Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. М. Бикчентаев, К теории τ -измеримых операторов,
присоединенных к полуконечной алгебре фон Неймана,
Матем. заметки, 2015, том 98, выпуск 3, 337–348

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10638>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.97.219

26 апреля 2023 г., 16:16:04

К теории τ -измеримых операторов, присоединенных к полуконечной алгебре фон Неймана

А. М. Бикчентаев

Пусть $\mathcal{M}$ – алгебра фон Неймана операторов в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, τ – точный нормальный полуконечный след на $\mathcal{M}$, $L_1(\mathcal{M}, \tau)$ – банахово пространство τ -интегрируемых операторов. Получены следующие результаты.

Если $X = X^*$, $Y = Y^*$ – τ -измеримые операторы и $XY \in L_1(\mathcal{M}, \tau)$, то $YX \in L_1(\mathcal{M}, \tau)$ и $\tau(XY) = \tau(YX) \in \mathbb{R}$. В частности, если $X, Y \in \mathcal{B}(\mathcal{H})^{\text{sa}}$ и $XY \in \mathfrak{S}_1$, то $YX \in \mathfrak{S}_1$ и $\text{tr}(XY) = \text{tr}(YX) \in \mathbb{R}$. Если $X \in L_1(\mathcal{M}, \tau)$, то $\tau(X^*) = \overline{\tau(X)}$.

Пусть A – τ -измеримый оператор. Если оператор A τ -компактен и $V \in \mathcal{M}$ является сжатием, то из $V^*AV = A$ следует, что $VA = AV$. Имеем $A = A^2$ тогда и только тогда, когда $A = |A^*||A|$. Это представление является новым и для ограниченных идемпотентов в $\mathcal{H}$. Если $A = A^2 \in L_1(\mathcal{M}, \tau)$, то $\tau(A) = \tau(\sqrt{|A|}|A^*|\sqrt{|A|}) \in \mathbb{R}^+$. Если $A = A^2$ и A (или A^*) полу-гипонормален, то A нормален; тем самым, A является проектором. Если $A = A^3$ и A гипонормален или когипонормален, то A нормален; тем самым, $A = A^*$ $\in \mathcal{M}$ и является разностью двух взаимно ортогональных проекторов $(A + A^2)/2$, $(A^2 - A)/2$. Если $A, A^2 \in L_1(\mathcal{M}, \tau)$ и $A = A^3$, то $\tau(A) \in \mathbb{R}$.

Библиография: 20 названий.

DOI: 10.4213/mzm10638

Введение. Пусть $\mathcal{M}$ – алгебра фон Неймана операторов в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, τ – точный нормальный полуконечный след на $\mathcal{M}$, $L_1(\mathcal{M}, \tau)$ – банахово пространство τ -интегрируемых операторов. В работе получены следующие результаты об алгебраических и порядковых свойствах следа τ и элементов $*$ -алгебры $\widetilde{\mathcal{M}}$ всех τ -измеримых операторов.

Если $X, Y \in \widetilde{\mathcal{M}}^{\text{sa}}$ и $XY \in L_1(\mathcal{M}, \tau)$, то

$$YX \in L_1(\mathcal{M}, \tau) \quad \text{и} \quad \tau(XY) = \tau(YX) \in \mathbb{R}$$

(теорема 2.1). В частности, если $X, Y \in \mathcal{B}(\mathcal{H})^{\text{sa}}$ и $XY \in \mathfrak{S}_1$, то

$$YX \in \mathfrak{S}_1 \quad \text{и} \quad \text{tr}(XY) = \text{tr}(YX) \in \mathbb{R}.$$

Если $X \in L_1(\mathcal{M}, \tau)$, то

$$\tau(X^*) = \overline{\tau(X)}$$

(теорема 2.3). Если оператор A τ -компактен и $V \in \mathcal{M}$ является сжатием, то из $V^*AV = A$ следует, что

$$VA = AV$$

(теорема 2.4). Приведен пример неограниченного оператора $A \in \widetilde{\mathcal{M}}$ с $A = A^2$ (пример 3.2).

Пусть оператор $A \in \widetilde{\mathcal{M}}$. Имеем $A = A^2$ тогда и только тогда, когда $A = |A^*||A|$ (теорема 3.3). Это представление является новым и для ограниченных идемпотентов в $\mathcal{H}$. Если $A = A^2$, то существует такой унитарный оператор $S = S^* \in \mathcal{M}$, что

$$4|\operatorname{Re} A| \leq |A|^2 + |A^*|^2 + S(|A|^2 + |A^*|^2)S$$

(следствие 3.4). Поэтому

$$2\tau(|\operatorname{Re} A|) \leq \tau(|A|^2 + |A^*|^2).$$

Если $A = A^2 \in L_1(\mathcal{M}, \tau)$, то

$$\tau(A) = \tau(\sqrt{|A|}|A^*|\sqrt{|A|}) \in \mathbb{R}^+.$$

Если $A = A^n$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$ и оператор A не τ -компактен, то его перестановка $\mu_t(A) \geq 1$ для всех $t > 0$ (лемма 3.8). Если $A = A^2$ и A (или A^*) полу-гипонормален, то A нормален; тем самым, A является проектором (теорема 3.9). Если $A = A^3$ и A гипонормален или когипонормален, то A нормален; тем самым, $A = A^* \in \mathcal{M}$ и является разностью двух взаимно ортогональных проекторов $(A + A^2)/2$, $(A^2 - A)/2$ (теорема 3.11). Если для некоторого $\lambda \in \mathbb{C}$ оператор $A_\lambda = \lambda I + A$ гипонормален (или когипонормален) и $A_\lambda = A_\lambda^3$, то $A \in \mathcal{M}$ (следствие 3.12). Если $A, A^2 \in L_1(\mathcal{M}, \tau)$ и $A = A^3$, то $\tau(A) \in \mathbb{R}$ (следствие 3.13).

1. Обозначения, определения и предварительные сведения. Пусть $\mathcal{M}$ – C^* -алгебра, $\mathcal{M}^+$ – конус положительных элементов из $\mathcal{M}$. Отображение $\varphi: \mathcal{M}^+ \rightarrow [0, +\infty]$ называется *весом*, если

$$\varphi(X + Y) = \varphi(X) + \varphi(Y), \quad \varphi(\lambda X) = \lambda \varphi(X) \quad \text{для всех } X, Y \in \mathcal{M}^+, \quad \lambda \geq 0$$

(при этом $0 \cdot (+\infty) \equiv 0$). Вес φ называется *точным*, если

$$\varphi(X) > 0 \quad \text{для всех } X \in \mathcal{M}^+, \quad X \neq 0;$$

конечным, если

$$\varphi(X) < +\infty \quad \text{для всех } X \in \mathcal{M}^+;$$

следом, если

$$\varphi(Z^*Z) = \varphi(ZZ^*) \quad \text{для всех } Z \in \mathcal{M}.$$

След φ называется *полуконечным*, если

$$\varphi(X) = \sup\{\varphi(Y) : Y \in \mathcal{M}^+, Y \leq X, \varphi(Y) < +\infty\}$$

для каждого $X \in \mathcal{M}^+$. Для веса φ определим

$$\mathfrak{M}_\varphi^+ = \{X \in \mathcal{M}^+ : \varphi(X) < +\infty\}, \quad \mathfrak{M}_\varphi^{\text{sa}} = \lim_{\mathbb{R}} \mathfrak{M}_\varphi^+, \quad \mathfrak{M}_\varphi = \lim_{\mathbb{C}} \mathfrak{M}_\varphi^+.$$

Ограничение $\varphi|_{\mathfrak{M}_\varphi^+}$ корректно продолжается по линейности до функционала на $\mathfrak{M}_\varphi$, который будем обозначать той же буквой φ . Такое продолжение позволяет отождествлять конечные веса с положительными функционалами на $\mathcal{M}$.

Пусть $\mathcal{M}$ – алгебра фон Неймана операторов в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, $\mathcal{M}^{\text{pr}}$ – решетка проекторов в $\mathcal{M}$, I – единица $\mathcal{M}$. Оператор в $\mathcal{H}$ (не обязательно ограниченный или плотно определенный) называется *присоединенным к алгебре фон Неймана $\mathcal{M}$* , если он перестановочен с любым унитарным оператором из коммутанта $\mathcal{M}'$ алгебры $\mathcal{M}$. Самосопряженный оператор присоединен к $\mathcal{M}$ тогда и только тогда, когда все проекторы из его спектрального разложения единицы принадлежат $\mathcal{M}$.

Вес φ на алгебре фон Неймана $\mathcal{M}$ называется *нормальным*, если

$$X_i \nearrow X, \quad X_i, X \in \mathcal{M}^+ \quad \Longrightarrow \quad \varphi(X) = \sup \varphi(X_i).$$

Пусть τ – точный нормальный полуконечный след на $\mathcal{M}$. Замкнутый оператор X , присоединенный к $\mathcal{M}$, имеющий всюду плотную в $\mathcal{H}$ область определения $\mathcal{D}(X)$, называется *τ -измеримым*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такой $P \in \mathcal{M}^{\text{pr}}$, что

$$P\mathcal{H} \subset \mathcal{D}(X), \quad \tau(I - P) < \varepsilon.$$

Множество $\widetilde{\mathcal{M}}$ всех τ -измеримых операторов является $*$ -алгеброй относительно перехода к сопряженному оператору, умножению на скаляр и операций сильного сложения и умножения, получаемых замыканием обычных операций [1], [2]. Для семейства $\mathcal{L} \subset \widetilde{\mathcal{M}}$ обозначим через $\mathcal{L}^+$ и $\mathcal{L}^{\text{sa}}$ его положительную и эрмитову части соответственно. Частичный порядок в $\widetilde{\mathcal{M}}^{\text{sa}}$, порожденный собственным конусом $\widetilde{\mathcal{M}}^+$, будем обозначать через $\leq$.

Если X – замкнутый плотно заданный линейный оператор, присоединенный к $\mathcal{M}$, и $|X| = \sqrt{X^*X}$, то спектральное разложение $P^{|X|}(\cdot)$ содержится в $\mathcal{M}$ и $X \in \widetilde{\mathcal{M}}$ тогда и только тогда, когда существует такое $\lambda \in \mathbb{R}$, что $\tau(P^{|X|}((\lambda, +\infty))) < +\infty$. Если $X \in \widetilde{\mathcal{M}}$ и $X = U|X|$ – полярное разложение X , то $U \in \mathcal{M}$ и $|X| \in \widetilde{\mathcal{M}}^+$. При этом, если $|X| = \int_0^\infty \lambda P^{|X|}(d\lambda)$ – спектральное разложение, то

$$\tau(P^{|X|}((\lambda, +\infty))) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \lambda \rightarrow +\infty.$$

Через $\mu_t(X)$ обозначим *перестановку* оператора $X \in \widetilde{\mathcal{M}}$, т.е. невозрастающую непрерывную справа функцию $\mu(X): (0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, заданную формулой

$$\mu_t(X) = \inf\{\|XP\| : P \in \mathcal{M}^{\text{pr}}, \tau(I - P) \leq t\}, \quad t > 0.$$

Множество τ -компактных операторов

$$\widetilde{\mathcal{M}}_0 = \left\{ X \in \widetilde{\mathcal{M}} : \mu_\infty(X) \equiv \lim_{t \rightarrow \infty} \mu_t(X) = 0 \right\}$$

является идеалом в $\widetilde{\mathcal{M}}$ [3].

Пусть m – линейная мера Лебега на $\mathbb{R}$. Ассоциированное с $(\mathcal{M}, \tau)$ некоммутативное L_p -пространство Лебега, $0 < p < \infty$, может быть определено как

$$L_p(\mathcal{M}, \tau) = \{X \in \widetilde{\mathcal{M}} : \mu(X) \in L_p(\mathbb{R}^+, m)\}$$

с F -нормой (нормой для $1 \leq p < \infty$)

$$\|X\|_p = \|\mu(X)\|_p, \quad X \in L_p(\mathcal{M}, \tau).$$

Ограничение $\tau|_{\mathfrak{M}_\tau^+}$ продолжается до линейного ограниченного функционала на пространство $L_1(\mathcal{M}, \tau)$, который будем обозначать той же буквой τ .

ЛЕММА 1.1 ([4; теорема 3]; [5; теорема 1]). Если $X, Y \in \widetilde{\mathcal{M}}^+$ и $XY \in L_1(\mathcal{M}, \tau)$, то

$$\sqrt{XY}\sqrt{X}, \sqrt{Y}X\sqrt{Y} \in L_1(\mathcal{M}, \tau)^+ \quad \text{и} \quad \tau(XY) = \tau(\sqrt{XY}\sqrt{X}) = \tau(\sqrt{Y}X\sqrt{Y}).$$

ЛЕММА 1.2 (см. [3], [6], [7]). Пусть $X, Y \in \widetilde{\mathcal{M}}$. Тогда выполнены следующие утверждения:

- 1) $\mu_t(X) = \mu_t(|X|) = \mu_t(X^*)$ для всех $t > 0$;
- 2) если $|X| \leq |Y|$, то $\mu_t(X) \leq \mu_t(Y)$ для всех $t > 0$;
- 3) $\mu_{s+t}(X+Y) \leq \mu_s(X) + \mu_t(Y)$ для всех $s, t > 0$;
- 4) $\mu_{s+t}(XY) \leq \mu_s(X)\mu_t(Y)$ для всех $s, t > 0$;
- 5) $\lim_{t \rightarrow 0+} \mu_t(X) = \|X\|$, если $X \in \mathcal{M}$, и $\lim_{t \rightarrow 0+} \mu_t(X) = \infty$, если $X \notin \mathcal{M}$;
- 6) $\mu_t(|X|^p) = \mu_t(X)^p$ для всех $p > 0$ и $t > 0$;
- 7) если $X \in \mathcal{M}$, то $\mu_t(XY) \leq \|X\|\mu_t(Y)$ для всех $t > 0$.

ЛЕММА 1.3 (см. [8; с. 720]). Если $X, Y \in \widetilde{\mathcal{M}}^+$ и $Z \in \widetilde{\mathcal{M}}$, то из неравенства $X \leq Y$ следует, что

$$ZXZ^* \leq ZYZ^*.$$

ЛЕММА 1.4. Если $X, Y \in \widetilde{\mathcal{M}}^+$, то из неравенства $X \leq Y$ следует, что

$$\sqrt{X} \leq \sqrt{Y}.$$

Оператор $X \in \widetilde{\mathcal{M}}$ называется *полу-гипонормальным*, если $|X| \geq |X^*|$; *гипонормальным*, если

$$X^*X \geq XX^*, \quad (1)$$

когипонормальным, если X^* гипонормален.

Если $\mathcal{M} = \mathcal{B}(\mathcal{H})$ – $*$ -алгебра всех ограниченных линейных операторов в $\mathcal{H}$ и $\tau = \text{tr}$ – канонический след, то $\widetilde{\mathcal{M}}$ совпадает с $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, а $\widetilde{\mathcal{M}}_0$ есть идеал компактных операторов в $\mathcal{H}$. Имеем

$$\mu_t(X) = \sum_{n=1}^{\infty} s_n(X) \chi_{[n-1, n)}(t), \quad t > 0,$$

где $\{s_n(X)\}_{n=1}^{\infty}$ – последовательность s -чисел оператора X [9; с. 46]; χ_A – индикатор множества $A \subset \mathbb{R}$. Тогда пространство $L_p(\mathcal{M}, \tau)$ есть идеал Шаттена–фон Неймана $\mathfrak{S}_p$, $0 < p < \infty$.

2. Алгебраические свойства τ -измеримых операторов. Пусть τ – точный нормальный полуконечный след на алгебре фон Неймана $\mathcal{M}$.

ТЕОРЕМА 2.1. Если $X, Y \in \widetilde{\mathcal{M}}^{\text{sa}}$ и $XY \in L_1(\mathcal{M}, \tau)$, то

$$YX \in L_1(\mathcal{M}, \tau) \quad \text{и} \quad \tau(XY) = \tau(YX) \in \mathbb{R}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $A, B \in \widetilde{\mathcal{M}}$ и $AB, BA \in L_1(\mathcal{M}, \tau)$, то

$$\tau(AB) = \tau(BA)$$

[10; теорема 17]. Для $X, Y \in \widetilde{\mathcal{M}}^{\text{sa}}$ с $XY \in L_1(\mathcal{M}, \tau)$ имеем

$$YX = (XY)^* \in L_1(\mathcal{M}, \tau),$$

поэтому

$$\tau(XY) = \tau(YX) \quad \text{и} \quad \|XY\|_1 = \|YX\|_1.$$

Пусть $X = X_+ - X_-$, $Y = Y_+ - Y_-$ – разложения Жордана с $X_+, X_-, Y_+, Y_- \in \widetilde{\mathcal{M}}^+$, $X_+X_- = 0$, $Y_+Y_- = 0$ и

$$X_+ + X_- = |X|, \quad Y_+ + Y_- = |Y|.$$

Пусть $s_r(Z)$ – правый носитель оператора $Z \in \widetilde{\mathcal{M}}$. Если $A \in L_1(\mathcal{M}, \tau)$ и $B, C \in \mathcal{M}$, то $BAC \in L_1(\mathcal{M}, \tau)$, см. пп. 1), 7) леммы 1.2. Поэтому операторы

$$\begin{aligned} X_+Y_+ &= s_r(X_+) \cdot XY \cdot s_r(Y_+), & X_+Y_- &= -s_r(X_+) \cdot XY \cdot s_r(Y_-), \\ X_-Y_+ &= -s_r(X_-) \cdot XY \cdot s_r(Y_+), & X_-Y_- &= s_r(X_-) \cdot XY \cdot s_r(Y_-) \end{aligned}$$

лежат в $L_1(\mathcal{M}, \tau)$. В силу леммы 1.1 имеем

$$\tau(X_+Y_+) = \tau(\sqrt{X_+}Y_+\sqrt{X_+}) \in \mathbb{R}^+;$$

аналогичным образом,

$$\tau(X_+Y_-), \tau(X_-Y_+), \tau(X_-Y_-) \in \mathbb{R}^+.$$

Теперь в силу линейности следа τ на $L_1(\mathcal{M}, \tau)$ имеем

$$\begin{aligned} \tau(XY) &= \tau(X_+Y_+ - X_+Y_- - X_-Y_+ + X_-Y_-) \\ &= \tau(X_+Y_+) - \tau(X_+Y_-) - \tau(X_-Y_+) + \tau(X_-Y_-) \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 2.2. Если $X, Y \in \mathcal{B}(\mathcal{H})^{\text{sa}}$ и $XY \in \mathfrak{S}_1$, то

$$YX \in \mathfrak{S}_1 \quad \text{и} \quad \text{tr}(XY) = \text{tr}(YX) \in \mathbb{R}.$$

ТЕОРЕМА 2.3. Если $X \in L_1(\mathcal{M}, \tau)$, то $\tau(X^*) = \overline{\tau(X)}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Шаг 1. Если $X \in L_1(\mathcal{M}, \tau)^+$, то

$$\tau(X) = \|X\|_1 \in \mathbb{R}^+.$$

Если $X \in L_1(\mathcal{M}, \tau)^{\text{sa}}$, то, записав разложение Жордана $X = X_+ - X_-$ с $X_+, X_- \in \widetilde{\mathcal{M}}^+$, $X_+X_- = 0$, имеем

$$X_+, X_- \in L_1(\mathcal{M}, \tau)^+ \quad \text{и} \quad \tau(X) = \tau(X_+) - \tau(X_-) \in \mathbb{R}.$$

Шаг 2. Пусть $i \in \mathbb{C}$ с $i^2 = -1$ и $X \in L_1(\mathcal{M}, \tau)$. Для $\text{Re } X = (X + X^*)/2$ и $\text{Im } X = (X - X^*)/(2i)$ имеем

$$X = \text{Re } X + i \text{Im } X \quad \text{и} \quad \text{Re } X, \text{Im } X \in L_1(\mathcal{M}, \tau)^{\text{sa}}.$$

В силу шага 1 получаем

$$\tau(\text{Re } X) \equiv x \in \mathbb{R}, \quad \tau(\text{Im } X) \equiv y \in \mathbb{R}.$$

Тогда $\tau(X) + \tau(X^*) = 2x$ и $\tau(X) - \tau(X^*) = 2iy$, тем самым,

$$\tau(X^*) = x - iy = \overline{\tau(X)}.$$

Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 2.4. Пусть $A \in \widetilde{\mathcal{M}}_0$ и $V \in \mathcal{M}$ с $\|V\| \leq 1$. Если $V^*AV = A$, то

$$VA = AV.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\text{Re } A = (A + A^*)/2$ и $\text{Im } A = (A - A^*)/(2i)$; тогда

$$A = \text{Re } A + i \text{Im } A \quad \text{и} \quad \text{Re } A, \text{Im } A \in \widetilde{\mathcal{M}}_0^{\text{sa}}.$$

Имеем

$$V^* \cdot \text{Re } A \cdot V = \text{Re } A \quad \text{и} \quad V^* \cdot \text{Im } A \cdot V = \text{Im } A.$$

Поэтому можем считать, что $A \in \widetilde{\mathcal{M}}_0^{\text{sa}}$. Поскольку $VA = VV^*AV$, доказательство теоремы будем завершать проверкой равенства

$$VV^*A = A.$$

Так как $V^*AV = A$, то

$$A^2 = V^*AVV^*AV.$$

Поскольку $V^*V \leq I$, в силу леммы 1.3 имеем

$$AVV^*A \leq A^2;$$

учитывая свойства 2), 1) и 7) перестановок из леммы 1.2, получаем

$$\mu_t(A^2) = \mu_t(V^*AVV^*AV) \leq \|V^*\| \|V\| \mu_t(AVV^*A) \leq \mu_t(AVV^*A) \leq \mu_t(A^2)$$

для всех $t > 0$. Поэтому

$$\mu_t(AVV^*A) = \mu_t(A^2) \quad \text{для всех } t > 0.$$

Операторы A^2 и AVV^*A τ -компактны. Имеем

$$A^2 = AVV^*A + B$$

с оператором $B = A(I - VV^*)A \in \widetilde{\mathcal{M}}_0^+$. Покажем, что $B = 0$.

Если $X, Y \in \widetilde{\mathcal{M}}^+$, $Y \neq 0$ и $X \geq \mu_\infty(X) \cdot I$, то существует такое число $s > 0$, что

$$\mu_s(X) < \mu_s(X + Y)$$

(см. предложение 2.2 [11]). Положив $X = AVV^*A$ и $Y = B$, получаем

$$Y = |\sqrt{I - VV^*}A|^2 = 0.$$

Следовательно, $\sqrt{I - VV^*}A = 0$ и $(I - VV^*)A = 0$, т.е.

$$VV^*A = A.$$

Теорема доказана.

3. Идемпотентные и трипотентные τ -измеримые операторы. Пусть τ – точный нормальный полуконечный след на алгебре фон Неймана $\mathcal{M}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. Пусть числа $0 < p, q, r \leq \infty$, $1/p + 1/q = 1/r$ и оператор $A \in \widetilde{\mathcal{M}}$. Если $A = A^2$ и $A \in L_p(\mathcal{M}, \tau) \cap L_q(\mathcal{M}, \tau)$, то

$$A \in L_r(\mathcal{M}, \tau) \quad \text{и} \quad \|A\|_r \leq \|A\|_p \|A\|_q.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $X \in L_p(\mathcal{M}, \tau)$ и $Y \in L_q(\mathcal{M}, \tau)$, то в силу леммы 1 [12] имеем

$$XY \in L_r(\mathcal{M}, \tau) \quad \text{и} \quad \|XY\|_r \leq \|X\|_p \|Y\|_q;$$

положим $X = Y = A$.

ПРИМЕР 3.2. Пусть числа $0 < p, q < \infty$, и пусть $a_n = 2^{n+1}n^{-q}$, $n \in \mathbb{N}$. Снабдим алгебру фон Неймана $\mathcal{M} = \bigoplus_{n=1}^{\infty} \mathbb{M}_2(\mathbb{C})$ точным нормальным конечным следом $\tau = \bigoplus_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \text{tr}_2$ и положим

$$A = \bigoplus_{n=1}^{\infty} \begin{pmatrix} 1 & a_n \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Имеем $A = A^2$ и $A \in L_p(\mathcal{M}, \tau)$ при $pq > 1$, $A \notin L_p(\mathcal{M}, \tau)$ при $pq \leq 1$.

ТЕОРЕМА 3.3. Для оператора $A \in \widetilde{\mathcal{M}}$ следующие условия эквивалентны:

- (i) $A = A^2$;
- (ii) $A = |A^*||A|$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $A \in \widetilde{\mathcal{M}}$ и $A = U|A|$ – полярное разложение. Тогда

$$|A^*| = U|A|U^*.$$

Умножив обе части этого равенства слева на оператор U^* , с учетом равенства $U^*U|A| = |A|$ получаем

$$U^*|A^*| = |A|U^*.$$

(i) $\Rightarrow$ (ii). Умножив обе части равенства $A = A^2$ слева и справа на оператор U^* , имеем

$$U^*U|A|U^* = U^*U|A|U|A|U^*,$$

и с учетом равенства $U^*U|A| = |A|$ получаем $A^* = |A||A^*|$.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Умножив обе части равенства $U|A| = |A^*||A|$ слева на оператор U^* , с учетом равенств $U^*U|A| = |A|$ и $U^*|A^*| = |A|U^*$ получаем

$$|A| = U^*|A^*||A| = |A|U^*|A|.$$

Умножив обе части равенства $|A| = |A|U^*|A|$ справа на оператор U^* , получаем

$$A^* = (A^*)^2.$$

Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 3.4. Если $A \in \widetilde{\mathcal{M}}$ и $A = A^2$, то существует такой унитарный оператор $S \in \mathcal{M}^{\text{sa}}$, что

$$4|\operatorname{Re} A| \leq |A|^2 + |A^*|^2 + S(|A|^2 + |A^*|^2)S. \quad (2)$$

Поэтому

$$2\tau(|\operatorname{Re} A|) \leq \tau(|A|^2 + |A^*|^2).$$

Если еще $A \in L_1(\mathcal{M}, \tau)$, то $\tau(A) \in \mathbb{R}^+$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $X, Y \in \widetilde{\mathcal{M}}^{\text{sa}}$, то $(X \pm Y)^2 \geq 0$, поэтому

$$-X^2 - Y^2 \leq XY + YX \leq X^2 + Y^2$$

и в силу [13; теорема 1 и § 2] существует такой унитарный оператор $S \in \mathcal{M}^{\text{sa}}$, что

$$2|XY + YX| \leq X^2 + Y^2 + S(X^2 + Y^2)S.$$

Представим оператор $2 \operatorname{Re} A$ по теореме 3.3 в виде

$$2 \operatorname{Re} A = A + A^* = |A^*||A| + |A||A^*|$$

и положим $X = |A^*|$, $Y = |A|$.

Если $A \in L_1(\mathcal{M}, \tau)$, то имеем $\sqrt{|A|}|A^*|\sqrt{|A|} \in L_1(\mathcal{M}, \tau)^+$ и

$$\tau(A) = \tau(|A^*||A|) = \tau(\sqrt{|A|}|A^*|\sqrt{|A|}) \geq 0$$

в силу леммы 1.1 с $X = |A|$ и $Y = |A^*|$. Утверждение доказано.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.5. Если $A \in \widetilde{\mathcal{M}}$, то

$$|A|^2 + |A^*|^2 = 2(\operatorname{Re} A)^2 + 2(\operatorname{Im} A)^2.$$

Поэтому $2(\operatorname{Re} A)^2 \leq |A|^2 + |A^*|^2$ и в силу леммы 1.4 имеем

$$\sqrt{2}|\operatorname{Re} A| \leq \sqrt{|A|^2 + |A^*|^2}.$$

Для $A \in \mathcal{M}^{\text{pt}}$ здесь, как и в (2), достигается равенство.

Пусть $\mathcal{M}$ — C^* -алгебра, $A \in \mathcal{M}$ и $A = A^2$. Существует единственное разложение $A = P + Z$, где $P \in \mathcal{M}^{\text{pr}}$ и нильпотент $Z \in \mathcal{M}$ с $Z^2 = 0$ и

$$ZP = 0, \quad PZ = Z$$

[14; теорема 1.3].

ТЕОРЕМА 3.6. Пусть φ — след на C^* -алгебре $\mathcal{M}$, $A = A^2 \in \mathcal{M}$ и $A = P + Z$ — описанное выше разложение. Тогда

$$A \in \mathfrak{M}_\varphi \iff P \in \mathfrak{M}_\varphi$$

и при выполнении этих условий имеем

$$\varphi(A) = \varphi(P).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Напомним, что $\mathfrak{M}_\varphi$ является идеалом в $\mathcal{M}$. Имеем

$$\varphi(XY) = \varphi(YX) \quad \text{для всех } X \in \mathfrak{M}_\varphi, \quad Y \in \mathcal{M}$$

[15; гл. 6, упражнение 6]. Если $A \in \mathfrak{M}_\varphi$, то

$$P = AP \in \mathfrak{M}_\varphi.$$

Если $P \in \mathfrak{M}_\varphi$, то

$$Z = PZ \in \mathfrak{M}_\varphi \quad \text{и} \quad A = P + Z \in \mathfrak{M}_\varphi.$$

Поскольку $ZA = 0$, $I - A = (I - A)^2$ и $(I - A)Z = 0$, имеем

$$\begin{aligned} \varphi(Z) &= \varphi(ZA + Z(I - A)) = \varphi(ZA) + \varphi(Z(I - A)) = 0 + \varphi(Z(I - A)^2) \\ &= \varphi((I - A)Z(I - A)) = 0. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.7. Для точного нормального полуконечного следа τ на алгебре фон Неймана $\mathcal{M}$ имеем

$$\mathfrak{M}_\tau = \mathcal{M} \cap L_1(\mathcal{M}, \tau).$$

Если $A = A^2 \in \mathcal{M}$, то

$$\mu_t(A) \in \{0\} \cup [1, \|A\|] \quad \text{для всех } t > 0$$

(см. п. 1) леммы 3.8 [16]). Из пп. 3) и 5) леммы 1.2 для $X \in \widetilde{\mathcal{M}}$ и $Y \in \mathcal{M}$ следует неравенство $\mu_t(X + Y) \leq \mu_t(X) + \|Y\|$ для всех $t > 0$. Поэтому

$$|\mu_t(A) - \mu_t(Z)| \leq 1 \quad \text{для всех } t > 0.$$

Из (2) для произвольного следа φ на $\mathcal{M}$ имеем

$$2\varphi(|\operatorname{Re} A|) \leq \varphi(|A|^2 + |A^*|^2).$$

ЛЕММА 3.8. Пусть оператор $A \in \widetilde{\mathcal{M}}$ и $A = A^n$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$. Если $A \notin \widetilde{\mathcal{M}}_0$, то

$$\mu_t(A) \geq 1 \quad \text{для всех } t > 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное, т.е. $a = \mu_\infty(A) \in (0, 1)$. Выберем такое число $\varepsilon > 0$, что $(a + \varepsilon)^n < a$ и пусть $t > 0$ такое, что $\mu_{t/n}(A) \in [a, a + \varepsilon]$. Тогда в силу п. 4) леммы 1.2 имеем

$$\mu_t(A) = \mu_t(A^n) \leq (\mu_{t/n}(A))^n \leq (a + \varepsilon)^n < a$$

– противоречие. Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 3.9. Пусть оператор $A \in \widetilde{\mathcal{M}}$ и $A = A^2$. Если A (или A^*) полу-гипонормален, то A нормален; тем самым, $A \in \mathcal{M}^{\text{pr}}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $A \in \widetilde{\mathcal{M}}$ полу-гипонормален.

Случай 1: пусть $A \in \widetilde{\mathcal{M}}_0$. Тогда A нормален в силу теоремы 2.2 [17]. Нормальный τ -измеримый оператор с вещественным спектром самосопряжен. Так как спектр $\sigma(A) \subset \{0, 1\}$, то

$$A \in \mathcal{M}^{\text{pr}}.$$

Случай 2: пусть $A \notin \widetilde{\mathcal{M}}_0$. Тогда в силу леммы 3.8 имеем $\mu_t(A) \geq 1$ для всех $t > 0$. Пусть $A = U|A|$ – полярное разложение. Умножив обе части неравенства $|A| \geq |A^*|$ слева и справа на оператор $|A^*|$, получаем в силу леммы 1.3 неравенство

$$|A^*||A||A^*| \geq |A^*|^3,$$

и с учетом полученного в теореме 3.3 представления $A = |A^*||A|$ имеем $A|A^*| \geq |A^*|^3$. Отсюда в силу пп. 2), 6) и 7) леммы 1.2 получаем

$$\mu_t(A)^3 = \mu_t(|A^*|^3) \leq \mu_t(A|A^*|) = \mu_t(U|A||A^*|) = \mu_t(UA^*) \leq \|U\|\mu_t(A^*) = \mu_t(A)$$

для всех $t > 0$. Следовательно, $\mu_t(A) = 1$ для всех $t > 0$. Таким образом, в силу п. 5) леммы 1.2 получаем $A \in \mathcal{M}$ и $\|A\| = 1$, поэтому $A \in \mathcal{M}^{\text{pr}}$.

Для $X \in \widetilde{\mathcal{M}}$ имеем

$$X = X^2 \iff X^* = X^{*2}.$$

Поэтому для полу-гипонормального A^* в вышеприведенных рассуждениях меняем A и A^* ролями. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 3.10. Пусть оператор $A \in \widetilde{\mathcal{M}}$ и $A = A^2$. Если A гипонормален или когипонормален, то A нормален; тем самым, $A \in \mathcal{M}^{\text{pr}}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу леммы 1.4 каждый τ -измеримый гипонормальный оператор полу-гипонормален.

ТЕОРЕМА 3.11. Пусть оператор $A \in \widetilde{\mathcal{M}}$ и $A = A^3$. Если A гипонормален или когипонормален, то A нормален; тем самым, $A \in \mathcal{M}^{\text{sa}}$ и $A = P - Q$ для некоторых $P, Q \in \mathcal{M}^{\text{pr}}$ с $PQ = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $A \in \widetilde{\mathcal{M}}$ гипонормален. Заметим, что оператор $B = A^2$ удовлетворяет условию $B = B^2$. Умножив обе части неравенства (1) слева на оператор A^* и справа на оператор A , в силу леммы 1.3 получаем $(A^2)^* A^2 \geq (A^* A)^2$. Тогда по лемме 1.4 имеем

$$|A^2| \geq A^* A. \quad (3)$$

Умножив обе части неравенства (1) слева на оператор A и справа на оператор A^* , в силу леммы 1.3 получаем $(AA^*)^2 \geq A^2 A^{2*}$. Тогда по лемме 1.4 имеем

$$AA^* \geq |A^{2*}|. \quad (4)$$

Теперь из (1), (3) и (4) получаем

$$|B| = |A^2| \geq A^* A \geq AA^* \geq |A^{2*}| = |B^*|. \quad (5)$$

т.е. оператор B является полу-гипонормальным. Теперь $B = B^*$ по теореме 3.9, поэтому все неравенства в (5) обращаются в равенства. Таким образом, $A^* A = AA^*$, т.е. оператор A нормален. Нормальный τ -измеримый оператор с вещественным спектром самосопряжен. Так как спектр $\sigma(A) \subset \{-1, 0, 1\}$, то

$$A \in \mathcal{M}^{\text{sa}} \quad \text{и} \quad A = P - Q$$

с проекторами $P = (A + A^2)/2$, $Q = (A^2 - A)/2$, см. [18; предложение 1].

Для $X \in \widetilde{\mathcal{M}}$ имеем

$$X = X^3 \iff X^* = X^{*3}.$$

Поэтому для когипонормального A в вышеприведенных рассуждениях меняем A и A^* ролями. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 3.12. Пусть оператор $A \in \widetilde{\mathcal{M}}$. Если для некоторого $\lambda \in \mathbb{C}$ оператор $A_\lambda = \lambda I + A$ гипонормален (или когипонормален) и $A_\lambda = A_\lambda^3$, то $A \in \mathcal{M}$.

СЛЕДСТВИЕ 3.13. Если $A, A^2 \in L_1(\mathcal{M}, \tau)$ и $A = A^3$, то $\tau(A) \in \mathbb{R}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В разложении $A = P - Q$ с $P = (A + A^2)/2$, $Q = (A^2 - A)/2$ [18; предложение 1] имеем

$$P = P^2, \quad Q = Q^2, \quad P, Q \in L_1(\mathcal{M}, \tau).$$

Так как $\tau(P), \tau(Q) \in \mathbb{R}^+$ в силу следствия 3.4, то

$$\tau(A) = \tau(P) - \tau(Q) \in \mathbb{R}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3.14. Для алгебры фон Неймана $\mathcal{M} = \mathcal{B}(\mathcal{H})$ и следа $\tau = \text{tr}$ утверждения теорем 3.9 и 3.11 получены в лемме 3 и теореме 2 [19] соответственно. Утверждение теоремы 2.3 в частном случае оператора $A \in \mathfrak{S}_2$ и изометрии V получено в лемме 3.1 [20].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] I. E. Segal, “A non-commutative extension of abstract integration”, *Ann. of Math.* (2), **57**:3 (1953), 401–457; рус. пер.: *Математика. Сб. переводов*, **6**:1 (1962), 65–132.
- [2] E. Nelson, “Notes on non-commutative integration”, *J. Funct. Anal.*, **15**:2 (1974), 103–116.
- [3] F. J. Yeadon, “Non-commutative L^p -spaces”, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **77**:1 (1975), 91–102.
- [4] А. М. Бикчентаев, “Об одном свойстве L_p -пространств на полуконечных алгебрах фон Неймана”, *Матем. заметки*, **64**:2 (1998), 185–190.
- [5] A. M. Bikchentaev, “Majorization for products of measurable operators”, *Internat. J. Theoret. Phys.*, **37**:1 (1998), 571–576.
- [6] T. Fack, H. Kosaki, “Generalized s -numbers of τ -measurable operators”, *Pacific J. Math.*, **123**:2 (1986), 269–300.
- [7] A. M. Bikchentaev, “On noncommutative function spaces”, *Selected Papers in K-theory*, Amer. Math. Soc. Transl. (2), **154**, 1992, 179–187.
- [8] P. G. Dodds, T. K.-Y. Dodds, B. de Pagter, “Noncommutative Köthe duality”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **339**:2 (1993), 717–750.
- [9] И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн, *Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве*, Наука, М., 1965.
- [10] L. G. Brown, H. Kosaki, “Jensen’s inequality in semifinite von Neumann algebras”, *J. Operator Theory*, **23**:1 (1990), 3–19.
- [11] V. I. Chilin, A. V. Krygin, F. A. Sukochev, “Extreme points of convex fully symmetric sets of measurable operators”, *Integral Equations Operator Theory*, **15**:2 (1992), 186–226.
- [12] H. Kosaki, “On the continuity of the map $\varphi \mapsto |\varphi|$ from the predual of a W^* -algebra”, *J. Funct. Anal.*, **59**:1 (1984), 123–131.
- [13] А. М. Бикчентаев, “Оператор блочного проектирования в нормированных идеальных пространствах измеримых операторов”, *Изв. вузов. Матем.*, 2012, № 2, 86–91.
- [14] J. J. Koliha, “Range projections of idempotents in C^* -algebras”, *Demonstratio Math.*, **34**:1 (2001), 91–103.
- [15] G. J. Murphy, *C^* -algebras and operator theory*, Academic Press, Boston, MA, 1990; рус. пер.: Дж. Мерфи, *C^* -алгебры и теория операторов*, Факториал, М., 1997.
- [16] А. М. Бикчентаев, “Локальная сходимостъ по мере на полуконечных алгебрах фон Неймана”, *Функциональные пространства, теория приближений, нелинейный анализ*, Сборник статей, Тр. МИАН, **255**, Наука, М., 2006, 41–54.
- [17] А. М. Бикчентаев, “О нормальных τ -измеримых операторах, присоединенных к полуконечной алгебре фон Неймана”, *Матем. заметки*, **96**:3 (2014), 350–360.
- [18] A. M. Bikchentaev, R. S. Yakushev, “Representation of tripotents and representations via tripotents”, *Linear Algebra Appl.*, **435**:9 (2011), 2156–2165.
- [19] A. M. Bikchentaev, “Tripotents in algebras: invertibility and hyponormality”, *Lobachevskii J. Math.*, **35**:3 (2014), 281–285.
- [20] H. A. Dye, “On the ergodic mixing theorem”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **118** (1965), 123–130.

А. М. Бикчентаев

Казанский (Приволжский) федеральный
университет

E-mail: Airat.Bikchentaev@kpfu.ru,

Airat.Bikchentaev@ksu.ru

Поступило

24.11.2014