Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Х. Д. Икрамов, Унитарные автоморфизмы пространства ганкелевых матриц. II. Случай четной размерности, *Матем. заметки*, 2015, том 98, выпуск 1, 76–84

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10639>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.166.219.16

26 апреля 2023 г., 17:42:38

Унитарные автоморфизмы пространства ганкелевых матриц. II. Случай четной размерности

Х. Д. Икрамов

Ранее для нечетных n автором было дано описание унитарных $n \times n$ -матриц U , обладающих следующим свойством: если H – ганкелева матрица, то матрица $U^* H U$ также ганкелева. В данной статье показано, что это описание остается верным для четных n , начиная с $n = 4$.

Библиография: 1 название.

DOI: 10.4213/mzm10639

1. Введение. Пусть $\mathcal{H}_n$ – это линейное пространство комплексных ганкелевых $n \times n$ -матриц. Напомним, что *ганкелевой* называется матрица вида

$$H = \begin{pmatrix} h_{n-1} & h_{n-2} & h_{n-3} & \dots & h_0 \\ h_{n-2} & h_{n-3} & h_{n-4} & \dots & h_{-1} \\ h_{n-3} & h_{n-4} & h_{n-5} & \dots & h_{-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_0 & h_{-1} & h_{-2} & \dots & h_{-n+1} \end{pmatrix}.$$

Нас интересует следующий вопрос: каковы те унитарные $n \times n$ -матрицы, которые отображают пространство $\mathcal{H}_n$ в себя посредством подобия. Если W обладает этим свойством, то будем писать $W \in \text{UAut}(\mathcal{H}_n)$. Таким образом, запись $W \in \text{UAut}(\mathcal{H}_n)$ означает импликацию

$$\forall A \in \mathcal{H}_n \rightarrow B = W^* A W \in \mathcal{H}_n.$$

Для нечетных n ответ на поставленный вопрос дает следующая теорема, доказанная в [1].

ТЕОРЕМА 1. Пусть $n \geq 3$ – нечетное число. Тогда множество $W \in \text{UAut}(\mathcal{H}_n)$ есть группа, изоморфная прямому произведению унитарной группы $\mathbf{U}_1$ и четвертой группы Клейна. При этом образующими элементами последней являются диагональная матрица

$$\mathcal{D}_n = \text{diag}(1, -1, 1, -1, \dots)$$

и так называемая перестановочная матрица

$$\mathcal{P}_n = \begin{pmatrix} & & & & 1 \\ & & & 1 & \\ & & \ddots & & \\ & 1 & & & \\ 1 & & & & \end{pmatrix}.$$

Случай четных порядков n оказался значительно более сложным для анализа. Так, при $n = 2$ группа $\text{UAut}(\mathcal{H}_n)$ отличается от множества, описываемого теоремой 1.

ТЕОРЕМА 2. *Группа $\text{UAut}(\mathcal{H}_2)$ есть прямое произведение унитарной группы $\mathbf{U}_1$ и вещественной ортогональной группы $\mathbf{O}_2$.*

Цель настоящей публикации – показать, что, с точностью до небольшого изменения формулировки, утверждение теоремы 1 остается верным для четных n , начиная с $n = 4$. Необходимость изменения связана с тем, что при четных n матрицы $\mathcal{D}_n$ и $\mathcal{P}_n$ не коммутируют и, следовательно, группа с такими образующими никак не может быть четверной. Итак, ниже мы доказываем следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 3. *Пусть $n \geq 4$ – четное число. Тогда множество $W \in \text{UAut}(\mathcal{H}_n)$ есть группа, изоморфная прямому произведению унитарной группы $\mathbf{U}_1$ и дискретной группы, образующими элементами которой являются диагональная матрица $\mathcal{D}_n$ и перестановочная матрица $\mathcal{P}_n$.*

2. Вспомогательные утверждения. Отметим некоторые очевидные свойства группы $\text{UAut}(\mathcal{H}_n)$, используемые в дальнейшем изложении.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *При любом n матрица $\mathcal{D}_n$ и перестановочная матрица $\mathcal{P}_n$ принадлежат группе $\text{UAut}(\mathcal{H}_n)$.*

Действительно, подобие с трансформирующей матрицей $\mathcal{P}_n$ есть отражение преобразуемой матрицы относительно ее центра. Ясно, что такое отражение сохраняет ганкелевость матрицы. Подобие же с трансформирующей матрицей $\mathcal{D}_n$ попросту изменяет знаки элементов преобразуемой матрицы, стоящих на диагоналях $i + j = k$ с нечетными индексами k .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Для любого числа α с модулем единица и произвольной матрицы $W \in \text{UAut}(\mathcal{H}_n)$ матрица αW также принадлежит $\text{UAut}(\mathcal{H}_n)$.*

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Если $W \in \text{UAut}(\mathcal{H}_n)$, то W^* , W^t , $\overline{W}$, $\mathcal{D}_n W$, $W \mathcal{D}_n$, $\mathcal{P}_n W$ и $W \mathcal{P}_n$ также принадлежат $\text{UAut}(\mathcal{H}_n)$.*

Предложения 2 и 3 суть простые следствия определения группы $\text{UAut}(\mathcal{H}_n)$.

3. Ненулевые элементы на границе матрицы W . Пусть n – четное число, большее двух, и пусть W – матрица из $\text{UAut}(\mathcal{H}_n)$. Проведем вначале анализ случая, когда на границе этой матрицы (т.е. в ее первых и последних строках и столбцах) нет нулевых элементов. Запишем первую и последнюю строки в виде

$$(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n), \quad (1)$$

$$(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n). \quad (2)$$

Пусть A обозначает ганкелеву $n \times n$ -матрицу, единственный ненулевой элемент которой находится в позиции $(1, 1)$ и равен единице. Положим

$$B = W^* A W.$$

Нетрудно видеть, что

$$B = \begin{pmatrix} |\alpha_1|^2 & \bar{\alpha}_1 \alpha_2 & \dots & \bar{\alpha}_1 \alpha_n \\ \bar{\alpha}_2 \alpha_1 & |\alpha_2|^2 & \dots & \bar{\alpha}_2 \alpha_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \bar{\alpha}_n \alpha_1 & \bar{\alpha}_n \alpha_2 & \dots & |\alpha_n|^2 \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Согласно предположению все элементы этой матрицы отличны от нуля, а из ее симметрии (вытекающей из ганкелевости) следует, что все попарные произведения $\bar{\alpha}_k \alpha_l$ суть вещественные числа. Другими словами, все компоненты строки (1) отличаются друг от друга вещественными множителями. Положим

$$\mu = \frac{\alpha_2}{\alpha_1}$$

и запишем условия ганкелевости для позиций (k, k) и $(k-1, k+1)$, $2 \leq k \leq n-1$:

$$|\alpha_2|^2 = \bar{\alpha}_1 \alpha_3, \quad |\alpha_3|^2 = \bar{\alpha}_2 \alpha_4, \quad \dots, \quad |\alpha_{n-1}|^2 = \bar{\alpha}_{n-2} \alpha_n.$$

Отсюда выводим

$$\frac{\alpha_3}{\alpha_2} = \frac{\bar{\alpha}_2}{\bar{\alpha}_1} = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \mu, \quad \frac{\alpha_4}{\alpha_3} = \frac{\bar{\alpha}_3}{\bar{\alpha}_2} = \frac{\alpha_3}{\alpha_2} = \mu,$$

и т.д. Тем самым компоненты строки (1) образуют геометрическую прогрессию с начальным элементом α_1 и знаменателем μ .

Совершенно таким же образом доказывается, что компоненты строки (2) составляют геометрическую прогрессию с начальным элементом β_1 и знаменателем

$$\nu = \frac{\beta_2}{\beta_1}.$$

Единственное изменение касается выбора матрицы A для обоснования этого утверждения: ее ненулевой элемент, по-прежнему равный единице, находится теперь в позиции (n, n) , а не $(1, 1)$.

Положим

$$x = \mu\nu \in \mathbb{R}.$$

Скалярное произведение строк (1) и (2) равно

$$\alpha_1 \bar{\beta}_1 (1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1}). \quad (4)$$

До сих пор наши рассуждения полностью повторяли доказательство, проведенное для случая нечетных n в [1]. Однако именно в этом месте анализ обоих случаев начинает различаться. В самом деле, при нечетном n выражение (4) не обращается в нуль ни при каком вещественном x , что противоречит ортогональности строк матрицы W . При четном n обращение в нуль возможно и происходит для единственного значения x , а именно $x = -1$. Таким образом, должно быть

$$\nu = -\mu^{-1},$$

что и будет в дальнейшем предполагаться. В силу предложения 3 мы можем считать, что μ – положительное число, не меньшее единицы.

Евклидовы нормы строк (1) и (2) равны единице. Полагая

$$f(\mu) = 1 + \mu^2 + \mu^4 + \dots + \mu^{2(n-1)},$$

имеем

$$|\alpha_1|^2 f(\mu) = 1, \\ |\beta_1|^2 (1 + \mu^{-2} + \mu^{-4} + \dots + \mu^{-2(n-1)}) = |\beta_1|^2 \mu^{-2(n-1)} f(\mu) = 1.$$

Отсюда выводим

$$|\beta_1| = |\alpha_1|\mu^{n-1}, \quad |\beta_n| = |\beta_1| \cdot |\nu^{n-1}| = |\alpha_1|.$$

Анализ, изложенный выше для первой и последней строк матрицы W , справедлив и для крайних столбцов этой матрицы. В частности, все элементы первого столбца имеют один и тот же аргумент (по модулю π), и аналогичное утверждение верно в отношении последнего столбца. Применяя к элементам α_1 и β_1 предложение 3, можем без ограничения общности считать, что

$$\beta_1 = \alpha_1\mu^{n-1}, \quad (5)$$

а тогда

$$\beta_n = -\alpha_1. \quad (6)$$

Теперь, с учетом равенств (5) и (6), можно утверждать следующее:

- а) элементы первого столбца образуют геометрическую прогрессию со знаменателем μ ; она начинается с числа α_1 и заканчивается числом β_1 ;
- б) элементы последнего столбца образуют геометрическую прогрессию со знаменателем $-\mu^{-1}$; она начинается с числа β_1 и заканчивается числом $\beta_n = -\alpha_1$.

В последующем анализе вместо матрицы W можно, не меняя обозначений, рассматривать матрицу $\alpha_1^{-1}W$. Это не повлияет на выводы, относящиеся к ортогональности строк и столбцов и соотношению их норм. Таким образом, считаем впредь, что

$$w_{11} = 1.$$

Исследуем теперь вторую строку матрицы W . Запишем ее в виде

$$(\mu, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, -\mu^{n-2}).$$

Прежнюю матрицу A заменим на ганкелеву матрицу с единицами в позициях $(1, 2)$ и $(2, 1)$ и нулями во всех прочих позициях. По-прежнему полагаем

$$B = W^*AW.$$

Приравнивая элементы матрицы B , стоящие на одной и той же антидиагонали $i + j = k$, получаем

$$\begin{aligned} x_2 + \mu^2 &= \mu^2 + \bar{x}_2, \\ x_3 + \mu^3 &= \mu x_2 + \mu \bar{x}_2 = \mu^3 + \bar{x}_3, \\ x_4 + \mu^4 &= \mu x_3 + \mu^2 \bar{x}_2 = \mu^2 x_2 + \mu \bar{x}_3 = \mu^4 + \bar{x}_4, \\ x_5 + \mu^5 &= \mu^5 + \bar{x}_5 = \mu x_4 + \mu^3 \bar{x}_2, \end{aligned}$$

и т.д. Из этих равенств последовательно выводим

$$\begin{aligned} x_2, x_3 &\in \mathbb{R}, & x_3 &= 2\mu x_2 - \mu^3, \\ x_4 &\in \mathbb{R}, & x_4 &= \mu x_3 + \mu^2 x_2 - \mu^4 = 3\mu^2 x_2 - 2\mu^4, \\ x_5 &\in \mathbb{R}, & x_5 &= \mu x_4 + \mu^3 x_2 - \mu^5 = 4\mu^3 x_2 - 3\mu^5. \end{aligned}$$

Продолжая таким образом, придем в конечном счете к равенству

$$x_{n-1} = (n-2)\mu^{n-3}x_2 - (n-3)\mu^{n-1}. \quad (7)$$

До сих пор были использованы лишь элементы антидиагоналей $i + j = k$ для $k = 3, 4, \dots, n$. Привлекая теперь позиции $(1, n)$ и $(2, n-1)$, находим

$$-\mu^{n-2} + \mu^n = \mu x_{n-1} + \mu^{n-2}x_2.$$

Подставляя сюда выражение (7) для x_{n-1} , получаем

$$x_2 = \frac{(n-2)\mu^2 - 1}{n-1}. \quad (8)$$

Теперь с помощью приведенных выше формул для $x_3, \dots, x_{n-1}$ можно вычислить остальные элементы второй строки.

Скалярное произведение первой и второй строк равно

$$\begin{aligned} S(\mu) &= \mu + \mu x_2 + \mu^2 x_3 + \dots + \mu^{n-2} x_{n-1} - \mu^{2n-3} \\ &= \mu + \mu x_2 + \mu^2(2\mu x_2 - \mu^3) + \mu^3(3\mu^2 x_2 - 2\mu^4) + \dots \\ &\quad + \mu^{n-2}((n-2)\mu^{n-3}x_2 - (n-3)\mu^{n-1}) - \mu^{2n-3} \\ &= \mu x_2[1 + 2\mu^2 + 3\mu^4 + \dots + (n-2)\mu^{2(n-3)}] \\ &\quad - \mu^5[1 + 2\mu^2 + 3\mu^4 + \dots + (n-3)\mu^{2(n-4)}] + \mu - \mu^{2n-3} \\ &= \mu\phi(\mu)[x_2 - \mu^4] + \mu^{2n-5}(n-2)x_2 + \mu - \mu^{2n-3}, \end{aligned}$$

где

$$\phi(\mu) = 1 + 2\mu^2 + 3\mu^4 + \dots + (n-3)\mu^{2(n-4)}.$$

Функция $S(\mu)$ обращается в нуль при $\mu = 1$, так как

$$\begin{aligned} \phi(1) &= \frac{(n-3)(n-2)}{2}, \quad x_2 = \frac{n-3}{n-1}, \\ x_2 - 1 &= \frac{-2}{n-1}, \quad (n-2)x_2 = \frac{(n-2)(n-3)}{n-1}. \end{aligned}$$

Покажем, что $\mu = 1$ — это единственный корень функции $S(\mu)$ на множестве $\mu \geq 1$. Нетрудно проверить, что при $\mu \neq 1$ справедливо равенство

$$\phi(\mu) = \frac{(n-3)\mu^{2(n-2)} - (n-2)\mu^{2(n-3)} + 1}{(\mu^2 - 1)^2}. \quad (9)$$

Подставляя выражения (8) и (9) в формулу для $S(\mu)$, получим дробь со знаменателем

$$(n-1)(\mu^2 - 1)^2$$

и числителем

$$a\mu^{2n+1} + b\mu^{2n-1} + c\mu^3 + d\mu,$$

где

$$a = -(n-2), \quad b = n, \quad c = -n, \quad d = n-2.$$

Запишем числитель в виде $-\mu\psi(\mu)$, положив

$$\psi(\mu) = (n-2)\mu^{2n} - n\mu^{2n-2} + n\mu^2 - (n-2).$$

Можно проверить, что

$$\psi(1) = \psi'(1) = \psi''(1) = 0$$

и

$$\begin{aligned}\psi'''(\mu) &= 4n\mu^{2n-5}[(2n^2 - 5n + 2)(n-1)\mu^2 - (2n^2 - 5n + 3)(n-2)] \\ &= 4n(n-1)(n-2)\mu^{2n-5}[(2n-1)(\mu^2 - 1) + 2].\end{aligned}$$

Напомним, что $n \geq 4$. Таким образом, третья производная многочлена $\psi(\mu)$ сохраняет положительный знак на множестве $\mu > 1$, откуда выводим, что сам этот многочлен, а вместе с ним и $S(\mu)$, не обращается в нуль на данном множестве.

Тем самым первые две строки матрицы W ортогональны лишь при $\mu = 1$. Для этого значения μ имеем

$$x_3 = 2x_2 - 1, \quad x_4 = 3x_2 - 2, \quad x_5 = 4x_2 - 3, \quad \dots,$$

т.е. элементы $1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}$ второй строки образуют арифметическую прогрессию с разностью $d = x_2 - 1$. Поскольку

$$\begin{aligned}x_2 &= \frac{n-3}{n-1} = 1 - \frac{2}{n-1}, & x_2 - 1 &= -\frac{2}{n-1}, \\ -1 - x_{n-1} &= -1 - (n-2)x_2 + (n-3) = -\frac{2}{n-1},\end{aligned}$$

в действительности, арифметической прогрессией является вся вторая строка. При этом ее внутренние элементы, начиная с x_2 и кончая x_{n-1} , меньше единицы по абсолютной величине. В то же время все элементы первой строки равны единице. Это означает, что первая и вторая строки имеют разные длины, тогда как, по предположению, матрица W лишь скалярным множителем отличается от унитарной. Полученное противоречие доказывает, что на границе этой матрицы должны присутствовать нули.

4. Нули на границе матрицы W . В предыдущем разделе показано, что на границе матрицы W (т.е. в ее первых и последних строках и столбцах) содержится хотя бы один нуль. В силу предложения 3 можно считать без ограничения общности, что этот нуль стоит в первой строке, записанной в формуле (1) в виде

$$(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n).$$

Пусть вначале $\alpha_1 \neq 0$. Покажем, что в этом случае все остальные элементы первой строки равны нулю. Предположим противное, и пусть α_k , $k \geq 2$, – ненулевой элемент с наименьшим индексом, а α_l – самый левый нуль. Если $k = 2$, то в матрице (3) элемент $(1, l)$, т.е. $\bar{\alpha}_1 \alpha_l$, равен нулю, тогда как элемент $b_{2, l-1} = \bar{\alpha}_2 \alpha_{l-1}$ отличен от нуля, что противоречит ганкелевому свойству матрицы B . Если же $l = 2$, то отличен от нуля элемент $(1, k)$, равный $\bar{\alpha}_1 \alpha_k$. В то же время равен нулю элемент $b_{2, k-1} = \bar{\alpha}_2 \alpha_{k-1}$ в противоречии с ганкелевостью матрицы (3).

Итак, в рассматриваемом случае α_1 – единственный ненулевой элемент в первой строке унитарной матрицы W . Следовательно, $|w_{11}| = 1$ и все поддиагональные элементы в первом столбце W нулевые. В частности, равен нулю элемент w_{n1} , обозначенный выше через β_1 .

Рассмотрим матрицу, полученную из (3) заменой чисел α одноименными числами β . Эту матрицу мы по-прежнему обозначаем через B . Пусть β_k , $k \geq 2$, – ненулевой элемент с наименьшим индексом. Если $k < n$, то $b_{kk} = |\beta_k|^2 \neq 0$, тогда как элемент $b_{k-1,k+1} = \bar{\beta}_{k-1}\beta_{k+1}$ равен нулю. Таким образом, ненулевой элемент в последней строке матрицы W только один и стоит он в позиции (n, n) . Поэтому $|w_{nn}| = 1$ и все внедиагональные элементы в последнем столбце W нулевые.

Резюмируем проведенный анализ случая $\alpha_1 \neq 0$. Матрица W , соответствующая этому случаю, должна иметь блочно диагональный вид:

$$W = w_{11} \oplus W_{n-2} \oplus w_{nn}, \quad (10)$$

где W_{n-2} – унитарная матрица порядка $n - 2$.

Переходим к второму возможному случаю: $\alpha_1 = 0$. Снова обозначим через α_k , $k \geq 2$, ненулевой элемент с наименьшим индексом и вернемся к матрице (3), составленной из чисел α . Если $k < n$, то $b_{kk} = |\alpha_k|^2 \neq 0$, тогда как элемент $b_{k-1,k+1} = \bar{\alpha}_{k-1}\alpha_{k+1}$ равен нулю в противоречии с ганкелевостью матрицы B .

Итак, α_n – единственный ненулевой элемент в первой строке матрицы W . Отсюда выводим

а) $|w_{1n}| = 1$;

б) все элементы, начиная со второго, в последнем столбце матрицы W равны нулю.

Обозначим через β_k самый правый ненулевой элемент строки (2). Предположим, что $k > 1$. В матрице (3), составленной из чисел β , не равны элементы $b_{kk} = |\beta_k|^2$ и $b_{k-1,k+1} = \bar{\beta}_{k-1}\beta_{k+1} = 0$, что противоречит ее ганкелевой природе. Таким образом, ненулевой элемент в последней строке матрицы W только один и стоит он в позиции $(n, 1)$. Поэтому $|w_{n1}| = 1$ и все элементы в первом столбце W , кроме последнего, равны нулю. Сама матрица W , соответствующая данному случаю, может быть описана так: это унитарная матрица W_{n-2} порядка $n - 2$, окаймленная сверху строкой

$$(0 \quad \dots \quad 0 \quad w_{1n}),$$

снизу строкой

$$(w_{n1} \quad 0 \quad \dots \quad 0)$$

и двумя нулевыми столбцами с боков.

Что можно сказать о подматрицах W_{n-2} обеих найденных форм? Ответим на этот вопрос сначала для матрицы (10).

Пусть $A \in \mathcal{H}_n$. Запишем A в виде

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_1 & a_{1n} \\ a_1^t & A_{n-2} & a_{-1}^t \\ a_{n1} & a_{-1} & a_{nn} \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Здесь A_{n-2} – центральная главная подматрица порядка $n - 2$, а a_1 и a_{-1} – строки, состоящие из $n - 2$ компонент.

Записывая матрицу

$$B = W^*AW$$

в аналогичном виде, приходим к равенству

$$B_{n-2} = W_{n-2}^* A_{n-2} W_{n-2}.$$

Поэтому из $W \in \text{UAut}(\mathcal{H}_n)$ должно следовать

$$W_{n-2} \in \text{UAut}(\mathcal{H}_{n-2}). \quad (12)$$

К тому же выводу (12) мы придем и для матрицы W , найденной во втором случае ($\alpha_1 = 0$).

5. Вид подматрицы W_{n-2} . Импликация (12) позволяет нам применить к подматрице W_{n-2} индуктивное предположение. Однако оказывается, что с данной матрицей W совместима не каждая из возможных форм этой подматрицы. Так, в случае матрицы (10) W_{n-2} обязана быть диагональной матрицей.

Действительно, предположим, что северо-восточный и юго-западный угловые элементы подматрицы W_{n-2} (иначе говоря, элементы $w_{2,n-1}$ и $w_{n-1,2}$ самой матрицы W) отличны от нуля. В этом случае b_{22} представляет собой линейную форму от элементов подматрицы A_{n-2} , в которую $a_{n-1,n-1}$ входит с ненулевым коэффициентом $|w_{n-1,2}|^2$. В то же время при переходе от матрицы A к B вектор-строка a_1 заменяется на $\bar{w}_{11}a_1W_{n-2}$. В частности, b_{13} является линейной формой от элементов $a_{12}, a_{13}, \dots, a_{1,n-1}$. Поскольку $a_{n-1,n-1}$ не зависит от этих элементов, ганкелеву матрицу A можно выбрать так, чтобы $b_{22} \neq b_{13}$. Полученная матрица B не будет ганкелевой.

Последовательно применяя это рассуждение к центральным подматрицам $W_{n-2}, W_{n-4}, \dots$, приходим к заключению, что вся матрица W должна быть диагональной.

Пусть теперь W – матрица для случая $\alpha_1 = 0$. Предположим, что крайние диагональные элементы подматрицы W_{n-2} (иначе говоря, элементы w_{22} и $w_{n-1,n-1}$ самой матрицы W) отличны от нуля. Снова b_{22} является линейной формой от элементов подматрицы A_{n-2} , в которую с ненулевым коэффициентом $|w_{22}|^2$ входит на этот раз элемент a_{22} . Строка a_1 матрицы A заменяется на $\bar{w}_{n1}a_{-1}W_{n-2}$. В частности, b_{13} есть линейная форма от элементов $a_{n-1,2}, a_{n-1,3}, \dots, a_{n-1,n-1}$. Ничто не мешает выбрать ганкелеву матрицу A так, чтобы $b_{22} \neq b_{13}$ в противоречии с ганкелевостью матрицы B .

Последовательно применяя это рассуждение к центральным подматрицам $W_{n-2}, W_{n-4}, \dots$, приходим к выводу, что матрица W этого случая есть произведение перьединичной матрицы $\mathcal{P}_n$ и некоторой диагональной матрицы.

Нам осталось выяснить, каковы диагональные элементы матрицы (10) и элементы диагонали $(1, n), (2, n-1), \dots, (n, 1)$ в матрице W , соответствующей случаю $\alpha_1 = 0$.

Пусть вначале

$$W = \text{diag}(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n), \quad (13)$$

где

$$\delta_k = e^{i\psi_k}, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Возьмем в качестве A матрицу порядка n , все элементы которой равны единице. Тогда

$$b_{kl} = e^{i(\psi_l - \psi_k)}, \quad 1 \leq k, l \leq n.$$

Если сумма $k + l$ есть четное число $2m$, то из ганкелевого свойства матрицы B вытекает $b_{kl} = b_{mm} = 1$, откуда выводим

$$\psi_l = \psi_k + 2\pi j, \quad j \in \mathbb{Z}. \quad (14)$$

Таким образом, для чисел k и l одинаковой четности имеем

$$w_{kk} = w_{ll}.$$

Если же k и l имеют разную четность, то можно лишь утверждать, что $b_{kl} = b_{lk}$, что приводит к более слабому по сравнению с (14) равенству

$$\psi_l = \psi_k + \pi j, \quad j \in \mathbb{Z}.$$

В этом случае

$$w_{kk} = \pm w_{ll}.$$

Итак, диагональная матрица W может быть либо скалярной матрицей $w_{11}I_n$, либо матрицей вида $w_{11}\mathcal{D}_n$, где $\mathcal{D}_n$ – матрица, указанная в формулировке теоремы.

Переходим к матрице W , соответствующей случаю $\alpha_1 = 0$. Представим W в виде

$$W = \mathcal{P}_n D_n,$$

где

$$D_n = \text{diag}(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n).$$

Для произвольной ганкелевой $n \times n$ -матрицы A имеем

$$B = W^* A W = D_n^* (\mathcal{P}_n A \mathcal{P}_n) D_n = D_n^* \hat{A} D_n.$$

Матрица $\hat{A}$, получаемая отражением матрицы A относительно ее центра, пробегает вместе с A все множество ганкелевых матриц. Из проведенных выше рассуждений следует, что D_n должна быть матрицей $\mathcal{D}_n$, описанной в формулировке теоремы 1, а W есть произведение этой матрицы и перьединичной матрицы порядка n . Этим выводом доказательство теоремы заканчивается.

В заключение хочу поблагодарить В. Н. Чугунова и А. К. Абдикалыкова за внимательное чтение этой статьи и ряд полезных замечаний.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Х. Д. Икрамов, “Унитарные автоморфизмы пространства ганкелевых матриц”, *Матем. заметки*, **96:5** (2014), 687–696.

Х. Д. Икрамов

Московский государственный университет

им. М. В. Ломоносова

E-mail: ikramov@cs.msu.su

Поступило

07.05.2014