложить (сумма конечна в окрестности каждой точки). В результате получим $\xi = \partial\eta$, $|\eta| \subset |\xi| \in \varphi$, т.е. $H_*(C_*^\varphi) = 0$.

Следствием этих рассуждений является и следующий используемый ниже простой факт, справедливый для любого элемента $z \in S''_*(X; \mathcal{A})$. Определим носитель $|z|$ условием: $x \in X \setminus |z|$, если образ z в $S''_*(X, X \setminus U; \mathcal{A})$ равен 0 для некоторой окрестности U точки x . Для $z \in S'_*(X, \mathcal{A})$ условие $|z| = \emptyset$, как только что установлено, эквивалентно тому, что $z = 0$. Вообще говоря, это не так для $z \in S''_*(X; \mathcal{A})$. Однако, $|z| = |\varkappa(z)|$. В самом деле, в точках $x \in X$ условие $\varkappa(z)(x) = 0$, как показано выше, эквивалентно обращению в 0 образов z в $S''_*(X, X \setminus U; \mathcal{A})$ для содержащих x достаточно малых окрестностей U . Фактически C_*^φ – подкомплекс, составленный всеми элементами с пустыми носителями.

Докажем эпиморфность $\varkappa$. Пусть t – сечение $\mathcal{S}'_*(\mathcal{A})$. Носитель $|t|$ – локально компактное паракомпактное пространство, и в силу [7, гл. 1, § 9, п. 10, теорема 5] t есть дискретное объединение локально компактных замкнутых подмножеств $F_\lambda \subset X$, каждое из которых счетно на бесконечности. Для доказательства утверждения достаточно для каждого λ построить в достаточно малой окрестности F_λ локально конечную цепь с носителем в φ , индуцирующую через ее образ в $S''_*(X; \mathcal{A})$ сечение t на F_λ . Тем самым, без ограничения общности можно считать, что само множество $|t|$ счетно на бесконечности.

Пусть $\{U_i\}$ – счетное локально конечное в X покрытие множества $|t|$ открытыми в X множествами с компактными пересечениями с $|t|$ замыканий $\overline{U}_i$, для которых существуют элементы $s_i \in S'_*(X; \mathcal{A})$, образы которых в $\Gamma_c(\mathcal{S}'_*(\mathcal{A}))$ совпадают с t на U_i , $i = 1, 2, \dots$. Пусть $U_0 = X \setminus |t|$ и $s_0 = 0$. Существует открытое покрытие $\{V_i\}$ пространства X , для которого $\overline{V}_i \subset U_i$. Для каждого i выберем содержащие V_i открытые множества U_{ij} таким образом, чтобы $U_{i0} = U_i$ и $\overline{U}_{i,j+1} \subset U_{ij}$.

Имеем $|s_1| \subset X \setminus (U_0 \cap U_1) \subset (X \setminus \overline{U}_{01}) \cup (X \setminus U_{11})$. Поскольку s_1 представляется конечной цепью, носитель которой при многократном подразделении приближается к $|s_1|$ (и всегда содержит $|s_1|$), имеет место $s_1 = \sigma'_0 + s'_1$, $|\sigma'_0| \subset X \setminus \overline{U}_{01}$, $|s'_1| \subset X \setminus \overline{U}_{11}$. Элемент $\sigma'_0 = s_1 - s'_1 = \sigma_1$ определяет t на U_{11} и нуль на U_{01} . По аналогичным причинам

$$|s_2 - \sigma_1| \subset X \setminus ((U_{01} \cup U_{11}) \cap U_{21} \subset (X \setminus (\overline{U}_{02} \cup \overline{U}_{12}))), \\ s_2 - \sigma_1 = \sigma'_1 + s'_2, \quad |\sigma'_1| \subset X \setminus (\overline{U}_{02} \cup \overline{U}_{12}), \quad |s'_2| \subset X \setminus \overline{U}_{22}.$$

Элемент $\sigma_2 = s_2 - s'_2 = \sigma_1 + \sigma'_1$ совпадает с σ_1 на $U_{02} \cup U_{12}$ и с s_2 на U_{22} , т.е. σ_2 определяет t уже на $U_{02} \cup U_{12} \cup U_{22}$. По индукции предположим, что построен элемент σ_k , определяющий t на $\bigcup_{i=0}^k U_{ik}$. Рассуждая с σ_k и s_{k+1} таким же образом, как с σ_1 и s_2 , получим элемент $\sigma_{k+1} = \sigma_k + \sigma'_k$, определяющий t на $\bigcup_{i=0}^{k+1} U_{i,k+1}$, причем $|\sigma'_k| \subset X \setminus \bigcup_{i=0}^k \overline{U}_{i,k+1}$. Имеем

$$\sigma_{k+1} = \sum_{i=0}^k \sigma'_i.$$

В силу уже использованных аргументов σ'_k представляется конечной цепью ξ_k такой, что

$$|\xi_k| \subset X \setminus \bigcup_{i=0}^k \bar{U}_{i,k+1}.$$

Поскольку с ростом k носители $|\xi_k|$ “уходят в бесконечность”, определена локально конечная сумма $\xi = \sum_k \xi_k$. Она определяет в $S''_*(X; \mathcal{A})$ элемент σ , представляющий нужное сечение t . Этим доказано второе утверждение теоремы.

Заметим, что когда $|t|$ компактно, процесс построения ξ конечен и ξ – обычная конечная цепь. В этом случае построения аналогичны конструкциям, приводимым для доказательства леммы 1.6 и предложения 1.7 в [2, гл. 5], но реализуемых в терминах рассматриваемых там копучков.

Докажем мягкость пучков $\mathcal{S}'_*(\mathcal{A})$. Сечение t , заданное на замкнутом множестве F , продолжается в силу паракомпактности X на некоторую окрестность W множества F . Существуют сколь угодно тесные окрестности F , являющиеся объединениями последовательностей расширяющихся замкнутых окрестностей; поэтому W можно считать паракомпактным пространством. Ограничение $\mathcal{S}'_*(\mathcal{A})|_W$ порождается ограничением на W предпучка $U \rightarrow S^c_*(X, X \setminus U; \mathcal{A})$, т.е. является пучком $\mathcal{S}'_*(\mathcal{A}|_W)$; поэтому в W найдется локально конечная цепь ξ , представляющая продолжение t . Свойство локальной конечности ξ как цепи в X может быть нарушено на границе W . Представим ξ , как выше, локально конечной в W суммой $\sum_\mu \xi_\mu$ конечных цепей. При замене любой из ξ_μ барицентрическим подразделением $B^{n(\mu)}(\xi_\mu)$ результирующая бесконечная цепь (в силу локальной конечности множеств $|\xi_\mu|$) будет представлять то же сечение на W . Пусть V – окрестность F , для которой $\bar{V} \subset W$.

Заменим каждую цепь ξ_μ ее барицентрическим подразделением $B^{n(\mu)}(\xi_\mu)$ столь мелким, что все симплексы, носители которых пересекают $\bar{V}$, попадают в дополнение к некоторой фиксированной окрестности множества $X \setminus W$, после чего из локально конечной суммы $\sum_\mu B^{n(\mu)}(\xi_\mu)$ удалим все симплексы, носители которых не пересекаются с $\bar{V}$. Полученная новая цепь является локально конечной сингулярной цепью пространства X , представляющей некоторое сечение пучка $\mathcal{S}'_*(\mathcal{A})$, совпадающее с t на F . Теорема доказана.

В заключение обратим внимание на следующую типичную картину, наблюдаемую при рассмотрении известных к настоящему времени пучков цепей. Как и в случае пучков цепей типа Чеха и цепей Масси (см. [4, § 7]), пучков $\mathcal{S}_*(\mathcal{A})$, упомянутых выше, сечения пучков $\mathcal{S}'_*(\mathcal{A})$ сосредоточены на замкнутых локально компактных множествах. В частности, сечения с носителями в некотором семействе φ – это сечения, носители которых составляют часть φ , состоящую из всех локально компактных множеств из φ .

Заметим также, что когда множество F компактно, при продолжении с него сечения t в разложении цепи ξ выше можно ограничиться конечным числом слагаемых, поэтому t (несмотря на непаракомпактизируемость семейства s в общем случае) продолжается до сечения с компактным носителем, так что пучки $\mathcal{S}'_*(\mathcal{A})$ оказываются s -мягкими. Представляет интерес вопрос об их s -ацикличности. Как известно, при Φ -ацикличности составляющих комплекса $\mathcal{C}_+$ объектов $\mathcal{C}_p$ гипергомологии комплекса $\mathcal{C}_*$ для точного слева аддитивного функтора Φ обычно “лучше” гомологий комплекса $\Phi(\mathcal{C}_*)$ (для резольвенты $\mathcal{C}^*$ объекта $\mathcal{Y}$, например, гипергомологии $\mathcal{C}^*$ для функтора Φ совпадают с производными $\Phi^p(\mathcal{Y})$), и имеется только естественное преобразование

$H^p(\Phi(\mathcal{C}^*)) \rightarrow \Phi^p(\mathcal{Y})$, пропускаемое через соответствующую спектральную последовательность). В нашем случае $\Phi = \Gamma_c$, и поскольку $H_*(\Gamma_c(\mathcal{S}'_*(\mathcal{A})))$, представляет интерес вопрос о природе гипергомологий $\mathcal{S}'_*(\mathcal{A})$ для функтора Γ_c (в случае их отличия от $H_*^c(X; \mathcal{A})$, ср. с аналогичными вопросами для $\mathcal{S}_*(\mathcal{A})$ в [4, § 6] и для пучков цепей типа Чеха и цепей Масси в обсуждении после предложения 7.9 в [4]).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Swan R. G. The Theory of Sheaves. Oxford: Math. Inst. Univ. of Oxford, 1958.
- [2] Бредон Г. Э. Теория пучков. М.: Наука, 1988.
- [3] Cartan H. Séminaire de topologie algébrique. Paris: École Norm. Sup., 1948–1949.
- [4] Скляренко Е. Г. О природе гомологических умножений и двойственности // УМН. 1994. Т. 49. № 1. С. 141–198.
- [5] Cartan H. Cohomologie des groupes, suite spectral, faisceaux. Séminaire. Paris: École Norm. Sup., 1950–1951.
- [6] Скляренко Е. Г. Теория гомологий и аксиома точности // УМН. 1969. Т. 24. № 5. С. 87–140.
- [7] Бурбаки Н. Общая топология. Основные структуры. М.: Наука, 1968.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Поступило
08.10.97