Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. В. Артамонов, В. А. Голубева, Центральные элементы в универсальной обертывающей алгебре и функции от матричных элементов, *Матем. заметки*, 2015, том 98, выпуск 3, 323–336

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10633>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.87.193.239

26 апреля 2023 г., 15:44:29

Центральные элементы в универсальной обертывающей алгебре и функции от матричных элементов

Д. В. Артамонов, В. А. Голубева

В работе приведено построение центральных элементов в $U(\mathfrak{o}_N)$ и $U(\mathfrak{g}_2)$ на основе первой основной теоремы теории инвариантов. Построены новые функции от матричных элементов, естественно возникающие при описании центра $U(\mathfrak{g}_2)$, подобно тому, как пфаффианы возникают при описании центра $U(\mathfrak{o}_N)$.

Библиография: 11 названий.

DOI: 10.4213/mzm10633

1. Введение

Пусть $\mathfrak{g}$ есть простая алгебра Ли, а W – ее стандартное представление, при этом $\dim W = N$. Центральные элементы в универсальной обертывающей алгебре $U(\mathfrak{g})$ выражаются через функции от элементов матрицы L , определение которой дано ниже, причем для различных алгебр используются различные функции [1]–[3]. При этом в цитируемой литературе новые функции от матричных элементов не строятся исходя из каких-либо требуемых свойств, а предъявляются, после чего уже доказываются формулы, выражающие центральные элементы через них.

В настоящей работе приведена общая схема построения центральных элементов, естественно приводящая к появлению пфаффианов при рассмотрении случая ортогональной алгебры. Кроме того, данная схема применяется в случае исключительной алгебры Ли $\mathfrak{g}_2$; также показывается, какие новые функции от матричных элементов возникают при этом.

Дадим определение матрицы L . Пусть v_α – базис $\mathfrak{g}$, а V_α – матрица, соответствующая v_α в стандартном представлении. Положим

$$L = V_\alpha \otimes v_\alpha.^1$$

Заметим, что L может быть рассмотрена как $N \times N$ матрица, чьи элементы принадлежат $\mathfrak{g}$. Тогда имеют место следующие факты (см [2], [3]).

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта МК № 4594.2013.1.

¹Всюду в работе по повторяющимся индексам предполагается суммирование

1. В случае, когда $\mathfrak{g}$ принадлежит серии A , в $U(\mathfrak{g})$ имеются центральные элементы

$$C_k = \sum_{|I|=k} \text{Det } L_I, \quad k = 2, \dots, N, \quad (1.1)$$

где $I \subset \{1, \dots, N\}$, L_I есть подматрица в L , определяемая как $L_I = (L_{ij})_{i,j \in I}$, а Det есть двойной детерминант (см. формулу (1.2)). Суммирование идет по всевозможным подмножествам $I \subset \{1, \dots, N\}$, состоящим из k элементов.

В частности, элемент

$$\text{Det}(L) = \frac{1}{N!} \sum_{\sigma, \sigma' \in S_N} L_{\sigma(1), \sigma'(1)} \dots L_{\sigma(N), \sigma'(N)} \quad (1.2)$$

центральный.

2. В случае, когда $\mathfrak{g}$ принадлежит серии B или D , в $U(\mathfrak{g})$ имеются центральные элементы

$$C_{2k} = \sum_{|I|=k} (Pf L_I)^2, \quad (1.3)$$

где $k = 1, \dots, N/2$ в случае серии D или $k = 1, \dots, (N-1)/2$ в случае серии B . Кроме того, в случае серии D элемент

$$Pf L = \frac{1}{N! 2^N} \sum_{\sigma \in S_{2N}} L_{\sigma(1), \sigma(2)} \dots L_{\sigma(2N-1), \sigma(2N)} \quad (1.4)$$

также центральный.

3. В случае, когда $\mathfrak{g}$ принадлежит серии C в универсальной обертывающей алгебре имеются центральные элементы, выражающиеся через так называемые хаффианы подматриц матрицы L [3].

Таким образом, в случае серии A центральные элементы выражаются через детерминанты, в случае серий B, D при описании центральных элементов естественно возникают новые функции от матричных элементов – пфаффианы. Для исключительных алгебр Ли связь с новыми функциями от матричных элементов не установлена.

Возникают естественные вопросы – почему при построении центральных элементов для серий B, D возникают именно пфаффианы, а не какие-то другие функции от матричных элементов? Появляются ли новые функции от матричных элементов при построении центральных элементов для алгебры $\mathfrak{g}_2$?

2. Содержание работы

В настоящей работе за основу конструкции центральных элементов в универсальной обертывающей алгебре взята первая основная теорема теории инвариантов. Для построения центральных элементов вводится понятие m -инварианта, который представляет из себя полином от переменных $m_{i,j}$, $i, j \in \{1, \dots, N\}$, инвариантный под действием алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Действие генератора v алгебры Ли, которому в стандартном представлении соответствует матрица V , на эти переменные задается формулой

$$m_{i,j} \mapsto V_{i,c} m_{c,j} + m_{i,d} V_{j,d}.$$

Легко убедиться, что в случае серий A, B, D , а также в случае $\mathfrak{g}_2$ при подстановке в m -инвариант вместо $m_{i,j}$ элементов $L_{i,j}$, которые перемножаются с помощью симметризованного произведения, получается центральный элемент² в $U(\mathfrak{g})$. К сожалению, нашими методами не удается непосредственно доказать, что так построенные элементы являются всевозможными центральными элементами, однако, в случае $\mathfrak{o}_N$ это удастся сделать путем сравнения с уже известным описанием центра (см. [3]–[5]).

В разделе 5 рассматривается случай серий B и D . С помощью первой теоремы теории инвариантов дается описание m -инвариантов. Показывается, какие дополнительные соотношения появляются при переходе к подстановке $m_{i,j}$ вместо $L_{i,j}$. В качестве следствия получается известное описание центра $U(\mathfrak{o}_N)$. Однако преимущество предложенного в работе подхода состоит в том, что пфаффианы в формулах для центральных элементов возникают естественным образом из первой основной теоремы теории инвариантов.

Далее в разделе 6 разбирается случай исключительной алгебры $\mathfrak{g}_2$.³ С помощью первой основной теоремы теории инвариантов строятся центральные элементы для алгебры $\mathfrak{g}_2$.

При этом в разделе 4 получены некоторые новые функции от матричных элементов, через которые выражаются центральные элементы. Именно, пусть $M = (m_{ij})$ есть матрица размера 8×8 (или 7×7), чьи строки и столбцы занумерованы базисными октонионами (мнимыми октонионами). Пусть ω_{i_1, i_2, i_3} есть структурные константы октонионов. Положим

$$\omega_{i_1, \dots, i_k} := \text{skew}_{i_1, \dots, i_k}(\omega_{i_1, i_2, s_1} \omega_{s_1, i_3, s_2} \dots \omega_{s_{k-1}, i_k, 1}), \quad (2.1)$$

где $\text{skew}_{i_1, \dots, i_k}(\cdot)$ обозначает антисимметризацию по индексам $i_1, \dots, i_k$. Тогда новой функцией от матричных элементов будет

$$G_k^k(L) = \omega_{i_1, \dots, i_k} \omega_{j_1, \dots, j_k} m_{i_1, j_1} \dots m_{i_k, j_k} \quad (2.2)$$

Кроме того, в разделе 4 вводятся и более сложные функции от матричных элементов.

Следует однако отметить, что при подстановке вместо $m_{i,j}$ образующих $L_{i,j}$ алгебры $\mathfrak{g}_2$, которая производится при конструировании центральных элементов, оказывается возможным выразить функцию (2.2) через детерминанты подматриц матрицы L .

3. Предварительные сведения. Инвариантные полиномы.

Первая основная теорема теории инвариантов. m -Инварианты

Пусть имеется алгебра Ли $\mathfrak{g}$, U – ее стандартное представление. Пусть $x_1, \dots, x_m$ – вектора из W , при этом $\dim W = N$, а $x_i^i, i = 1, \dots, N$ – координаты векторов x_l .

На эти координаты элемент $v \in \mathfrak{g}$ действует по формуле

$$x_l^i \mapsto V_{ik} x_l^k, \quad (3.1)$$

где $V_{i,j}$ есть матрица, соответствующая v в стандартном представлении.

²На самом деле любой элемент центра является симметризованным, см. [4]

³ Отметим, что в работе [6] получено выражение для центральных элементов в $U(\mathfrak{g}_2)$ через суммы квадратов пфаффианов, как и в случае ортогональной алгебры.

Первой основной теоремой теории инвариантов называют теорему, описывающую порождающие в алгебре полиномов от переменных x_k^i , инвариантных под действием $\mathfrak{g}$.

Инвариантный полином от переменных x_k^i будем называть x -инвариантом.

Пусть имеется $N \times N$ матрица M , элементами которой являются переменные m_{ij} , между которыми нет соотношений. Определим действие на переменных m_{ij} элемента v алгебры $\mathfrak{g}$ по формулам

$$M \mapsto VM + MV^t \quad \text{или} \quad m_{ij} \mapsto V_{ik}m_{kj} + m_{jl}V_{il}, \quad (3.2)$$

где $v \in \mathfrak{g}$, а $V_{i,j}$ есть матрица, соответствующая v в стандартном представлении.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Полином от переменных m_{ij} , инвариантный относительно этого действия, назовем m -инвариантом.

Имеет место взаимно однозначное соответствие между однородными многочленами от переменных x_l^i степени $2k$ и однородными многочленами от переменных $m_{i,j}$ степени k , при котором многочлену

$$t^{i_1, j_1, \dots, i_k, j_k} x_1^{i_1} x_{1'}^{i_1'} \dots x_k^{i_k} x_{k'}^{i_k'}$$

соответствует многочлен

$$t^{i_1, j_1, \dots, i_k, j_k} m_{i_1, j_1} \dots m_{i_k, j_k}.$$

Сравнивая формулы для действия алгебры на переменные x_i^l и $m_{i,j}$, приходим к выводу, при этом x -инвариантам в точности соответствуют m -инварианты.

4. Связь m -инвариантов и центральных элементов в универсальной обертывающей алгебре

Сопоставим алгебре Ли $\mathfrak{g}$ матрицу L , чьи элементы принадлежат $\mathfrak{g}$, по следующему правилу.

Пусть v_α – базис $\mathfrak{g}$, а V_α – матрица, соответствующая v_α в стандартном представлении. Положим

$$L = V_\alpha \otimes v_\alpha.$$

В случае $\mathfrak{g} = \mathfrak{o}_N$ матрица L с точностью до константы имеет вид

$$(F_{i,j}), \quad i, j = 1, \dots, N,$$

где $F_{i,j}$ – стандартные образующие $\mathfrak{o}_N$, которые определяются формулой $F_{i,j} = E_{i,j} - E_{j,i}$. Таким образом, матрица L кососимметрична.

В случае $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_2$ матрица L с точностью до константы имеет вид

$$(G_{i,j}), \quad i, j = 1, \dots, 7,$$

где образующие $G_{i,j}$ имеют следующий вид. Алгебра Ли $\mathfrak{g}_2$ есть алгебра дифференцирований октонионов. Для октонионов x, y определим дифференцирование $G_{x,y}$, действующее на октонион z согласно формуле

$$G_{x,y}(z) = [x, y], z] - 3[x, y, z], \quad \text{где} \quad [x, y, z] = (xy)z - x(yz).$$

Выберем стандартный базис $1, e_1, \dots, e_7$ в алгебре октонионов, так что $e_1, \dots, e_7$ – стандартные мнимые базисные октонионы; возьмем $x = e_i$, $y = e_j$ и положим

$$G_{i,j} = G_{e_i, e_j}.$$

В случае обоих алгебр $\mathfrak{o}_N$ и $\mathfrak{g}_2$ коммутационные соотношения можно записать следующим способом. Для $g \in \mathfrak{o}_N$ определим элемент $F_{g\{i_1, i_2\}}$ следующим образом. отождествим пару индексов $\{i_1, i_2\}$ с внешним произведением векторов стандартного представления $e_{i_1} \wedge e_{i_2}$. Пусть

$$g(e_{i_1} \wedge e_{i_2}) = c_\alpha e_{p_\alpha} \wedge e_{q_\alpha}.$$

Тогда положим

$$F_{g\{i_1, i_2\}} = c_\alpha F_{p_\alpha, q_\alpha}.$$

В [7] показано, что коммутационные соотношения между образующими $\mathfrak{o}_N$ можно записать так

$$[g, F_{i,j}] = F_{g\{i,j\}}, \quad g \in \mathfrak{o}_N. \quad (4.1)$$

Аналогично в [6] показано, что в случае $\mathfrak{g}_2$ имеем

$$[g, G_{i,j}] = G_{g\{i,j\}}, \quad g \in \mathfrak{g}_2. \quad (4.2)$$

Далее обозначаем через $L_{i,j}$ образующие $F_{i,j}$ в случае $\mathfrak{o}_N$ и образующие $G_{i,j}$ в случае $\mathfrak{g}_2$.

Имеет место следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *В случаях алгебр $\mathfrak{g} = \mathfrak{o}_N, \mathfrak{g}_2$, если*

$$T = t^{i_1, j_1, \dots, i_k, j_k} m_{i_1, j_1} \dots m_{i_k, j_k}$$

есть m -инвариант, то

$$\bar{T} = t^{i_1, j_1, \dots, i_k, j_k} L_{i_1, j_1} \dots L_{i_k, j_k}$$

есть центральный элемент в $U(\mathfrak{g})$. Здесь “ $\cdot$ ” есть симметризованное произведение.

Докажем это предложение. Имеется отображение

$$m_{ij} \mapsto L_{ij} \quad (4.3)$$

из алгебры полиномов от переменных m_{ij} в алгебру полиномов от L_{ij} с симметризованные произведением. Последняя алгебра естественно вложена в $U(\mathfrak{g})$.

В силу формул (4.1), (4.2) отображение, задаваемое формулой (4.3), переводит действие элемента $g \in \mathfrak{g}$ на полиномах от переменных m_{ij} в операцию коммутирования $[g, \cdot]$.

Следовательно, инвариантные полиномы переходят в центральные элементы.

Предложение доказано.

5. Ортогональная алгебра

Прежде всего сформулируем первую основную теорему теории инвариантов для ортогональной алгебры, дающую в явном виде порождающие в алгебре x -инвариантов. С помощью этой теоремы получим порождающие в пространстве m -инвариантов. Эти порождающие будут кодироваться графами. Будут приведены соотношения между графами, позволяющие определить базисные m -инварианты и выразить любой инвариант через базисные.

5.1. Первая основная теорема. Используя соответствие между x -инвариантами и m -инвариантами, построим примеры m -инвариантов.

ТЕОРЕМА 1 (см. [8]). Пусть $x_1, \dots, x_m$ – вектора стандартного представления V алгебры $\mathfrak{o}_N$. Тогда алгебра полиномов от координат x_k , инвариантных относительно $\mathfrak{o}_N$, порождается полиномами $(x_k, x_l) = \sum_i x_k^i x_l^i$ для всевозможных k, l , а также, в случае $N = m$, полиномом $\det(x_k^i) = \det[x_1, \dots, x_N]$, где $[x_1, \dots, x_N]$ – матрица, составленная из столбцов координат векторов $x_1, \dots, x_N$.

5.2. Примеры m -инвариантов.

5.2.1. След. Возьмем в качестве x -инварианта скалярное произведение. То есть $T(x_1, x_2) = x_1^i x_2^i$. Тогда соответствующий m -инвариант есть след.

5.2.2. Пфаффиан. Возьмем в качестве x -инварианта детерминант, $T(x_1, \dots, x_k) = \det[x^1, \dots, x^k]$. Компоненты тензора T следующие:

$$\begin{aligned} t^{i_1, j_1, \dots, i_k, j_k} &= 0, & \text{если } \{i_1, j_1, \dots, i_k, j_k\} &\neq \{1, \dots, 2k\}, \\ t^{i_1, j_1, \dots, i_k, j_k} &= (-1)^\sigma, & \text{если } (i_1, j_1, \dots, i_k, j_k) &= (\sigma(1), \dots, \sigma(2k)). \end{aligned}$$

Соответствующий m -инвариант есть

$$k! 2^k Pf M.$$

5.2.3. Детерминант. Возьмем теперь следующий x -инвариант:

$$T(x_1, x_{1'}, \dots, x_k, x_{k'}) = \det[x_1, \dots, x_k] \det[x_{1'}, \dots, x_{k'}].$$

В компонентах получаем, что

$$\begin{aligned} t^{i_1, j_1, \dots, i_k, j_k} &= 0, & \text{если } \{i_1, \dots, i_k\} &\neq \{1, \dots, k\} \\ & & \text{или } \{j_1, \dots, j_k\} &\neq \{1, \dots, k\}, \\ t^{i_1, j_1, \dots, i_k, j_k} &= (-1)^\sigma (-1)^{\sigma'}, & \text{где } (i_1, \dots, i_k) &= (\sigma(1), \dots, \sigma(k)), \\ & & (j_1, \dots, j_k) &= (\sigma'(1), \dots, \sigma'(k)). \end{aligned}$$

Соответствующий m -инвариант есть

$$k! \det M.$$

5.3. Графическое описание общего m -инвариантов. Теперь мы можем написать общий вид m -инварианта. Произвольный x -инвариант есть линейная комбинация произведений следов и детерминантов. Найдем m -инвариант, соответствующий такому произведению.

Произвольный m -инвариант кодируется ориентированным и отмеченным графом следующего вида. В этом графе есть вершины двух цветов – черные и белые. К черным присоединяется n ребер, число n одно и то же для всех ребер. На ребрах, прирывающих к черной вершине, задан порядок. К белым вершинам присоединяется два ребра (неважно, входят они или выходят). Каждому ребру приписано число от 1 до K .

Рис. 1. Граф, кодирующий m -инвариант

Графу прежде всего сопоставляется произведение $m_{i_1, j_1} \dots m_{i_K, j_K}$, где K – количество ребер.

Далее, возьмем белую вершину. Ей соответствует свертка пары индексов.

Если в нее входят ребра с номерами a, b , то производится свертка

$$m_{i_a, c} m_{i_b, c}.$$

Если из нее выходят ребра с номерами a, b , то производится свертка

$$m_{c, j_a} m_{c, j_b}.$$

Если в нее входит ребро с номером a и выходит ребро с номером b , то производится свертка (см. рис. 2)

$$m_{i_a, c} m_{c, j_b}.$$

Рис. 2. Свертка, соответствующая белой вершине

Черной вершине соответствует антисимметризация. Именно, пусть к вершине подсоединяются ребра с номерами $a_1, \dots, a_n$. Для каждого ребра a_k берем индекс

i_{a_k} , если оно выходит из рассматриваемой вершины, и b_k , если оно входит в рассматриваемую вершину. После этого берется антисимметризация по выбранным индексам. Полученное выражение и есть m -инвариант, соответствующий графу.

Данное описание m -инварианта сразу получается из первой основной теоремы для x -инвариантов и конструкции m -инвариантов из x -инвариантов.

Отметим, что приведенный выше m -инвариант можно записать как линейную комбинацию произведений детерминантов и пфаффианов от подматриц произведений M и M^t . Однако такое описание нам далее не понадобится.

Приведем теперь графы, соответствующие инвариантам, описанным в разделе 2.

Следу соответствует граф, изображенный на рис. 3. Пфаффиану при $k = 2$ соответствует граф, изображенный на рис. 4. Детерминанту при $k = 2$ соответствует граф, изображенный на рис. 5.

Рис. 3. Граф, кодирующий след

Рис. 4. Граф, кодирующий пфаффиан

Рис. 5. Граф, кодирующий детерминант

5.4. Соотношения. Если на матрицу $M = (m_{ij})$ не наложено каких-либо ограничений, то все соотношения между m -инвариантами являются следствием соотношений между x -инвариантами, которые хорошо известны (см. вторую основную теорему теории инвариантов в [8]).

Между элементами матрицы L есть соотношение кососимметричности

$$L_{i,j} = -L_{j,i}.$$

Пусть теперь на элементы матрицы M наложено условие кососимметричности $m_{i,j} = -m_{j,i}$. Тогда помимо соотношений, являющихся следствием второй основной теоремы теории инвариантов, возникают новые соотношения между m -инвариантами, позволяющие выразить инвариант, задаваемый произвольным графом через базисные инварианты.

Укажем эти соотношения.

5.4.1. *Соотношение 1.* В случае кососимметричной матрицы M размера 2×2 имеет место очевидное равенство

$$(PfM)^2 = \text{Det } M.$$

Оно приводит к соотношению, отображенному на рисунке 6. Соотношение состоит в следующем. Пусть из одной черной вершины в другую идут две одинаковые последовательности ребер через белые вершины (в этих последовательностях одинаковое число белых вершин и одинаковые ориентации ребер). Тогда рассматриваемый m -инвариант равен m -инварианту, задаваемому графом, в котором данные последовательности ребер идут не в другую черную вершину, а возвращаются в ту, из которой вышли.

Рис. 6. Соотношение 1

5.4.2. *Соотношение 2.* В случае матриц M и M' размера 2×2 имеет место равенство

$$\begin{aligned} & \text{Det}(M + M') - \text{Det } M - \text{Det } M' \\ &= \frac{1}{2} (m_{1,1}m'_{2,2} - m_{2,1}m'_{1,2} - m_{1,2}m'_{2,1} + m_{2,2}m'_{1,1} \\ & \quad + m'_{2,2}m_{1,1} - m'_{1,2}m_{2,1} - m'_{2,1}m_{1,2} + m'_{1,1}m_{2,2}). \end{aligned} \quad (5.1)$$

Это равенство приводит к соотношению, отображенному на рис. 7. На этом рисунке первый из графов, стоящих в равенстве справа, обозначает следующий инвариант. Сначала 2×2 -матрица, которая есть произведение матриц, соответствующее последовательности ребер с n белыми вершинами. Затем строится аналогичное произведение матриц, соответствующее последовательности ребер с m белыми вершинами. После этого берется сумма двух построенных матриц и ее определитель. Это выражение и кодируется указанным графом.

Рис. 7. Соотношение 2

5.4.3. *Соотношение 3.* В случае кососимметрических матриц M и M' размера 4×4 имеет место равенство

$$Pf(M + M') - PfM - PfM' = \frac{1}{2}(m_{1,2}m'_{3,4} - m_{1,3}m'_{2,4} + m_{1,4}m'_{2,3} + m'_{3,4}m_{1,2} - m'_{2,4}m_{1,3} + m'_{2,3}m_{1,4}) \quad (5.2)$$

Это равенство приводит к соотношению, отображенному на рис. 8.

Рис. 8. Соотношение 3

5.4.4. *Соотношение 4.* В случае кососимметрической матрицы M произвольного размера имеет место равенство

$$Pf(M^k) = (PfM)^k.$$

5.4.5. *Базисные инварианты.* С помощью указанных выше соотношений произвольный m -инвариант в случае кососимметрической матрицы M может быть выражен через инварианты вида

$$Tr(M^k) \quad \text{или} \quad Pf(M^{n_1} + \dots + M^{n_k}). \quad (5.3)$$

Используя стандартные формулы, связывающие различные симметрические многочлены, указанные в (5.3) инварианты можно выразить через инварианты вида

$$\sum_{|I|=k} (PfM_I)^2, \quad \text{или} \quad PfM, \quad \text{где} \quad I \subset \{1, \dots, N\}, \quad M_I = (m_{i,j})_{i,j \in I}. \quad (5.4)$$

6. Алгебра $\mathfrak{g}_2$

Сформулируем первую основную теорему теории инвариантов для случая алгебры $\mathfrak{g}_2$. С ее помощью дадим описание m -инвариантов и описание центральных элементов. Некоторые центральные элементы будут выписаны явно.

6.1. Первая основная теорема теории инвариантов.

ТЕОРЕМА 2 (см. [9], [10]). Пусть $x_1, \dots, x_m$ – вектора стандартного представления V алгебры $\mathfrak{g}_2$. Тогда алгебра инвариантных полиномов от координат векторов $x_1, \dots, x_m$ порождается полиномами

$$\text{str}(x_{j_1}(x_{j_2}(x_{j_3} \dots x_{j_r}) \dots)),$$

где вектора перемножаются как октонионы, операция str есть операция взятия симметризованного следа. Операция взятия следа есть операция взятия действительной части.

Дадим другую формулировку этой теоремы. Пусть ω_{i_1, i_2, i_3} есть структурные константы октонионов. Положим

$$\omega_{i_1, \dots, i_k} := \text{skew}(\omega_{i_1, \dots, i_k} \omega_{i_1, i_2, s_1} \omega_{s_1, i_3, s_2} \dots \omega_{s_{k-1}, i_k, 1}), \quad (6.1)$$

где $\text{skew}_{i_1, \dots, i_k}(\cdot)$ обозначает антисимметризацию по индексам $i_1, \dots, i_k$.

По-другому, этот тензор определяется так. отождествим индекс i_s с базисным октонионом e_{i_s} ; $\omega_{i_1, \dots, i_k}$ есть антисимметричный k -тензор, его компонента есть 0, если

$$e_{i_1} \dots e_{i_k} \neq \pm 1,$$

его компонента есть 1, если

$$e_{i_1} \dots e_{i_k} = 1.$$

С помощью этого тензора первая основная теорема переформулируется так.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $x_1, \dots, x_m$ – вектора стандартного представления V алгебры $\mathfrak{g}_2$. Тогда алгебра инвариантных полиномов от координат векторов $x_1, \dots, x_m$ порождается полиномами

$$\omega_{i_1, \dots, i_k} x_{j_1}^{i_1} \dots x_{j_k}^{i_k}.$$

6.2. m -инварианты. Дадим описание m -инвариантов, используя первую основную теорему теории инвариантов.

Рассмотрим произведение

$$m_{i_1, j_1} \dots m_{i_k, j_k}.$$

Множество индексов $\{i_1, j_1, \dots, i_k, j_k\}$ разделим на p групп

$$\{a_1, \dots, a_s\}, \quad \dots, \quad \{b_1, \dots, b_t\}.$$

Индексы из первой группы сворачиваются с $\omega_{a_1, \dots, a_s}, \dots$, индексы из последней группы сворачиваются с $\omega_{b_1, \dots, b_t}$.

Можно дать графическое описание m -инвариантов. Именно, инвариант описывается ориентированным графом, ребра этого графа пронумерованы числами $1, \dots, k$. Ребру с номером l соответствует множитель m_{i_l, j_l} . Вершине, в которую входят ребра с номерами $a_1, \dots, a_s$ и из которой выходят ребра с номерами $b_1, \dots, b_t$, соответствует свертка индексов

$$j_{a_1}, \dots, j_{a_s}, i_{b_1}, \dots, i_{b_t} \quad \text{с} \quad \omega_{j_{a_1}, \dots, j_{a_s}, i_{b_1}, \dots, i_{b_t}}.$$

6.3. Центральные элементы. Найдем, какие из m -инвариантов задают ненулевые центральные элементы. Используем тот факт, что в случае алгебры $\mathfrak{g}_2$ элементы L_{ij} удовлетворяют условию [11]

$$L_{ij} \omega_{i, j, l} = 0. \quad (6.2)$$

Рис. 9. Граф, кодирующий $\mathfrak{g}_2$ -инвариант

Используя (6.2), а также приведенное в разделе 2 описание m -инвариантов для $\mathfrak{g}_2$ видим, что ненулевыми могут быть лишь центральные элементы, которые описываются так. Берется произведение

$$L_{i_1,j_1} \dots L_{i_k,j_k};$$

после этого множества индексов $\{i_1, j_1 \dots, i_k, j_k\}$ разбиваются на подмножества

$$\{a_1, \dots, a_t\} \sqcup \dots \sqcup \{b_1, \dots, b_t\},$$

при этом одно множество не может содержать индексы i_k, j_k одновременно. Каждое множество индексов сворачивается с соответствующим тензором типа ω .

Согласно предложению 1 так построенные выражения являются центральными элементами.

6.4. Функция G . Пусть $M = (m_{ij})$ есть матрица размера 8×8 (или 7×7), чьи строки и столбцы занумерованы базисными октонионами (мнимыми октонионами).

Зафиксируем целое число k , $2 \leq k \leq 8$, и наборы целых чисел

$$n_1, \dots, n_p, \quad n_1 + \dots + n_p = k, \quad m_1, \dots, m_q, \quad m_1 + \dots + m_q = k,$$

так что

$$\begin{aligned} &G_{m_1, \dots, m_q}^{n_1, \dots, n_p}(L) \\ &= \sum_{\substack{\{i_1, \dots, i_k\} = I_1 \sqcup \dots \sqcup I_p \\ \{j_1, \dots, j_k\} = J_1 \sqcup \dots \sqcup J_q}} \omega_{i_1^1, \dots, i_{n_1}^1} \dots \omega_{i_p^1, \dots, i_{n_p}^p} \omega_{j_1^1, \dots, j_{m_1}^1} \dots \omega_{j_q^1, \dots, j_{m_q}^q} L_{i_1, j_1} \dots L_{i_k, j_k}, \end{aligned} \tag{6.3}$$

где суммирование идет по разбиениям множеств $I = \{i_1, \dots, i_k\}$ и $J = \{j_1, \dots, j_k\}$, при этом

$$I_1 = \{i_1^1, \dots, i_{n_1}^1\}, \quad \dots, \quad J_1 = \{j_1^1, \dots, j_{m_1}^1\} \quad \dots$$

Таким образом, мы приходим к следующему результату.

ТЕОРЕМА 4. *Всевозможные функции $G_{m_1, \dots, m_q}^{n_1, \dots, n_p}(L)$ принадлежат $U(\mathfrak{g}_2)$.*

Однако, между этими центральными элементами имеются соотношения.

6.5. Примеры.

6.5.1. *Центральный элемент порядка 2.* Рассмотрим инвариант порядка 2. Для конструирования центрального элемента возьмем функцию $G_2^2(L)$. Чтобы выписать

его явно возьмем произведение

$$L_{i_1, j_1} L_{i_2, j_2}, \quad (6.4)$$

индексы i_1, i_2 необходимо свернуть с $\omega_{i_1, i_2, 1}$, а индексы j_1, j_2 необходимо свернуть с $\omega_{j_1, j_2, 1}$.

Так как ω_{i_1, i_2, i_3} это структурные константы октонионов, а базисные октонионы в квадрате равны -1 , то

$$\omega_{i_1, i_2, 1} = -1 \iff i_1 = i_2.$$

Значит, свертка есть сумма

$$L_{i_1, j_1} L_{i_1, j_1}. \quad (6.5)$$

Таким образом, центральный элемент есть элемент Казимира.

6.5.2. Центральные элементы высших порядков. Рассмотрим инвариант порядка m определяемый функцией $G_m^m(L)$. Чтобы выписать его явно, возьмем произведение

$$L_{i_1, j_1} \dots L_{i_m, j_m}; \quad (6.6)$$

индексы $i_1, \dots, i_m$ необходимо свернуть с $\omega_{i_1, \dots, i_m}$, а индексы $j_1, \dots, j_m$ необходимо свернуть с $\omega_{j_1, \dots, j_m}$.

Имеется семь мнимых октонионов, произведение которых равно ± 1 . Отсюда легко сделать вывод, что $\omega_{j_1, \dots, j_m} = 0$ при $m = 5, 6$, а при $m = 7$ свертка с $\omega_{j_1, \dots, j_7}$ означает просто антисимметризацию по индексам $i_1, \dots, i_7$.

Центральные элементы, соответствующие $m = 3, 4$ выражаются через элемент Казимира (так как центральные элементы имеют порядки 2, 6), а соответствующий $m = 7$ элемент есть $\det L$.

6.6. Выводы. Дана конструкция центральных элементов в $U(\mathfrak{o}_N)$ на основе первой основной теоремы теории инвариантов. При этой конструкции естественно возникли пфаффианы.

Также дана конструкция центральных элементов в $U(\mathfrak{g}_2)$. При этой конструкции естественно возникли новые функции от матричных элементов $G_{m_1, \dots, m_q}^{n_1, \dots, n_p}(L)$, задаваемых формулой (6.3).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] R. Howe, T. Umeda, “The Capelli identity, the double commutant theorem and multiplicity-free actions”, *Math. Ann.*, **290**:3 (1991), 565–619.
- [2] M. Itoh, T. Umeda, “On Central Elements in the Universal Enveloping Algebras of the Orthogonal Lie Algebras”, *Compositio Math.*, **127**:3 (2001), 333–359.
- [3] A. Molev, *Yangians and Classical Lie Algebras*, Math. Surveys Monogr., **143**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2007.
- [4] И. М. Гельфанд, “Центр инфинитезимального группового кольца”, *Матем. сб.*, **26**:1 (1950), 103–112.
- [5] Д. П. Желобенко, *Компактные группы Ли и их представления*, МЦНМО, М., 2007.
- [6] D. V. Artamonov, V. A. Golubeva, “Capelli elements for the Lie algebra $\mathfrak{g}_2$ ”, *J. Lie Theory*, **23**:2 (2013), 589–606.
- [7] Д. В. Артамонов, В. А. Голубева, “Некоммутативные пфаффианы, связанные с ортогональной алгеброй”, *Матем. сб.*, **203**:12 (2012), 5–34.
- [8] Г. Вейль, *Классические группы, их инварианты и представления*, ИЛ, М., 1947.

- [9] G. W. Schwarz, “Invariant theory of G_2 ”, *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, **9** (1983), 335–388.
- [10] G. W. Schwarz, “Invariant theory of G_2 and Spin_7 ”, *Comment. Math. Helv.*, **63**:4 (1988), 624–663.
- [11] L. Frappat, A. Sciarrino, P. Sorba, *Dictionary on the Lie algebras and Superalgebras*, Academic Press, San Diego, CA, 2000.

Д. В. Артамонов

Московский государственный университет

имени М.В.Ломоносова

E-mail: artamonov.dmitri@gmail.com

Поступило

18.02.2014

Исправленный вариант

13.09.2014

В. А. Голубева

Московский авиационный институт

(национальный исследовательский университет)

E-mail: goloubeva@yahoo.com