Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. В. Любимцев, Д. С. Чистяков, Смешанные абелевы группы с изоморфными полугруппами эндоморфизмов, *Матем. заметки*, 2015, том 97, выпуск 4, 556–565

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10643>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.7.115

26 апреля 2023 г., 03:16:47

Смешанные абелевы группы с изоморфными полугруппами эндоморфизмов

О. В. Любимцев, Д. С. Чистяков

В данной работе изучаются смешанные абелевы группы с изоморфными полугруппами эндоморфизмов. В частности, охарактеризованы группы, периодические части которых неизоморфны, а полугруппы эндоморфизмов изоморфны. Получено описание нередуцированных расщепляющихся смешанных абелевых групп, имеющих UA -кольцо эндоморфизмов.

Библиография: 12 названий.

DOI: 10.4213/mzm10643

1. Введение. Известная теорема Бэра–Капланского [1], в которой утверждает, что из изоморфизма колец эндоморфизмов периодических абелевых групп следует изоморфизм самих групп, определила целое направление в теории абелевых групп, занимающееся проблемой изоморфизма и реализации (другое название – проблема определяемости). Многие авторы ставили аналогичную проблему для групп и полугрупп эндоморфизмов [2]–[6], варьируя часто саму постановку задачи. Основные результаты данной работы находятся в русле этого направления.

Пункт 2 настоящей статьи посвящен обобщению теоремы Мэя и Тубасси [6] на случай полугрупп эндоморфизмов и решению близких вопросов. Здесь характеризуются абелевы группы с неизоморфными периодическими частями и с изоморфными полугруппами эндоморфизмов (теорема 1). В предложении 1 утверждается изоморфизм периодических частей абелевых групп, следующий из изоморфизма их полугрупп эндоморфизмов, при условии, что эти периодические части являются редуцированными группами.

В п. 3 получено описание нередуцированных расщепляющихся смешанных абелевых групп, кольцо эндоморфизмов которых является кольцом с однозначным сложением (UA -кольцом) (теоремы 3, 4). Изучение таких абелевых групп в контексте темы статьи оправдано следующим. Если некоторая группа имеет UA -кольцо эндоморфизмов и определяется своим кольцом эндоморфизмов в некотором классе абелевых групп, то она определяется полугруппой эндоморфизмов в этом классе.

Кольцо R называется *кольцом с однозначным сложением* (UA -кольцом), если на его мультипликативной полугруппе $(R, \cdot)$ можно задать единственную бинарную операцию $+$, превращающую ее в кольцо $(R, \cdot, +)$.

Работа выполнена при поддержке Совместной программы “Михаил Ломоносов, III” Министерства образования и науки Российской Федерации и DAAD.

Известно [7], что кольцо R является UA -кольцом тогда и только тогда, когда всякий m -изоморфизм колец $\alpha: R \rightarrow S$ (т.е. изоморфизм мультипликативных полу-групп $(R, \cdot)$ и $(S, \cdot)$) является изоморфизмом колец. Изучению абелевых групп с UA -кольцами эндоморфизмов посвящены работы [9]–[11].

Всюду далее под словом “группа” мы понимаем абелеву группу.

Приведем используемые обозначения: $E^\bullet(G)$ – полугруппа эндоморфизмов группы G ; $T(G)$ ($D(G)$, $R(G)$) – периодическая (делимая, редуцированная) часть группы G ; $F(G)$ – часть без кручения группы G ; если A – периодическая группа, то $\text{supp}(A) = \{p \mid A_p \neq 0\}$. Если A – подмножество в кольце $E(G)$, то $\text{l.a.}(A)$ ($\text{r.a.}(A)$) – левый (правый) аннулятор подмножества A в этом кольце. Кроме этого, Z – группа целых чисел, Q – группа рациональных чисел, J_p – группа целых p -адических чисел, Q_p^* – кольцо целых p -адических чисел.

Терминология и обозначения, принятые в статье, соответствуют [1], [12].

2. Определяемость периодических частей абелевых групп полугруппами эндоморфизмов. Из результатов работы [7; доказательство теоремы 2.12] непосредственно вытекает утверждение, которым мы будем часто пользоваться в дальнейшем.

ЛЕММА 1. Пусть G и H – группы и $E^\bullet(G) \cong E^\bullet(H)$. Если $G = G_1 \oplus G_2$, то $H = H_1 \oplus H_2$, причем

$$E^\bullet(G_i) \cong E^\bullet(H_i), \quad \text{Hom}(G_i, G_j) \cong \text{Hom}(H_i, H_j), \quad i, j = 1, 2, \quad i \neq j.$$

ЛЕММА 2. Пусть A – делимая периодическая группа и $E^\bullet(A) \cong E^\bullet(B)$ для некоторой группы B . Тогда B не является смешанной группой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что группа B является смешанной. Тогда периодическая часть $T(B)$ группы B является делимой группой. В самом деле, если $T(B)$ имеет прямые слагаемые конечного порядка, то такие же слагаемые должна иметь группа A , что противоречит условию. Таким образом, группа B расщепляется: $B = T(B) \oplus F(B)$. Тогда в силу леммы 1 имеем $A = A_1 \oplus A_2$ и

$$\text{Hom}(A_1, A_2) \cong \text{Hom}(T(B), F(B)) = 0, \quad \text{Hom}(A_2, A_1) \cong \text{Hom}(F(B), T(B)) \neq 0.$$

Очевидно, что не существует делимой периодической группы $A = A_1 \oplus A_2$, у которой $\text{Hom}(A_1, A_2) = 0$ и $\text{Hom}(A_2, A_1) \neq 0$. Следовательно, группа B не может быть смешанной.

ЛЕММА 3 [6; лемма 1.1]. Пусть G_1 и G_2 – редуцированные группы, P_1 и P_2 – непересекающиеся множества простых чисел. Если для любого $i \in 1, 2$ умножение на p есть автоморфизм группы G_i для всех $p \notin P_i$, то

$$\text{Hom}(G_i, G_j) = 0, \quad i \neq j, \quad \text{и} \quad E(G_1 \oplus G_2) = E(G_1) \times E(G_2).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть M – максимальная P_2 -делимая подгруппа в G_2 (т.е. $pM = M$ для всех $p \in P_2$). Тогда M – характеристическая подгруппа в G_2 , а значит, она p -делима для каждого $p \notin P_2$. Так как G_2 – редуцированная группа, то M – тривиальная подгруппа. Поскольку гомоморфный образ группы G_1 является P_2 -делимым, то $\text{Hom}(G_1, G_2) = 0$. Симметрично получаем, что $\text{Hom}(G_2, G_1) = 0$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть G – группа с редуцированной периодической частью $T(G)$, не содержащая прямых слагаемых, изоморфных группе J_p . Если $E^\bullet(G) \cong E^\bullet(H)$, то $T(G) \cong T(H)$ для любой группы H .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно убедиться в том, что примарные компоненты групп $T(G)$ и $T(H)$ изоморфны. Пусть $T_p(G)$ – p -компонента группы $T(G)$. Если $T_p(G)$ – ограниченная группа, то $G = T_p(G) \oplus G^*$. Тогда $H = H_1 \oplus H^*$, причем $E^\bullet(T_p(G)) \cong E^\bullet(H_1)$. Так как ограниченная группа определяется своей полугруппой эндоморфизмов в классе всех групп [4], то $T_p(G) \cong H_1$. Кроме того, группа H_1 является p -компонентой группы $T(H)$. В противном случае группа H^* имеет в качестве прямого слагаемого группу Z_{p^k} или Z_{p^∞} . Но тогда группа G^* содержит прямые слагаемые Z_{p^k} или J_p , что невозможно. Если $T_p(G)$ имеет неограниченную p -базисную подгруппу, то [1] существуют элементы $g_1, g_2, \dots$ группы G такие, что

$$G = \langle g_1 \rangle \oplus \dots \oplus \langle g_k \rangle \oplus G_k, \quad G_k = \langle g_{k+1} \rangle \oplus G_{k+1}, \\ o(g_k) = p^k, \quad k = 1, 2, \dots, \quad 1 \leq k_1 < k_2 < \dots$$

Обозначим через e_k проекцию группы G на ее подгруппу $\langle g_k \rangle$ относительно указанных прямых разложений. Тогда в группе H имеются аналогичные разложения [5]:

$$H = \text{Im } e_1^* \oplus \dots \oplus \text{Im } e_k^* \oplus H_k, \quad H_k = \text{Im } e_k^* \oplus H_{k+1}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

где e_k^* – образ e_k при изоморфизме $E^\bullet(G) \cong E^\bullet(H)$. Кроме этого, $\{e_1, e_2, \dots\}$ и $\{e_1^*, e_2^*, \dots\}$ – бесконечные системы попарно ортогональных идемпотентов и

$$(e_1 + \dots + e_k)^* = e_1^* + \dots + e_k^*.$$

Поскольку $\text{Im } e_k = \langle g_k \rangle$ – конечная группа, то $\text{Im } e_k^* \cong \text{Im } e_k \cong \langle g_k \rangle$. Поэтому существуют $h_k \in H$, $k = 1, 2, \dots$, для которых $\text{Im } e_k^* = \langle h_k \rangle \cong \langle g_k \rangle$.

Пусть $g \in T_p(G)$. Тогда найдется элемент $g_k \in T_p(G)$ такой, что $o(g_k) \geq o(g)$. Если e_k – соответствующая проекция, то построим эндоморфизм $\eta \in E^\bullet(G)$ следующим образом: $\eta(g_k) = g$ и $\eta(\text{Ker } e_k) = 0$. Определим изоморфизм $\varphi: T_p(G) \rightarrow T_p(H)$ по закону $\varphi(g) = \varphi(\eta(g_k)) = \eta^*(h_k)$, где η^* – образ η при изоморфизме $E^\bullet(G) \cong E^\bullet(H)$. Проверка того, что φ – изоморфизм, проводится как в работе [5; лемма 12]. Предложение доказано.

Из предложения 1 следует, в частности, что если периодические части $T(G)$ и $T(H)$ групп G и H редуцированы, то из $E^\bullet(G) \cong E^\bullet(H)$ следует $T(G) \cong T(H)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Если A – периодическая группа, все p -компоненты которой являются ограниченными группами, и $\alpha: E^\bullet(A) \cong E^\bullet(B)$ для некоторой группы B , то $E(A) \cong E(B)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $A \cong \bigoplus_p A_p$, где все слагаемые A_p – ограниченные группы. Поскольку $E^\bullet(A) \cong \prod_p E^\bullet(A_p)$, то

$$E^\bullet(B) \cong \prod_p K_p^\bullet \quad \text{и} \quad \alpha_p: E^\bullet(A_p) \cong K_p^\bullet \quad \text{для каждого } p$$

(α_p – изоморфизм, индуцированный изоморфизмом α). Если $e_p: A \rightarrow A_p$ – проекция, то $A \cong A_p \oplus \overline{A_p}$ и $E^\bullet(A_p) \cong E^\bullet(A)e_p$. Тогда $K_p^\bullet \cong E^\bullet(B)\tau_p$, где $\tau_p = \alpha(e_p)$. Кроме

того, по лемме 1 $B \cong B_p \oplus \overline{B_p}$. Покажем, что $K_p^\bullet \cong E^\bullet(B_p)$. Пусть $\psi \in K_p^\bullet$, $x \in B_p$. Тогда $\psi = \varphi\tau_p$ для некоторого $\varphi \in E^\bullet(B)$ и $\psi(x) = \varphi\tau_p(x) = \varphi(x) \in B_p$ в силу вполне инвариантности подгруппы B_p . Поэтому $\psi \in E^\bullet(B_p)$. Обратно, пусть $\psi \in E^\bullet(B_p)$, и пусть $\varphi \in E(B)$ такой, что он аннулирует слагаемое $\overline{B_p}$ и совпадает с ψ на B_p . Тогда $\psi = \varphi\tau_p \in K_p^\bullet$.

Получили, что $K_p^\bullet$ является полугруппой эндоморфизмов некоторой группы и $K_p^\bullet \cong E^\bullet(A_p)$. В силу [4] имеется кольцевой изоморфизм $K_p \cong E(A_p)$. Поскольку сложение на полугруппе $E^\bullet(B)$ определяется сложением на каждой полугруппе $K_p^\bullet$, то $E(A) \cong E(B)$. В заключение доказательства отметим, что полугрупповой изоморфизм α не обязан быть кольцевым [10]. Предложение доказано.

ТЕОРЕМА 1. Пусть G и H – абелевы группы. Следующие условия равносильны:

- $E^\bullet(G) \cong E^\bullet(H)$ и $T(G) \not\cong T(H)$;
- $G = A \oplus B$ и $H = C \oplus D$, где
 - 1) A – нетривиальная делимая периодическая группа, B – редуцированная периодическая группа и $\text{supp}(A) \cap \text{supp}(B) = \emptyset$;
 - 2) C – группа без кручения и $E^\bullet(C) \cong E^\bullet(A)$;
 - 3) $T(D) \cong B$ и $E^\bullet(D) \cong E^\bullet(B)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Пусть $\alpha: E^\bullet(G) \rightarrow E^\bullet(H)$ – изоморфизм и $T(G) \not\cong T(H)$. Из предложения 1 следует, что группа G имеет в качестве прямого слагаемого группу $Z(p^\infty)$ для некоторого p . Соответствующее слагаемое в H изоморфно J_p . Пусть $A = D(T(G))$. Тогда $G = A \oplus G_1$ и $H = C \oplus H_1$, причем $E^\bullet(A) \cong E^\bullet(C)$, $E^\bullet(H_1) \cong E^\bullet(G_1)$ в силу леммы 1. Так как группа C содержит J_p в качестве прямого слагаемого, то по лемме 2 группа C не имеет кручения. Следовательно, второе условие выполнено.

Покажем, что

$$\text{supp}(A) \cap \text{supp}(T(G_1)) = \emptyset.$$

Пусть $p \in \text{supp}(A) \cap \text{supp}(T(G_1))$. Тогда найдутся примитивные идемпотенты $e \in E^\bullet(G_1)$ и $f \in E^\bullet(A)$ такие, что

$$e(G_1) \cong Z(p^k) \quad \text{и} \quad f(A) \cong Z(p^\infty).$$

Если $\alpha(e) = e'$, $\alpha(f) = f'$, то $e'(H_1) \cong Z(p^k)$, $f'(C) \cong J_p$, поскольку C – группа без кручения. Имеем

$$\begin{aligned} \text{Hom}(e(G_1), f(A)) &= \text{Hom}(Z(p^k), Z(p^\infty)) \neq 0, \\ \text{Hom}(e'(H_1), f'(C)) &= \text{Hom}(Z(p^k), J_p) = 0. \end{aligned}$$

В силу леммы 1 указанные группы гомоморфизмов должны быть изоморфны. Противоречие.

Проверим, что G_1 – периодическая группа. Выберем подгруппу $Z(p^\infty)$ в группе A , так что J_p – соответствующее прямое слагаемое в группе H . Тогда имеем прямые разложения

$$G = A^* \oplus G_1 \oplus Z(p^\infty) \quad \text{и} \quad H = C^* \oplus H_1 \oplus J_p,$$

причем $\text{Hom}(G_1, Z(p^\infty)) \cong \text{Hom}(H_1, J_p)$.

Пусть G_1 – p -делимая группа. Тогда, если в группе G_1 имеются элементы бесконечного порядка, то $\text{Hom}(G_1, Z(p^\infty))$ – делимая группа без кручения. В самом

деле [1; теорема 47.1],

$$\text{Hom}(G_1, Z(p^\infty)) \cong \prod_f \bigoplus_{2 \times 0} Q.$$

Однако группа $\text{Hom}(H_1, J_p)$ не может быть делимой группой без кручения. Действительно, если уравнение $p^k x = \psi$ разрешимо для любого $k \in \mathbb{N}$ и некоторого $\psi \in \text{Hom}(H_1, J_p)$, то $\psi(H_1)$ – p -делимая подгруппа в группе J_p . Поскольку J_p не имеет нетривиальных делимых p -подгрупп, то $\psi(H_1) = 0$ и $\psi = 0$.

Пусть теперь группа G_1 не является p -делимой. Если B – p -базисная подгруппа в G_1 , то

$$B = B_0 \oplus B_n, \quad \text{где} \quad B_n = \bigoplus Z(p^n), \quad B_0 = \bigoplus_{\omega} Z.$$

Если $B_0 \neq 0$, то группа $\text{Hom}(G_1, Z(p^\infty))$ содержит подгруппу, изоморфную группе $\prod_{\omega} Z(p^\infty)$. Заметим при этом, что в группе $\prod_{\omega} Z(p^\infty)$ имеются элементы конечного порядка. Но $\text{Hom}(H_1, J_p)$ – группа без кручения. Следовательно, $B_0 = 0$ и G_1 – периодическая группа.

Положим теперь $D = H_1$, $B = G_1$. Тогда первое условие выполнено. Далее, поскольку B – редуцированная периодическая группа, то согласно предложению 1 из $E^\bullet(B) \cong E^\bullet(D)$ следует $T(D) \cong B$. Следовательно, выполнено третье условие.

Достаточность. Покажем, что группа D редуцированная. Предположим, что $D = Z(p^\infty) \oplus \bar{D}$. В этом случае изоморфизм $E^\bullet(D) \cong E^\bullet(B)$ влечет прямое разложение $B = B_1 \oplus B_2$, причем $E^\bullet(B_1) \cong E^\bullet(Z(p^\infty))$. Поскольку периодические группы определяются своей полугруппой эндоморфизмов в классе периодических групп [5], то $B_1 \cong Z(p^\infty)$. Приходим к противоречию с тем фактом, что группа B редуцированная.

Если $D = Q \oplus \bar{D}$, то разложение $B = B_1 \oplus B_2$ влечет изоморфизм $E^\bullet(B_1) \cong E^\bullet(Q)$. Но группа рациональных чисел определяется своей полугруппой эндоморфизмов в классе всех групп [2]. Поэтому $B_1 \cong Q$, что противоречит периодичности группы B . Те же рассуждения приводят к тому, что группа C также является редуцированной группой.

Покажем, что группа C является p -делимой для всех $p \notin \text{supp}(A)$. Если группа A имеет UA -кольцо эндоморфизмов, то кольца $E(A)$ и $E(C)$ изоморфны и утверждение очевидно. В противном случае [10] найдется хотя бы одна p -компонента Z_{p^∞} группы A и $E^\bullet(Z(p^\infty)) \cong E^\bullet(C_1)$, где C_1 – прямое слагаемое группы C . Достаточно рассмотреть случай, когда $A = \bigoplus_p Z(p^\infty)$ для различных p . Проводя доказательство так же, как в предложении 2, можно доказать, что $E(A) \cong E(C)$. При этом учитываем, что прямые слагаемые группы C вполне инвариантны и группа J_p определяется своей полугруппой эндоморфизмов в классе групп без кручения [2].

Докажем p -делимость группы D для всех $p \notin \text{supp}(B)$. Пусть группа $T(D)$ имеет UA -кольцо эндоморфизмов. Тогда из изоморфизмов $E^\bullet(D) \cong E^\bullet(B)$ и $T(D) \cong B$ следует изоморфизм колец $E(D) \cong E(T(D))$. Откуда следует, что $pD = D$ для всех $p \notin \text{supp}(B)$. Кроме того, случай когда группа D периодическая, очевиден. Пусть $E(T(D))$ не является UA -кольцом. Исходя из результатов работы [10], можно считать, что все p -компоненты группы D ограниченные. Тогда мы получим требуемое, применив предложение 2.

Итак, C и D – редуцированные группы, причем C является p -делимой группой для всех $p \notin \text{supp}(A)$, а группа D p -делима для всех $p \notin \text{supp}(B)$. По лемме 3

получаем, что $E^\bullet(H) \cong E^\bullet(C) \times E^\bullet(D)$. Используя изоморфизмы $E^\bullet(A) \cong E^\bullet(C)$ и $E^\bullet(B) \cong E^\bullet(D)$, заключаем, что $E^\bullet(G) \cong E^\bullet(H)$.

Поскольку $T(H) \cong T(D) \cong B$ – редуцированная группа, а группа G – периодическая, имеющая нетривиальную делимую подгруппу, то $T(G) \not\cong T(H)$. Теорема доказана.

Приведем пример групп, удовлетворяющих теореме 1.

ПРИМЕР 1. Редуцированная группа G называется *SI-группой*, если выполнены следующие условия:

- каждая p -компонента G_p группы G – прямая сумма циклических p -групп одного порядка;
- существуют изоморфные вложения

$$\bigoplus_{p \in \text{supp}(G)} G_p \subseteq G \subseteq \prod_{p \in \text{supp}(G)} G_p;$$

- если $x = (x_{p_1}, x_{p_2}, \dots)$, $y = (y_{p_1}, y_{p_2}, \dots) \in \prod_{p \in \text{supp}(G)} G_p$, $x_{p_i}, y_{p_i} \in G_{p_i}$, причем $o(x_{p_i}) \leq o(y_{p_i})$ для всех i и $y \in G$, то $x \in G$.

Из данного определения немедленно следует, что SI-группа G вполне характеристична в прямом произведении своих p -компонент, а ее кольцо эндоморфизмов изоморфно кольцу эндоморфизмов ее периодической части. Полагаем, $A = \mathbb{Z}(2^\infty)$, $C = J_2$, D – SI-группа с нулевой 2-компонентой, B – периодическая часть группы D .

3. Нередуцированные расщепляющиеся смешанные абелевы группы с UA-кольцами эндоморфизмов. Следующий факт будет часто использоваться в дальнейшем.

ТЕОРЕМА 2 [7; теорема 2.12]. *Предположим, что кольцо K обладает такой системой попарно ортогональных идемпотентов $F_K = \{e_i \mid i \in I\}$, что*

- 1) *если $0 \neq x \in K$, то $e_i x e_j \neq 0$ для некоторых $i, j \in I$;*
- 2) *для любого индекса $i \in I$ найдется индекс $j \in I$, $i \neq j$, такой, что для $x \in K$ из $e_i x e_i K e_j = 0 = e_j K e_i x e_i$ следует $e_i x e_i = 0$.*

Тогда K – UA-кольцо.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Нередуцированная группа без кручения G имеет UA-кольцо эндоморфизмов тогда и только тогда, когда $G \cong Q$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. *Необходимость.* Если $G \cong Q$, то $E(G) \cong \mathbb{Q}$. Но $\mathbb{Q}$ не является кольцом с однозначным сложением. Полугрупповой автоморфизм поля $\mathbb{Q}$, переводящий ненулевой элемент поля в ему обратный и оставляющий 0 на месте, является мультипликативным, но не аддитивным.

Достаточность. Если $R(G) = 0$ и $D(G) \cong \bigoplus_I Q$, $|I| > 1$, то кольцо эндоморфизмов группы G является кольцом с однозначным сложением [9]. Пусть $R(G) \neq 0$. В силу теоремы 2 достаточно проверить, что

$$\begin{aligned} \text{r.a.}(\text{Hom}(R(G), D(G))) \cap E(R(G)) &= 0, \\ \text{l.a.}(\text{Hom}(R(G), D(G))) \cap E(D(G)) &= 0. \end{aligned}$$

Если для некоторого $\varphi \in E(R(G))$ выполнено $\varphi(x) = y \neq 0$, то, учитывая инъективность группы $D(G)$, мономорфизм $\langle y \rangle \rightarrow D(G)$ можно продолжить до гомоморфизма $\psi: R(G) \rightarrow D(G)$. Тогда $0 \neq \psi\varphi \in \text{Hom}(R(G), D(G))$.

Если $\varphi(x) \neq 0$ для $\varphi \in E(D(G))$, то естественная инъекция $\langle z \rangle \rightarrow \langle x \rangle$, где $0 \neq z \in R(G)$, может быть продолжена до гомоморфизма $\psi: R(G) \rightarrow D(G)$. В этом случае $0 \neq \varphi\psi \in \text{Hom}(R(G), D(G))$. Предложение доказано.

Пусть $G = \bigoplus_{i \in I} G_i$, $e_i: G \rightarrow G_i$ – проекция, $\alpha: E(G) \rightarrow K$ – m -изоморфизм. Если α аддитивен на $e_i E(G) e_i = E(G_i)$, то будем говорить, что α аддитивен на G_i .

ЛЕММА 4. Если G – нередуцированная расщепляющаяся смешанная группа такая, что

$$G = D(T(G)) \oplus R(T(G)) \oplus F(G),$$

то любой m -изоморфизм $\alpha: E(G) \rightarrow K$ аддитивен на $D(T(G))$ и $F(G)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для проекций $e_{DT}: G \rightarrow D(T(G))$, $e_F: G \rightarrow F(G)$ имеем

$$\begin{aligned} E(D(T(G))) &= e_{DT} E(G) e_{DT}, & E(F(G)) &= e_F E(G) e_F, \\ \text{Hom}(F(G), D(T(G))) &= e_{DT} E(G) e_F. \end{aligned}$$

Докажем справедливость равенств

$$\begin{aligned} \text{r.a.}(e_{DT} E(G) e_F) \cap e_F E(G) e_F &= 0, \\ \text{l.a.}(e_{DT} E(G) e_F) \cap e_{DT} E(G) e_{DT} &= 0. \end{aligned}$$

Пусть $\varphi \in e_F E(G) e_F$ и $\varphi(x) = y \neq 0$ для некоторых $x, y \in F(G)$. В силу инъективности группы $D(T(G))$ ненулевой гомоморфизм $\langle y \rangle \rightarrow D(T(G))$ можно продолжить до гомоморфизма $\psi: F(G) \rightarrow D(T(G))$. Откуда $\psi\varphi(x) = \psi(y) \neq 0$. Поскольку α сохраняет сложение на $e_{DT} E(G) e_F$ ([7; доказательство теоремы 2.12.]), то α аддитивен на $F(G)$ [8; лемма 2].

Пусть $0 \neq \varphi \in e_{DT} E(G) e_{DT}$. Поскольку

$$D(T(G)) = \bigoplus_p \left[\bigoplus_{r_p(D(T(G)))} Z(p^\infty) \right],$$

то $\varphi(c_k) \neq 0$, где c_k – один из образующих элементов группы $Z(p^\infty)$ для некоторого p . Если $0 \neq a \in F(G)$, то ненулевой гомоморфизм $\langle a \rangle \rightarrow D(T(G))$, переводящий элемент a в c_k , продолжается до гомоморфизма $\psi: F(G) \rightarrow D(T(G))$. Следовательно, α аддитивен на $D(T(G))$. Лемма доказана.

Доказанная лемма позволяет утверждать, что смешанная группа с делимой периодической частью имеет UA -кольцо эндоморфизмов.

Пусть $G = \bigoplus_p G_p$ – периодическая группа. Тогда кольцо $E(G)$ будет кольцом с однозначным сложением в том и только том случае, когда все кольца $E(G_p)$ будут обладать данным свойством. Согласно [10; теоремы 1, 3] кольцо эндоморфизмов редуцированной p -группы G_p ($\neq Z(2), Z(3)$) не является UA -кольцом тогда и только тогда, когда группа G_p является ограниченной группой, имеющей изолированное прямое слагаемое (т.е. единственное циклическое прямое слагаемое максимального порядка).

ТЕОРЕМА 3. Пусть $G = T(G) \oplus F(G)$, причем $T(G)$ – редуцированная, а $F(G)$ – делимая группы. Тогда следующие условия эквивалентны:

- 1) $E(G)$ – кольцо с однозначным сложением;

- 2) $F(G) \not\cong Q$ и среди p -компонент периодической части группы G нет ограниченных групп, содержащих изолированные прямые слагаемые.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По условию теоремы имеем $E(G) \cong E(T(G)) \times E(F(G))$. Откуда следует, что условие 1) эквивалентно тому, что $E(T(G))$ и $E(F(G))$ – кольца с однозначным сложением. Тогда из предложения 3 и [10] получаем утверждение теоремы.

Известно, что кольцо эндоморфизмов группы G является артиновым слева (или справа) тогда и только тогда, когда $G = B \oplus D$, где B – конечная, а D – делимая группа без кручения конечного ранга [1; теорема 111.3]. Имеем такое

СЛЕДСТВИЕ 1. Если кольцо $E(G)$ является артиновым слева (или справа), то $E(G)$ не является УА-кольцом в точности тогда, когда $D \cong Q$ или некоторая примарная компонента группы B имеет изолированное прямое слагаемое.

ТЕОРЕМА 4. Пусть G – нередуцированная расщепляющаяся группа. Если $T(G)$ – редуцированная группа, а группа $F(G)$ не является делимой, или $T(G)$ – нередуцированная группа, то кольцо $E(G)$ не является УА-кольцом в том и только том случае, если некоторая примарная компонента $T_p(G)$ группы $T(G)$ является ограниченной группой, содержащей изолированное прямое слагаемое и группа $F(G)$ p -делима.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через P_0 множество простых чисел, для которых ненулевые компоненты $T_p(G)$ являются редуцированными группами и группа $F(G)$ p -делима. Тогда

$$G = T_0(G) \oplus H, \quad \text{где} \quad T_0(G) = \bigoplus_{p \in P_0} T_p(G), \quad H = \bigoplus_{p \notin P_0} T_p(G) \oplus F(G).$$

Имеем

$$\begin{aligned} \text{Hom}(H, T_0(G)) &\cong \text{Hom}(F(G), T_0(G)) \oplus \text{Hom}\left(\bigoplus_{p \notin P_0} T_p(G), T_0(G)\right) \\ &\cong \text{Hom}(F(G), T_0(G)) \oplus \left[\prod_{p \notin P_0} \text{Hom}(T_p(G), T_0(G)) \right]. \end{aligned}$$

В силу p -делимости для всех $p \in P_0$ части без кручения группы G и редуцированности группы $T_0(G)$ получаем, что $\text{Hom}(F(G), T_0(G)) = 0$. Кроме того, имеем $\text{Hom}(T_p(G), T_0(G)) = 0$ для всех $p \notin P_0$. Следовательно,

$$\text{Hom}(H, T_0(G)) = \text{Hom}(T_0(G), H) = 0.$$

Закключаем, что $T_0(G)$ и H – вполне инвариантные подгруппы группы G . Поэтому кольцо эндоморфизмов группы G не будет кольцом с однозначным сложением тогда и только тогда, когда данным свойством не будут обладать или кольцо $E(T_0(G))$ или кольцо $E(H)$. Поскольку $T_0(G)$ – редуцированная периодическая группа, то условие наличия изолированного прямого слагаемого в некоторой ее p -компоненте является необходимым и достаточным для того, чтобы ее кольцо эндоморфизмов не обладало свойством однозначности сложения.

Используя теорему 2, докажем, что $E(H)$ – UA -кольцо. Введем обозначения $H_1 = \bigoplus_{p \notin P_0} T_p(G)$, $H_2 = F(G)$. Проекции

$$e_{D1}: H \rightarrow D(H_1), \quad e_{D2}: H \rightarrow D(H_2), \quad e_{R1}: H \rightarrow R(H_1), \quad e_{R2}: H \rightarrow R(H_2)$$

образуют полную систему ортогональных идемпотентов.

Рассмотрим два случая.

1) Случай $D(H_1) = 0$. Поскольку $D(H_2) \neq 0$ и $R(H_2) \neq 0$, то из доказательства предложения 3 следует, что всякий m -изоморфизм $\alpha: E(H) \rightarrow K$ аддитивен на $D(H_2)$ и $R(H_2)$. Покажем, что α сохраняет сложение на $R(H_1)$. Для этого проверим, что

$$\text{l.a.}(e_{R1}E(H)e_{R2}) \cap e_{R1}E(H)e_{R1} = 0,$$

где $e_{R1}E(H)e_{R2} = \text{Hom}(R(H_2), R(H_1))$ и $e_{R1}E(H)e_{R1} = E(R(H_1))$.

Пусть $0 \neq \varphi \in E(R(H_1))$. Тогда существует число $q \notin P_0$ такое, что $\varphi(x) \neq 0$ для некоторого $x \in T_q(H)$. Так как $T_q(H)$ – вполне инвариантная подгруппа группы $R(H_1)$, то ограничение φ на $T_q(H)$ есть ненулевой эндоморфизм ξ группы $T_q(H)$, который, в свою очередь, определяется действием на базисной подгруппе группы $T_q(H)$. Следовательно, $\varphi(q_k) \neq 0$, где q_k – образующий элемент группы $Z(q^k)$ для некоторого k . Далее, поскольку $R(H_2)$ не является q -делимой группой, то ее q -базисная подгруппа $B = \bigoplus_{i \in I} \langle a_i \rangle$ отлична от нуля. Для $0 \neq b \in B$ найдется $s \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ такой, что $b \in q^s R(H_2) \setminus q^{s+1} R(H_2)$. Если $q^s c = b$, то в силу q -сервантности подгруппы B , $c \in B$. Тогда уравнение $qx = a_i$ неразрешимо для некоторого a_i , $i \in I$. Определим гомоморфизм $\psi': \langle a_i \rangle \rightarrow Z(q^k)$ по правилу $\psi'(a_i) = g_k$. Учитывая [1; теорема 8.1.] и то, что $Z(q^k)$ – q -сервантно инъективная группа, гомоморфизм ψ' можно продолжить до гомоморфизма $\psi: R(H_2) \rightarrow Z(q^k)$. Тогда $\varphi\psi(a_i) = \varphi(g_k) \neq 0$.

2) Случай $D(H_1) \neq 0$. По лемме 4 α аддитивен на $F(G)$ и $D(H_1)$. Покажем, что α сохраняет сложение на $R(H_1)$. Пусть $0 \neq \varphi \in e_{R1}E(H)e_{R1}$. Если $R(H_2) \neq 0$, то можно повторить доказательство случая 1). В противном случае справедливо

$$\text{r.a.}(e_{D1}E(H)e_{R1}) \cap e_{R1}E(H)e_{R1} = 0.$$

В самом деле, если $\varphi(x) = y$, где $0 \neq y \in T_q(H)$ для некоторого $q \notin P_0$, то, учитывая, что $\text{supp } D(H_1) = \text{supp } R(H_1)$, ненулевой гомоморфизм $\langle y \rangle \rightarrow D(H_1)$ можно продолжить до гомоморфизма $R(H_1) \rightarrow D(H_1)$. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 2. Кольцо $E(G)$ делимой группы G не является UA -кольцом в точности тогда, когда $G \cong Q$ или G – периодическая группа, у которой хотя бы одна p -компонента изоморфна группе Z_{p^∞} .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточность следует из предложения 3 и [10]. Докажем необходимость. Пусть $A \neq Q$ и $A \neq \bigoplus A_p$, где $A_p = Z_{p^\infty}$ хотя бы для одного $p \in \text{supp}(A)$. Имеем

$$G = \bigoplus_{r_0(D)} Q \oplus \left[\bigoplus_p \left(\bigoplus_{r_p(D)} Z(p^\infty) \right) \right].$$

Если $r_0(D) \neq 0$, $r_p(D) \neq 0$, то $E(G)$ является UA -кольцом по теореме 4. Если $r_0(D) = 0$ или $r_p(D) \neq 0$, то кольцо $E(G)$ изоморфно прямому произведению колец матриц порядка выше 1 над кольцом Q или кольцами Q_p^* , $p \in \text{supp}(A)$. Из [8] следует, что $E(A)$ – UA -кольцо. Противоречие.

Авторы признательны профессору А. В. Михалеву за полезные обсуждения и постановку задачи описания абелевых групп с UA -кольцами эндоморфизмов.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Л. Фукс, *Бесконечные абелевы группы*, Т. 1, Мир, М., 1974; Л. Фукс, *Бесконечные абелевы группы*, Т. 2, Мир, М., 1977.
- [2] А. М. Себельдин, “Абелевы группы с изоморфными полугруппами эндоморфизмов”, *УМН*, **49**:6 (1994), 211–212.
- [3] А. М. Себельдин, “Абелевы группы некоторых классов с изоморфными кольцами эндоморфизмов”, *УМН*, **50**:1 (1995), 207–208.
- [4] П. Пуусеп, “Об определяемости периодической абелевой группы своей полугруппой эндоморфизмов в классе всех групп”, *Изв. АН Эстонской ССР. Физ. Матем.*, **29**:3 (1980), 241–245.
- [5] П. Пуусеп, “Об определяемости периодической абелевой группы своей полугруппой эндоморфизмов в классе всех периодических абелевых групп”, *Изв. АН Эстонской ССР. Физ. Матем.*, **29**:3 (1980), 246–253.
- [6] W. May, E. Toubassi, “Endomorphisms of Abelian groups and the theorem of Baer and Kaplansky”, *J. Algebra*, **43**:1 (1976), 1–13.
- [7] А. В. Михалев, “Мультипликативная классификация ассоциативных колец”, *Матем. сб.*, **135**:2 (1988), 210–224.
- [8] W. Stephenson, “Unique addition rings”, *Canad. J. Math.*, **21** (1969), 1455–1461.
- [9] О. В. Любимцев, “Сепарабельные абелевы группы без кручения с UA -кольцами эндоморфизмов”, *Фундамент. и прикл. матем.*, **4**:4 (1998), 1419–1422.
- [10] О. В. Любимцев, “Периодические абелевы группы с UA -кольцами эндоморфизмов”, *Матем. заметки*, **70**:5 (2001), 736–741.
- [11] Д. С. Чистяков, О. В. Любимцев, “Об абелевых группах без кручения с UA -кольцом эндоморфизмов”, *Вестн. Томск. гос. ун-та. Матем. и мех.*, 2011, № 2, 55–58.
- [12] П. А. Крылов, А. В. Михалев, А. А. Туганбаев, *Абелевы группы и их кольца эндоморфизмов*, Факториал пресс, М., 2006.

О. В. Любимцев

Нижегородский государственный
архитектурно-строительный университет
E-mail: oleg_lyubimcev@mail.ru

Поступило

23.12.2013

Исправленный вариант

24.05.2014

Д. С. Чистяков

Московский педагогический государственный
университет
E-mail: chistyakovds@yandex.ru