Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Чередникова, Кольца квазиэндоморфизмов почти вполне разложимых абелевых групп без кручения ранга 4, не совпадающих со своими псевдоцоколями, *Матем. заметки*, 2015, том 97, выпуск 4, 609–619

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10641>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.187.69

26 апреля 2023 г., 06:36:45

Кольца квазиэндоморфизмов

почти вполне разложимых абелевых групп без кручения ранга 4, не совпадающих со своими псевдоцоколями

А. В. Чередникова

В статье получено описание колец квазиэндоморфизмов почти вполне разложимых абелевых групп без кручения ранга 4, не совпадающих со своими псевдоцоколями.

Библиография: 6 названий.

DOI: 10.4213/mzm10641

1. Введение. В работе под словом “группа” подразумевается абелева группа без кручения конечного ранга, записанная аддитивно. Приведем необходимые обозначения и определения.

Пусть $\mathbb{Q}$ – поле рациональных чисел, а $\mathbf{M}_n(\mathbb{Q})$ – полная матричная алгебра всех $(n \times n)$ -матриц над полем $\mathbb{Q}$.

Для групп G и H запись $G \doteq H$ означает, что G квазиравна H , т.е. подгруппа $G \cap H$ имеет конечный индекс как в G , так и в H .

Под *квазиразложением* группы G понимается семейство ненулевых подгрупп G_i , $i \in I$, делимой оболочки $\mathbb{Q} \otimes G$ группы G таких, что $G \doteq \bigoplus_{i \in I} G_i$. При этом каждая из групп G_i называется *квазислагаемым* группы G .

Группа G называется *почти вполне разложимой* (*пвр-группой*), если она квазиравна прямой сумме групп ранга 1.

Другими словами, G – пвр-группа, если она содержит некоторую вполне разложимую группу в качестве подгруппы конечного индекса.

Псевдоцоклем $\text{Soc } G$ группы G называется сервантная подгруппа, порожденная всеми ее минимальными сервантными вполне характеристическими подгруппами.

Кольцом квазиэндоморфизмов или *алгеброй квазиэндоморфизмов* $\mathcal{E}(G)$ группы G называется $\mathbb{Q}$ -алгебра $\mathbb{Q} \otimes E(G)$, где $E(G)$ – кольцо эндоморфизмов группы G .

Кольца квазиэндоморфизмов пвр-групп ранга 2 были описаны в [1]. Доказано, что с точностью до изоморфизма существуют 3 алгебры, являющиеся алгебрами квазиэндоморфизмов пвр-групп ранга 2, а именно, $\mathbf{M}_2(\mathbb{Q})$, $\mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q}$ и кольцо всех треугольных (2×2) -матриц над $\mathbb{Q}$. Кольца квазиэндоморфизмов пвр-групп ранга 3 были описаны в [2]. Доказано, что с точностью до изоморфизма или антиизоморфизма существуют 7 алгебр, являющиеся алгебрами квазиэндоморфизмов

пвр-групп ранга 3. Описание колец квазиэндоморфизмов пвр-групп ранга 4, совпадающих со своими псевдоцоколями, приведено в [3]. В настоящей работе получено описание колец квазиэндоморфизмов пвр-групп ранга 4, не совпадающих со своими псевдоцоколями. Доказано (теоремы 1–3), что с точностью до изоморфизма или антиизоморфизма существуют 19 подалгебр алгебры $\mathbf{M}_4(\mathbb{Q})$, являющихся алгебрами квазиэндоморфизмов пвр-групп ранга 4, не совпадающих со своими псевдоцоколями. Таким образом, задача описания колец квазиэндоморфизмов пвр-групп ранга 4 является полностью решенной.

В статье используются также следующие обозначения. Если группа R ранга 1 имеет тип τ , то будем писать $t(R) = \tau$. Пусть R_i, R_j – группы ранга 1 такие, что $t(R_i) = \tau_i$ и $t(R_j) = \tau_j$. Запись $\tau_i \xi \tau_j$ будет означать, что тип τ_i несравним с типом τ_j .

Отсутствующие в тексте определения, факты и обозначения можно найти в [4], [5].

Кольца квазиэндоморфизмов пвр-групп ранга 4 можно непосредственно вычислить на основании известных фактов, перечисленных в следующем замечании 1.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Пусть G пвр-группа ранга 4 и

$$G \doteq R_1 \oplus R_2 \oplus R_3 \oplus R_4, \quad (1.1)$$

где $t(R_k) = \tau_k$, $k = 1, 2, 3, 4$.

Обозначим через H прямую сумму $R_1 \oplus R_2 \oplus R_3 \oplus R_4$ в разложении (1.1). Тогда $\mathcal{E}(G) = \mathcal{E}(H)$ [6].

Пусть $i_k: R_k \rightarrow H$ и $\pi_l: H \rightarrow \mathbb{Q} \otimes R_l$, $k, l = 1, 2, 3, 4$, – возникающие здесь гомоморфизмы вложения и квазигомоморфизмы проекции. Зафиксируем ненулевые элементы $r_1 \in R_1$, $r_2 \in R_2$, $r_3 \in R_3$, $r_4 \in R_4$. Элементы $i_k(r_k)$, $k = 1, 2, 3, 4$, образуют максимальную линейно независимую систему группы H .

Легко видеть, что для произвольного $\varphi \in \mathcal{E}(H)$ имеет место равенство

$$\pi_l \varphi i_k(r_k) = \alpha_{lk} \cdot r_l, \quad (1.2)$$

где $\alpha_{ij} \in \mathbb{Q}$. Тогда отображение

$$gf: \varphi \mapsto \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} & \alpha_{44} \end{pmatrix},$$

где

$$f: \varphi \mapsto \begin{pmatrix} \pi_1 \varphi i_1 & \pi_1 \varphi i_2 & \pi_1 \varphi i_3 & \pi_1 \varphi i_4 \\ \pi_2 \varphi i_1 & \pi_2 \varphi i_2 & \pi_2 \varphi i_3 & \pi_2 \varphi i_4 \\ \pi_3 \varphi i_1 & \pi_3 \varphi i_2 & \pi_3 \varphi i_3 & \pi_3 \varphi i_4 \\ \pi_4 \varphi i_1 & \pi_4 \varphi i_2 & \pi_4 \varphi i_3 & \pi_4 \varphi i_4 \end{pmatrix}$$

и

$$g: \begin{pmatrix} \pi_1 \varphi i_1 & \pi_1 \varphi i_2 & \pi_1 \varphi i_3 & \pi_1 \varphi i_4 \\ \pi_2 \varphi i_1 & \pi_2 \varphi i_2 & \pi_2 \varphi i_3 & \pi_2 \varphi i_4 \\ \pi_3 \varphi i_1 & \pi_3 \varphi i_2 & \pi_3 \varphi i_3 & \pi_3 \varphi i_4 \\ \pi_4 \varphi i_1 & \pi_4 \varphi i_2 & \pi_4 \varphi i_3 & \pi_4 \varphi i_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} & \alpha_{44} \end{pmatrix},$$

является изоморфизмом $\mathcal{E}(H)$ и подалгебры алгебры $\mathbf{M}_4(\mathbb{Q})$ [5].

При этом справедливы следующие утверждения:

- 1) $\pi_l \varphi i_k(r_k) = 0$ тогда и только тогда, когда $\tau_k > \tau_l$ или $\tau_k \xi \tau_l$;
- 2) $\tau_k \leq \tau_l$ тогда и только тогда, когда $\mathbb{Q} \otimes \text{Hom}(R_k, R_l) \cong \mathbb{Q}$, где $\mathbb{Q} \otimes \text{Hom}(R_k, R_l)$ – группа квазигомоморфизмов группы R_k в группу R_l [4].

В [3] доказано, что пвр-группа G ранга 4 совпадает со своим псевдоцоклем тогда и только тогда, когда типы квазислагаемых группы G в разложении (1.1) удовлетворяют одному из следующих соотношений:

- 1) $\tau_1 \xi \tau_2, \tau_1 \xi \tau_3, \tau_1 \xi \tau_4, \tau_2 \xi \tau_3, \tau_2 \xi \tau_4, \tau_3 \xi \tau_4$;
- 2) $\tau_1 = \tau_2, \tau_1 \xi \tau_3, \tau_1 \xi \tau_4, \tau_2 \xi \tau_3, \tau_2 \xi \tau_4, \tau_3 \xi \tau_4$;
- 3) $\tau_1 = \tau_2, \tau_3 = \tau_4, \tau_1 \xi \tau_3, \tau_1 \xi \tau_4, \tau_2 \xi \tau_3, \tau_2 \xi \tau_4$;
- 4) $\tau_1 = \tau_2 = \tau_3, \tau_1 \xi \tau_4, \tau_2 \xi \tau_4, \tau_3 \xi \tau_4$;
- 5) $\tau_1 = \tau_2 = \tau_3 = \tau_4$.

Во всех остальных случаях соотношений между типами квазислагаемых в разложении (1.1) группа G не совпадает со своим псевдоцоклем.

Поэтому в работе задача вычисления колец квазиэндоморфизмов пвр-групп G ранга 4, не совпадающих со своими псевдоцоклями, разбита на 3 подзадачи в зависимости от следующих классов соотношений между типами квазислагаемых в разложении (1.1):

- 1) типы квазислагаемых попарно сравнимы;
- 2) среди типов квазислагаемых два равны и хотя бы два несравнимы;
- 3) среди типов квазислагаемых нет равных и хотя бы два несравнимы.

2. Основные результаты. В теореме 1 дается описание колец квазиэндоморфизмов пвр-групп ранга 4, не совпадающих со своими псевдоцоклями, типы квазислагаемых которых попарно сравнимы. Доказано, что с точностью до изоморфизма или антиизоморфизма существуют пять подалгебр алгебры $\mathbf{M}_4(\mathbb{Q})$, являющихся алгебрами квазиэндоморфизмов пвр-групп ранга 4, не совпадающих со своими псевдоцоклями, типы квазислагаемых которых попарно сравнимы.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В нижеследующих теоремах 1–3 нижний индекс i в обозначении алгебры $\mathbf{A}_i^{(j)}$ есть ее размерность над $\mathbb{Q}$, верхний индекс j – порядковый номер алгебры.

ТЕОРЕМА 1. Пусть G – почти вполне разложимая абелева группа без кручения ранга 4 и

$$G \doteq R_1 \oplus R_2 \oplus R_3 \oplus R_4,$$

где $\text{rank}(R_k) = 1$, причем типы квазислагаемых $t(R_k) = \tau_k$, $k = 1, 2, 3, 4$, попарно сравнимы. Кольцо $\mathbf{K}$ реализуется в качестве алгебры квазиэндоморфизмов $\mathcal{E}(G)$ группы G , $\mathbf{K} \cong \mathcal{E}(G)$, тогда и только тогда, когда $\mathbf{K}$ изоморфно или антиизоморфно одной из следующих алгебр:

$$\mathbf{A}_{10} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_{11} & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & 0 & 0 \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & 0 \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} & \alpha_{44} \end{pmatrix} \mid \alpha_{ij} \in \mathbb{Q} \right\},$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}_{11}^{(1)} &= \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_{11} & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & 0 & \alpha_{24} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & 0 & \alpha_{44} \end{pmatrix} \mid \alpha_{ij} \in \mathbb{Q} \right\}, \\
\mathbf{A}_{11}^{(2)} &= \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_{11} & 0 & 0 & \alpha_{14} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & 0 & \alpha_{24} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ \alpha_{41} & 0 & 0 & \alpha_{44} \end{pmatrix} \mid \alpha_{ij} \in \mathbb{Q} \right\}, \\
\mathbf{A}_{12} &= \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & 0 & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & 0 & 0 \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} & \alpha_{44} \end{pmatrix} \mid \alpha_{ij} \in \mathbb{Q} \right\}, \\
\mathbf{A}_{13} &= \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_{44} \end{pmatrix} \mid \alpha_{ij} \in \mathbb{Q} \right\}.
\end{aligned}$$

При этом для произвольной перестановки $\tau_{i_1}, \tau_{i_2}, \tau_{i_3}, \tau_{i_4}$ множества типов $\{\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4\}$ справедливо следующее:

- 1) $\mathbf{K} \cong \mathbf{A}_{10} \Leftrightarrow \tau_{i_1} < \tau_{i_2} < \tau_{i_3} < \tau_{i_4}$;
- 2) $\mathbf{K} \cong \mathbf{A}_{11}^{(1)} \Leftrightarrow \tau_{i_1} < \tau_{i_2} = \tau_{i_4} < \tau_{i_3}$;
- 3) $\mathbf{K} \cong \mathbf{A}_{11}^{(2)} \Leftrightarrow \tau_{i_4} = \tau_{i_1} < \tau_{i_2} < \tau_{i_3}$;
- 4) $\mathbf{K}$ антиизоморфно $\mathbf{A}_{11}^{(2)} \Leftrightarrow \tau_{i_1} < \tau_{i_2} < \tau_{i_3} = \tau_{i_4}$;
- 5) $\mathbf{K} \cong \mathbf{A}_{12} \Leftrightarrow \tau_{i_1} = \tau_{i_2} < \tau_{i_3} = \tau_{i_4}$;
- 6) $\mathbf{K} \cong \mathbf{A}_{13} \Leftrightarrow \tau_{i_1} = \tau_{i_2} = \tau_{i_3} > \tau_{i_4}$;
- 7) $\mathbf{K}$ антиизоморфно $\mathbf{A}_{13} \Leftrightarrow \tau_{i_1} = \tau_{i_2} = \tau_{i_3} < \tau_{i_4}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточность условий в формулировке теоремы, накладываемых на типы квазислагаемых группы G в разложении (1.1), непосредственно следует из замечания 1.

Действительно, пусть типы квазислагаемых группы G в разложении (1.1) удовлетворяют условию 3) теоремы: $\tau_4 = \tau_1 < \tau_2 < \tau_3$. Тогда на основании замечания 1 имеем, что

$$\alpha_{12} = \alpha_{13} = \alpha_{23} = \alpha_{42} = \alpha_{43} = 0$$

и, следовательно,

$$\mathcal{E}(G) \cong \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_{11} & 0 & 0 & \alpha_{14} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & 0 & \alpha_{24} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ \alpha_{41} & 0 & 0 & \alpha_{44} \end{pmatrix} \mid \alpha_{ij} \in \mathbb{Q} \right\} = \mathbf{A}_{11}^{(2)}.$$

Далее, предположим, что типы квазислагаемых группы G в разложении (1.1) удовлетворяют условию 4) теоремы: $\tau_1 < \tau_2 < \tau_3 = \tau_4$. Аналогичным образом получаем, что

$$\mathcal{E}(G) \cong \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_{11} & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & 0 & 0 \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} & \alpha_{44} \end{pmatrix} \mid \alpha_{ij} \in \mathbb{Q} \right\} = \mathbf{K}_{11}.$$

Очевидно, что $\mathbf{K}_{11}$ антиизоморфно $\mathbf{A}_{11}^{(2)}$, где антиизоморфизмом является отображение

$$h_1: M_1 \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} {}^t M_1 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где $M_1 \in \mathbf{K}_{11}$, ${}^t M_1$ – матрица, транспонированная к M_1 .

Рассмотрим теперь условие 6) теоремы, накладываемое на типы квазислагаемых группы G в разложении (1.1): $\tau_1 = \tau_2 = \tau_3 > \tau_4$. В этом случае получаем, что

$$\mathcal{E}(G) \cong \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_{44} \end{pmatrix} \mid \alpha_{ij} \in \mathbb{Q} \right\} = \mathbf{A}_{13}.$$

Если типы квазислагаемых группы G в разложении (1.1) удовлетворяют условию 7) – $\tau_1 = \tau_2 = \tau_3 < \tau_4$, то

$$\mathcal{E}(G) \cong \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & 0 \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & 0 \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} & \alpha_{44} \end{pmatrix} \mid \alpha_{ij} \in \mathbb{Q} \right\} = \mathbf{K}_{13}.$$

При этом $\mathbf{K}_{13}$ антиизоморфно $\mathbf{A}_{13}$, где антиизоморфизмом является транспонирование.

Достаточность остальных условий доказывается аналогично.

Так как условия 1)–7) исчерпывают все возможные случаи соотношений между попарно сравнимыми типами квазислагаемых пвр-группы G ранга 4, не совпадающей со своим псевдоцоколем, других колец квазиэндоморфизмов группы G , кроме перечисленных в формулировке теоремы, не существует.

Заметим, что среди алгебр, перечисленных в формулировке теоремы, нет изоморфных. Действительно, если алгебры имеют разную размерность над $\mathbb{Q}$, то они не изоморфны. Алгебры $\mathbf{A}_{11}^{(1)}$ и $\mathbf{A}_{11}^{(2)}$ не изоморфны, так как алгебра $\mathbf{A}_{11}^{(1)}$ имеет три нильпотентных правых идеалов размерности 1, а алгебра $\mathbf{A}_{11}^{(2)}$ не имеет нильпотентных правых идеалов размерности 1.

Необходимость условий 1)–7) теоремы очевидна, так как если кольцо квазиэндоморфизмов пвр-группы G ранга 4, не совпадающей со своим псевдоцоколем, изоморфно или антиизоморфно одной из пяти алгебр, перечисленных в формулировке теоремы, то согласно замечанию 1 типы квазислагаемых группы G в разложении (1.1) должны удовлетворять соответствующему условию, накладываемому на типы квазислагаемых.

Теорема 1 доказана.

В теореме 2 описываются кольца квазиэндоморфизмов пвр-групп ранга 4, среди типов квазислагаемых которых два равны и хотя бы два несравнимы. Доказано, что с точностью до изоморфизма или антиизоморфизма существуют четыре подалгебры алгебры $\mathbf{M}_4(\mathbb{Q})$, являющихся алгебрами квазиэндоморфизмов пвр-групп ранга 4, среди типов квазислагаемых которых два равны и хотя бы два несравнимы.

ТЕОРЕМА 2. Пусть G – почти вполне разложимая абелева группа без кручения ранга 4 и

$$G \doteq R_1 \oplus R_2 \oplus R_3 \oplus R_4,$$

где $\text{rank}(R_k) = 1$, причем среди типов квазислагаемых $t(R_k) = \tau_k$, $k = 1, 2, 3, 4$, два равны и хотя бы два несравнимы. Кольцо $\mathbf{K}$ реализуется в качестве алгебры квазиэндоморфизмов $\mathcal{E}(G)$ группы G , $\mathbf{K} \cong \mathcal{E}(G)$, тогда и только тогда, когда $\mathbf{K}$ изоморфно или антиизоморфно одной из следующих алгебр:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_7 &= \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & 0 & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{33} & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{43} & \alpha_{44} \end{pmatrix} \mid \alpha_{ij} \in \mathbb{Q} \right\}, \\ \mathbf{B}_8 &= \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_{44} \end{pmatrix} \mid \alpha_{ij} \in \mathbb{Q} \right\}, \\ \mathbf{B}_9 &= \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{33} & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{43} & \alpha_{44} \end{pmatrix} \mid \alpha_{ij} \in \mathbb{Q} \right\}, \\ \mathbf{B}_{10} &= \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ 0 & 0 & \alpha_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_{44} \end{pmatrix} \mid \alpha_{ij} \in \mathbb{Q} \right\}. \end{aligned}$$

При этом для произвольной перестановки $\tau_{i_1}, \tau_{i_2}, \tau_{i_3}, \tau_{i_4}$ множества типов $\{\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4\}$ справедливо следующее:

- 1) $\mathbf{K} \cong \mathbf{B}_7 \Leftrightarrow \tau_{i_1} = \tau_{i_2}, \tau_{i_1} \xi \tau_{i_3}, \tau_{i_1} \xi \tau_{i_4}, \tau_{i_3} < \tau_{i_4}$;
- 2) $\mathbf{K} \cong \mathbf{B}_8 \Leftrightarrow \tau_{i_3} < \tau_{i_1} = \tau_{i_2}, \tau_{i_1} \xi \tau_{i_4}, \tau_{i_3} \xi \tau_{i_4}$;
- 3) $\mathbf{K}$ антиизоморфно $\mathbf{B}_8 \Leftrightarrow \tau_{i_1} = \tau_{i_2} < \tau_{i_3}, \tau_{i_1} \xi \tau_{i_4}, \tau_{i_3} \xi \tau_{i_4}$;
- 4) $\mathbf{K} \cong \mathbf{B}_9 \Leftrightarrow \tau_{i_1} = \tau_{i_2} > \tau_{i_3}, \tau_{i_1} \xi \tau_{i_4}, \tau_{i_4} > \tau_{i_3}$;
- 5) $\mathbf{K}$ антиизоморфно $\mathbf{B}_9 \Leftrightarrow \tau_{i_1} = \tau_{i_2} < \tau_{i_3}, \tau_{i_1} \xi \tau_{i_4}, \tau_{i_4} < \tau_{i_3}$;
- 6) $\mathbf{K} \cong \mathbf{B}_{10} \Leftrightarrow \tau_{i_3} < \tau_{i_1} = \tau_{i_2}, \tau_{i_4} < \tau_{i_1}, \tau_{i_3} \xi \tau_{i_4}$;
- 7) $\mathbf{K}$ антиизоморфно $\mathbf{B}_{10} \Leftrightarrow \tau_{i_1} = \tau_{i_2} < \tau_{i_3}, \tau_{i_1} < \tau_{i_4}, \tau_{i_3} \xi \tau_{i_4}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость и достаточность условий в формулировке теоремы 2, накладываемых на типы квазислагаемых группы G в разложении (1.1), непосредственно вытекает из замечания 1. Так как кольца $\mathbf{B}_7, \mathbf{B}_8, \mathbf{B}_9, \mathbf{B}_{10}$ имеют различную размерность над $\mathbb{Q}$, то они попарно не изоморфны.

Остановимся на условиях 3), 5) и 7), накладываемых на типы квазислагаемых в разложении (1.1). В случае условия 3) имеем, что

$$\mathcal{E}(G) \cong \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & 0 & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & 0 & 0 \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_{44} \end{pmatrix} \mid \alpha_{ij} \in \mathbb{Q} \right\} = \mathbf{K}_8^{(1)}.$$

При этом кольцо $\mathbf{K}_8^{(1)}$ антиизоморфно кольцу $\mathbf{B}_8$, где антиизоморфизмом является транспонирование. В случаях условий 5) и 7) соответственно получаем

$$\mathcal{E}(G) \cong \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & 0 & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & 0 & 0 \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_{44} \end{pmatrix} \mid \alpha_{ij} \in \mathbb{Q} \right\} = \mathbf{K}_9^{(1)},$$

$$\mathcal{E}(G) \cong \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & 0 & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & 0 & 0 \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & 0 \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & 0 & \alpha_{44} \end{pmatrix} \mid \alpha_{ij} \in \mathbb{Q} \right\} = \mathbf{K}_{10}.$$

Легко видеть, что $\mathbf{K}_9^{(1)}$ антиизоморфно $\mathbf{B}_9$, а $\mathbf{K}_{10}$ антиизоморфно $\mathbf{B}_{10}$, где в обоих случаях антиизоморфизмом является транспонирование.

В теореме 3 дается описание колец квазиэндоморфизмов пвр-групп ранга 4, среди типов квазислагаемых которых нет равных и хотя бы два несравнимы. Доказано, что с точностью до изоморфизма или антиизоморфизма существуют десять подалгебр алгебры $\mathbf{M}_4(\mathbb{Q})$, являющихся алгебрами квазиэндоморфизмов пвр-групп ранга 4, среди типов квазислагаемых которых нет равных и хотя бы два несравнимы.

ТЕОРЕМА 3. Пусть G – почти вполне разложимая абелева группа без кручения ранга 4 и

$$G \doteq R_1 \oplus R_2 \oplus R_3 \oplus R_4,$$

где $\text{rank}(R_k) = 1$, причем среди типов квазислагаемых $t(R_k) = \tau_k$, $k = 1, 2, 3, 4$, нет равных и хотя бы два несравнимы. Кольцо $\mathbf{K}$ реализуется в качестве алгебры квазиэндоморфизмов $\mathcal{E}(G)$ группы G , $\mathbf{K} \cong \mathcal{E}(G)$, тогда и только тогда, когда $\mathbf{K}$ изоморфно или антиизоморфно одной из следующих алгебр:

$$\mathbf{C}_5 = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_{11} & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_{44} \end{pmatrix} \mid \alpha_{ij} \in \mathbb{Q} \right\},$$

$$\mathbf{C}_6^{(1)} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_{11} & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & 0 & 0 \\ \alpha_{31} & 0 & \alpha_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_{44} \end{pmatrix} \mid \alpha_{ij} \in \mathbb{Q} \right\},$$

$$\mathbf{C}_6^{(2)} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_{11} & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{33} & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{43} & \alpha_{44} \end{pmatrix} \mid \alpha_{ij} \in \mathbb{Q} \right\},$$

$$\mathbf{C}_7^{(1)} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_{11} & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & 0 & 0 \\ \alpha_{31} & 0 & \alpha_{33} & 0 \\ \alpha_{41} & 0 & 0 & \alpha_{44} \end{pmatrix} \mid \alpha_{ij} \in \mathbb{Q} \right\},$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{C}_7^{(2)} &= \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_{11} & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & 0 & 0 \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_{44} \end{pmatrix} \mid \alpha_{ij} \in \mathbb{Q} \right\}, \\
\mathbf{C}_7^{(3)} &= \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_{11} & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & 0 & \alpha_{24} \\ \alpha_{31} & 0 & \alpha_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_{44} \end{pmatrix} \mid \alpha_{ij} \in \mathbb{Q} \right\}, \\
\mathbf{C}_8^{(1)} &= \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_{11} & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & 0 & 0 \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & 0 \\ \alpha_{41} & 0 & 0 & \alpha_{44} \end{pmatrix} \mid \alpha_{ij} \in \mathbb{Q} \right\}, \\
\mathbf{C}_8^{(2)} &= \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_{11} & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & 0 & \alpha_{24} \\ \alpha_{31} & 0 & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_{44} \end{pmatrix} \mid \alpha_{ij} \in \mathbb{Q} \right\}, \\
\mathbf{C}_9^{(1)} &= \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_{11} & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & 0 & 0 \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & 0 \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & 0 & \alpha_{44} \end{pmatrix} \mid \alpha_{ij} \in \mathbb{Q} \right\}, \\
\mathbf{C}_9^{(2)} &= \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_{11} & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & 0 & 0 \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ \alpha_{41} & 0 & 0 & \alpha_{44} \end{pmatrix} \mid \alpha_{ij} \in \mathbb{Q} \right\}.
\end{aligned}$$

При этом для произвольной перестановки $\tau_{i_1}, \tau_{i_2}, \tau_{i_3}, \tau_{i_4}$ множества типов $\{\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4\}$ справедливо следующее:

- 1) $\mathbf{K} \cong \mathbf{C}_9^{(1)} \Leftrightarrow \tau_{i_1} < \tau_{i_2} < \tau_{i_3}, \tau_{i_1} < \tau_{i_4}, \tau_{i_2} < \tau_{i_4}, \tau_{i_3} \xi \tau_{i_4};$
- 2) $\mathbf{K} \cong \mathbf{C}_9^{(2)} \Leftrightarrow \tau_{i_1} < \tau_{i_2} < \tau_{i_3}, \tau_{i_1} < \tau_{i_4}, \tau_{i_4} < \tau_{i_3}, \tau_{i_2} \xi \tau_{i_4};$
- 3) $\mathbf{K} \cong \mathbf{C}_8^{(1)} \Leftrightarrow \tau_{i_1} < \tau_{i_2} < \tau_{i_3}, \tau_{i_1} < \tau_{i_4}, \tau_{i_2} \xi \tau_{i_4}, \tau_{i_3} \xi \tau_{i_4};$
- 4) $\mathbf{K} \cong \mathbf{C}_7^{(1)} \Leftrightarrow \tau_{i_1} < \tau_{i_2}, \tau_{i_1} < \tau_{i_3}, \tau_{i_1} < \tau_{i_4}, \tau_{i_2} \xi \tau_{i_3}, \tau_{i_3} \xi \tau_{i_4}, \tau_{i_2} \xi \tau_{i_4};$
- 5) $\mathbf{K}$ антиизоморфно $\mathbf{C}_9^{(1)} \Leftrightarrow \tau_{i_1} < \tau_{i_2} < \tau_{i_3}, \tau_{i_4} < \tau_{i_2}, \tau_{i_4} < \tau_{i_3}, \tau_{i_1} \xi \tau_{i_4};$
- 6) $\mathbf{K}$ антиизоморфно $\mathbf{C}_8^{(1)} \Leftrightarrow \tau_{i_1} < \tau_{i_2} < \tau_{i_3}, \tau_{i_4} < \tau_{i_3}, \tau_{i_1} \xi \tau_{i_4}, \tau_{i_2} \xi \tau_{i_4};$
- 7) $\mathbf{K} \cong \mathbf{C}_7^{(2)} \Leftrightarrow \tau_{i_1} < \tau_{i_2} < \tau_{i_3}, \tau_{i_1} \xi \tau_{i_4}, \tau_{i_2} \xi \tau_{i_4}, \tau_{i_3} \xi \tau_{i_4};$
- 8) $\mathbf{K} \cong \mathbf{C}_8^{(2)} \Leftrightarrow \tau_{i_1} < \tau_{i_2}, \tau_{i_1} < \tau_{i_3}, \tau_{i_4} < \tau_{i_2}, \tau_{i_4} < \tau_{i_3}, \tau_{i_1} \xi \tau_{i_4}, \tau_{i_2} \xi \tau_{i_3};$
- 9) $\mathbf{K} \cong \mathbf{C}_7^{(3)} \Leftrightarrow \tau_{i_1} < \tau_{i_2}, \tau_{i_1} < \tau_{i_3}, \tau_{i_4} < \tau_{i_2}, \tau_{i_1} \xi \tau_{i_4}, \tau_{i_2} \xi \tau_{i_3}, \tau_{i_3} \xi \tau_{i_4};$
- 10) $\mathbf{K} \cong \mathbf{C}_6^{(1)} \Leftrightarrow \tau_{i_1} < \tau_{i_2}, \tau_{i_1} < \tau_{i_3}, \tau_{i_2} \xi \tau_{i_3}, \tau_{i_1} \xi \tau_{i_4}, \tau_{i_2} \xi \tau_{i_4}, \tau_{i_3} \xi \tau_{i_4};$
- 11) $\mathbf{K}$ антиизоморфно $\mathbf{C}_7^{(1)} \Leftrightarrow \tau_{i_1} < \tau_{i_2}, \tau_{i_3} < \tau_{i_2}, \tau_{i_4} < \tau_{i_2}, \tau_{i_1} \xi \tau_{i_3}, \tau_{i_1} \xi \tau_{i_4}, \tau_{i_3} \xi \tau_{i_4};$
- 12) $\mathbf{K}$ антиизоморфно $\mathbf{C}_6^{(1)} \Leftrightarrow \tau_{i_1} < \tau_{i_2}, \tau_{i_3} < \tau_{i_2}, \tau_{i_1} \xi \tau_{i_3}, \tau_{i_1} \xi \tau_{i_4}, \tau_{i_2} \xi \tau_{i_4}, \tau_{i_3} \xi \tau_{i_4};$
- 13) $\mathbf{K} \cong \mathbf{C}_6^{(2)} \Leftrightarrow \tau_{i_1} < \tau_{i_2}, \tau_{i_3} < \tau_{i_4}, \tau_{i_1} \xi \tau_{i_3}, \tau_{i_1} \xi \tau_{i_4}, \tau_{i_2} \xi \tau_{i_3}, \tau_{i_2} \xi \tau_{i_4};$
- 14) $\mathbf{K} \cong \mathbf{C}_5 \Leftrightarrow \tau_{i_1} < \tau_{i_2}, \tau_{i_1} \xi \tau_{i_3}, \tau_{i_1} \xi \tau_{i_4}, \tau_{i_2} \xi \tau_{i_3}, \tau_{i_2} \xi \tau_{i_4}, \tau_{i_3} \xi \tau_{i_4}.$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из замечания 1 непосредственно следует, что условия в формулировке теоремы, накладываемые на типы квазислагаемых группы G в разложении (1.1), являются необходимыми и достаточными. Кольца, перечисленные в формулировке теоремы и имеющие различную размерность над $\mathbb{Q}$, попарно не изоморфны. Рассмотрим кольца одинаковой размерности над $\mathbb{Q}$.

Кольца $\mathbf{C}_6^{(1)}$ и $\mathbf{C}_6^{(2)}$ не изоморфны, так как кольцо $\mathbf{C}_6^{(1)}$ имеет 11 левых идеалов размерности 3 (здесь и далее имеется в виду размерность над $\mathbb{Q}$), а кольцо $\mathbf{C}_6^{(2)}$ – 10 левых идеалов размерности 3.

Кольца $\mathbf{C}_7^{(1)}$, $\mathbf{C}_7^{(2)}$ и $\mathbf{C}_7^{(3)}$ попарно не изоморфны. Действительно, кольца $\mathbf{C}_7^{(1)}$ и $\mathbf{C}_7^{(3)}$ имеют единственный правый идеал размерности 3, являющийся нильпотентным индекса 2. Кольцо $\mathbf{C}_7^{(2)}$ имеет единственный правый идеал размерности 3, являющийся нильпотентным индекса 3. Следовательно, кольца $\mathbf{C}_7^{(1)}$ и $\mathbf{C}_7^{(3)}$ не изоморфны кольцу $\mathbf{C}_7^{(2)}$. Кольца $\mathbf{C}_7^{(1)}$ и $\mathbf{C}_7^{(3)}$ не изоморфны, так как кольцо $\mathbf{C}_7^{(1)}$ имеет 9 правых идеалов размерности 2, а кольцо $\mathbf{C}_7^{(3)}$ – 11 правых идеалов размерности 2.

Кольца $\mathbf{C}_8^{(1)}$ и $\mathbf{C}_8^{(2)}$ не изоморфны, так как кольцо $\mathbf{C}_8^{(1)}$ имеет единственный нильпотентный правый идеал размерности 4, индекс нильпотентности которого равен 3, а кольцо $\mathbf{C}_8^{(2)}$ имеет единственный нильпотентный правый идеал размерности 4, индекс нильпотентности которого равен 2.

Кольца $\mathbf{C}_9^{(1)}$ и $\mathbf{C}_9^{(2)}$ не изоморфны, так как кольцо $\mathbf{C}_9^{(1)}$ имеет 3 нильпотентных правых идеалов размерности 4, а кольцо $\mathbf{C}_9^{(2)}$ – 1 нильпотентный правый идеал размерности 4.

Далее, если типы квазислагаемых группы G в разложении (1.1) удовлетворяют условию 5) теоремы, то

$$\mathcal{E}(G) \cong \left\{ \left(\begin{pmatrix} \alpha_{11} & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & 0 & \alpha_{24} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_{44} \end{pmatrix} \mid \alpha_{ij} \in \mathbb{Q} \right) \right\} = \mathbf{K}_9^{(2)}.$$

При этом кольцо $\mathbf{K}_9^{(2)}$ антиизоморфно кольцу $\mathbf{C}_9^{(1)}$, где антиизоморфизмом является отображение

$$h_2: M_2 \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} {}^t M_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где $M_2 \in \mathbf{K}_9^{(2)}$, ${}^t M_2$ – матрица, транспонированная к M_2 .

Пусть типы квазислагаемых группы G в разложении (1.1) удовлетворяют условию 6) теоремы. Тогда

$$\mathcal{E}(G) \cong \left\{ \left(\begin{pmatrix} \alpha_{11} & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & 0 & 0 \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_{44} \end{pmatrix} \mid \alpha_{ij} \in \mathbb{Q} \right) \right\} = \mathbf{K}_8^{(2)}.$$

В этом случае кольцо $\mathbf{K}_8^{(2)}$ антиизоморфно кольцу $\mathbf{C}_8^{(1)}$, где антиизоморфизмом является отображение

$$h_3: M_3 \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} {}^t M_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где $M_3 \in \mathbf{K}_8^{(2)}$, ${}^t M_3$ – матрица, транспонированная к M_3 .

В случае, если типы квазислагаемых группы G в разложении (1.1) удовлетворяют условию 11) теоремы, то

$$\mathcal{E}(G) \cong \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_{11} & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ 0 & 0 & \alpha_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_{44} \end{pmatrix} \mid \alpha_{ij} \in \mathbb{Q} \right\} = \mathbf{K}_7.$$

При этом кольцо $\mathbf{K}_7$ антиизоморфно кольцу $\mathbf{C}_7^{(1)}$, где антиизоморфизмом является отображение

$$h_4: M_4 \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} {}^t M_4 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где $M_4 \in \mathbf{K}_7$, ${}^t M_4$ – матрица, транспонированная к M_4 .

Рассмотрим условие 12) теоремы, накладываемое на типы квазислагаемых группы G в разложении (1.1). Тогда

$$\mathcal{E}(G) \cong \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_{11} & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_{44} \end{pmatrix} \mid \alpha_{ij} \in \mathbb{Q} \right\} = \mathbf{K}_6.$$

При этом кольцо $\mathbf{K}_6$ антиизоморфно кольцу $\mathbf{C}_6^{(1)}$, где антиизоморфизмом является отображение

$$h_5: M_5 \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} {}^t M_5 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где $M_5 \in \mathbf{K}_6$, ${}^t M_5$ – матрица, транспонированная к M_5 .

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Кольцо $\mathbf{B}_7$ не изоморфно кольцам $\mathbf{C}_7^{(1)}$, $\mathbf{C}_7^{(2)}$, $\mathbf{C}_7^{(3)}$, так как у него нет нильпотентного правого идеала размерности 3, а у колец $\mathbf{C}_7^{(1)}$, $\mathbf{C}_7^{(2)}$, $\mathbf{C}_7^{(3)}$ есть.

Кольцо $\mathbf{B}_8$ не изоморфно кольцам $\mathbf{C}_8^{(1)}$, $\mathbf{C}_8^{(2)}$, так как оно не имеет нильпотентный правый идеал размерности 4, а кольца $\mathbf{C}_8^{(1)}$, $\mathbf{C}_8^{(2)}$ имеют.

Кольцо $\mathbf{B}_9$ не изоморфно кольцам $\mathbf{C}_9^{(1)}$, $\mathbf{C}_9^{(2)}$, так как у него нет нильпотентного правого идеала размерности 5, а у колец $\mathbf{C}_9^{(1)}$, $\mathbf{C}_9^{(2)}$ есть.

Кольца $\mathbf{A}_{10}$ и $\mathbf{B}_{10}$ не изоморфны, так как кольцо $\mathbf{A}_{10}$ имеет нильпотентный правый идеал размерности 6, а кольцо $\mathbf{B}_{10}$ не имеет.

Получили, что все 19 колец, перечисленные в формулировках теорем 1–3, попарно не изоморфны. Таким образом, с точностью до изоморфизма или антиизоморфизма существуют 19 подалгебр алгебры $M_4(\mathbb{Q})$, являющихся алгебрами квазиэндоморфизмов пвр-групп ранга 4, не совпадающих со своими псевдоцоколями.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Напомним, что *радикалом Джекобсона* $J(K)$ кольца K называется пересечение всех максимальных правых (левых) идеалов кольца K .

Известно [1], что для абелевой группы G без кручения конечного ранга следующие условия эквивалентны:

- 1) $J(\mathcal{E}(G)) = 0$;
- 2) $G = \text{Soc } G$.

Следовательно, все кольца квазиэндоморфизмов пвр-групп ранга 4, описание которых дается в теоремах 1–3, и только они, имеют ненулевой радикал Джекобсона.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] J. D. Reid, “On the ring of quasi-endomorphisms of a torsion-free group”, *Topics in Abelian Groups*, Scott, Foresman and Co., Chicago, IL, 1963, 51–68.
- [2] А. В. Чередникова, “Кольца квазиэндоморфизмов абелевых почти вполне разложимых групп без кручения ранга 3”, *Абелевы группы и модули*, **13–14**, Томск. гос. ун-та, Томск, 1996, 237–242.
- [3] А. В. Чередникова, “Кольца квазиэндоморфизмов почти вполне разложимых абелевых групп без кручения ранга 4 с нулевым радикалом Джекобсона”, *Фундамент. и прикл. матем.*, **17**:8 (2012), 169–175.
- [4] Л. Фукс, *Бесконечные абелевы группы*, Т. 2, Мир, М., 1977.
- [5] Р. Пирс, *Ассоциативные алгебры*, Мир, М., 1986.
- [6] R. A. Beaumont, R. S. Pierce, “Torsion free groups of rank two”, *Mem. Amer. Math. Soc.*, **38**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1961, 1–41.

А. В. Чередникова

Костромской государственный технологический
университет
E-mail: av-cherednikova@list.ru

Поступило

13.01.2014