Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. Н. Субботин, С. А. Теляковский, О нормах ядер Фавара, *Матем. заметки*, 2015, том 97, выпуск 4, 583–590

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10644>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.97.219

26 апреля 2023 г., 10:23:53

О нормах ядер Фавара

Ю. Н. Субботин, С. А. Теляковский

Для ядер Фавара, с помощью которых строятся полиномы наилучшего приближения классов периодических дифференцируемых функций W^r , найдены точные значения норм в виде простых конечных сумм при нечетных r и оценки норм снизу при четных r . Подобные результаты получены также для норм сопряженных ядер Фавара.

Библиография: 7 названий.

DOI: 10.4213/mzm10644

Интерес к средним Фавара в теории приближения функций объясняется тем, что при приближении функций суммами Фавара достигаются верхние грани наилучших приближений классов дифференцируемых функций W^r и колмогоровские поперечники этих классов, см., например, [1; теоремы 5.5.1 и 10.4.1].

В настоящей работе для норм ядер Фавара найдены точные значения в виде простых конечных сумм при нечетных r и оценки норм снизу при четных r . Подобные результаты получены также для норм сопряженных ядер Фавара.

Средние Фавара для приближения функций f класса W^r , $r = 1, 2, \dots$, являются сверткой производной $f^{(r)}(x)$ с ядром Фавара:

$$u_n(f, x, r) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^{(r)}(x-t) \Phi_n(t, r) dt,$$

где

$$\Phi_n(t, r) := \sum_{k=1}^n \frac{\lambda_k(n, r)}{k^r} \cos\left(kt - \frac{r\pi}{2}\right),$$

и

$$\lambda_k(n, r) := 1 - \sum_{s=1}^{\infty} \left(\left(\frac{k}{2sn-k} \right)^r - \left(\frac{k}{2sn+k} \right)^r \right)$$

при нечетных r и

$$\lambda_k(n, r) := 1 - \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^{s+1} \left(\left(\frac{k}{2sn-k} \right)^r + \left(\frac{k}{2sn+k} \right)^r \right)$$

при четных r . Заметим, что $\lambda_n(n, r) = 0$.

Так как ядро Фавара либо четно, либо нечетно, его норма равна

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\pi \left| \sum_{k=1}^n \frac{\lambda_k(n, r)}{k^r} \cos \left(kt - \frac{r\pi}{2} \right) \right| dt. \quad (1)$$

Для получения информации о знаках ядер Фавара (и сопряженных ядер Фавара) будут использоваться две леммы.

ЛЕММА 1. При целых r и l таких, что $0 \leq l < r$, числа

$$\frac{\lambda_1(n, r)}{1^{r-l}}, \quad \frac{\lambda_2(n, r)}{2^{r-l}}, \quad \dots, \quad \frac{\lambda_{n-1}(n, r)}{(n-1)^{r-l}}, \quad \frac{\lambda_n(n, r)}{n^{r-l}} = 0 \quad (2)$$

монотонно убывают.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для $l \geq 1$ монотонность чисел (2) была установлена в [2] при доказательстве леммы 1. При $l = 0$ доказательство аналогично рассуждениям из [2].

При нечетных r

$$\frac{\lambda_k(n, r)}{k^r} = \frac{1}{k^r} - g(k, n, r),$$

где

$$g(x, n, r) := \sum_{s=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(2sn - x)^r} - \frac{1}{(2sn + x)^r} \right).$$

Функция $g(x, n, r)$ при $x \in [0, n]$ возрастает, так как

$$g'(x, n, r) = r \sum_{s=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(2sn - x)^{r+1}} + \frac{1}{(2sn + x)^{r+1}} \right) > 0.$$

Значит, дроби (2) как значения разностей убывающей и возрастающей функций убывают.

При четных r

$$\frac{\lambda_k(n, r)}{k^r} = \frac{1}{k^r} - h(k, n, r),$$

где

$$h(x, n, r) := \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^{s+1} \left(\frac{1}{(2sn - x)^r} + \frac{1}{(2sn + x)^r} \right). \quad (3)$$

Для $x \in [0, n]$ производная функции $h(x, n, r)$ положительна, так как модули производных членов ряда (3) убывают. Значит, и при четных r дроби (2) являются значениями разностей убывающей и возрастающей функций.

Лемма доказана.

ЛЕММА 2. При целых r и l таких, что $0 \leq l < r$, полиномы

$$\sum_{k=1}^n \frac{\lambda_k(n, r)}{k^{r-l}} \sin kt \quad (4)$$

положительны на интервале $(0, \pi)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для $l \geq 1$ это утверждение доказано в [2; лемма 1]. Рассмотрим случай, когда $l = 0$.

Известно [3], [4], что сумма ряда по синусам с монотонно убывающими к нулю коэффициентами

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \sin kx$$

положительна на интервале $(0, \pi)$, если $\alpha_1 > 0$, и при всех k справедливы оценки

$$2k\alpha_{2k} \leq (2k-1)\alpha_{2k-1}. \quad (5)$$

Для суммы (4) при нечетных r условие (5) имеет вид

$$\frac{1}{(2k)^{r-1}} - 2kg(2k, n, r) \leq \frac{1}{(2k-1)^{r-1}} - (2k-1)g(2k-1, n, r), \quad 2k \leq n.$$

Эта оценка выполняется, так как $xg(x, n, r)$ при $(0, n]$ является произведением возрастающих положительных функций.

Условие (5) для полинома (4) при четных r

$$\frac{1}{(2k)^{r-1}} - 2kh(2k, n, r) \leq \frac{1}{(2k-1)^{r-1}} - (2k-1)h(2k-1, n, r), \quad 2k \leq n,$$

выполняется в силу возрастания функции $xh(x, n, r)$.

Лемма доказана.

Введем обозначение $q := [(n-1)/2]$.

ТЕОРЕМА 1. При нечетных r норма ядра Фавара (1) равна

$$\frac{4}{\pi} \sum_{s=0}^q \frac{\lambda_{2s+1}(n, r)}{(2s+1)^{r+1}}.$$

При четных r справедливо строгое неравенство

$$\|\Phi_n(\cdot, r)\| > \frac{4}{\pi} \sum_{s=0}^q (-1)^s \frac{\lambda_{2s+1}(n, r)}{(2s+1)^{r+1}}. \quad (6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно лемме 2 при нечетных r полином $\Phi_n(t, r)$ сохраняет знак на интервале $(0, \pi)$. Поэтому

$$\begin{aligned} \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \left| \sum_{k=1}^n \frac{\lambda_k(n, r)}{k^r} \cos\left(kt - \frac{r\pi}{2}\right) \right| dt &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sum_{k=1}^n \frac{\lambda_k(n, r)}{k^r} \sin kt \, dt \\ &= \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^n (1 - (-1)^k) \frac{\lambda_k(n, r)}{k^{r+1}} = \frac{4}{\pi} \sum_{s=0}^q \frac{\lambda_{2s+1}(n, r)}{(2s+1)^{r+1}}. \end{aligned}$$

При четных r норма ядра Фавара равна

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\pi \left| \sum_{k=1}^n \frac{\lambda_k(n, r)}{k^r} \cos kt \right| dt. \quad (7)$$

Полином

$$\sum_{k=1}^n \frac{\lambda_k(n, r)}{k^r} \cos kt \quad (8)$$

при $t = 0$ положителен, при $t = \pi$ отрицателен, а его производная на $(0, \pi)$ в силу леммы 2 отрицательна. Если полином (8) обращается в нуль при $t = \pi/2 + h$, $|h| < \pi/2$, то интеграл (7) равен

$$F_n(h) := \frac{4}{\pi} \left| \sum_{k=1}^n \frac{\lambda_k(n, r)}{k^{r+1}} \sin k \left(\frac{\pi}{2} + h \right) \right|.$$

Значение полинома

$$\sum_{k=1}^n \frac{\lambda_k(n, r)}{k^{r+1}} \sin k \left(\frac{\pi}{2} + h \right) \quad (9)$$

при $h = 0$ равно

$$\sum_{s=0}^q \frac{\lambda_{s+1}(n, r)}{(2s+1)^{r+1}} (-1)^{s+1}. \quad (10)$$

Модули слагаемых в (10) с ростом s убывают. Значит, сумма (10) положительна.

Таким образом, при малых по модулю h

$$F_n(h) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{\lambda_k(n, r)}{k^{r+1}} \sin k \left(\frac{\pi}{2} + h \right).$$

Используя лемму 1, видим, что производная по h полинома из правой части этого равенства при $h = 0$ отрицательна. Значит, при малых отрицательных h значения функции $F_n(h)$ превосходят

$$F_n(0) = \frac{4}{\pi} \sum_{s=0}^q (-1)^s \frac{\lambda_{2s+1}(n, r)}{(2s+1)^{r+1}}.$$

Теорема доказана.

Стечкин рассматривал приближение функций суммами Фавара при $r = 1$ и показал [5; следствие 2], что нормы ядер Фавара $\Phi_n(t, 1)$ ограничены сверху числом

$$J := \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \left| \int_0^{\pi/2} x \operatorname{ctg} x \cos tx \, dx \right| dt,$$

причем $J > \|\Phi_n(\cdot, 1)\|$ при всех n и

$$J - \|\Phi_n(\cdot, 1)\| = O\left(\frac{1}{n}\right), \quad n \rightarrow \infty.$$

Так как сумма ряда

$$\frac{4}{\pi} \sum_{s=0}^\infty \frac{1}{(2s+1)^2}$$

равна константе Фавара $K_1 = \pi/2$, из теоремы 1 следует, что $J = \pi/2$.

Подобными свойствами нормы ядер Фавара $\Phi_n(t, r)$ обладают при всех нечетных r .

ТЕОРЕМА 2. Для норм ядер Фавара $\Phi_n(t, r)$ при нечетных r справедливы оценки

$$\|\Phi_n(\cdot, r)\| < K_r, \quad (11)$$

где K_r – константы Фавара

$$K_r = \frac{4}{\pi} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{(2s+1)^{r+1}},$$

и

$$K_r - \|\Phi_n(\cdot, r)\| = O\left(\frac{1}{n^r}\right), \quad n \rightarrow \infty. \quad (12)$$

При этом в (12) O -большое нельзя заменить на o -малое.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оценка (11) очевидна, докажем (12). Имеем

$$K_r - \|\Phi_n(\cdot, r)\| = \frac{4}{\pi} \sum_{i=0}^q \frac{1 - \lambda_{2i+1}(n, r)}{(2i+1)^{r+1}} + \frac{4}{\pi} \sum_{i=q+1}^{\infty} \frac{1}{(2i+1)^{r+1}} = I_1 + I_2.$$

Оценим сумму

$$I_1 = \frac{4}{\pi} \sum_{i=0}^q \frac{1}{2i+1} \sum_{s=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(2sn - (2i+1))^r} - \frac{1}{(2sn + (2i+1))^r} \right).$$

Пользуясь формулой конечных приращений Лагранжа, находим

$$\frac{1}{(2sn - (2i+1))^r} - \frac{1}{(2sn + (2i+1))^r} < \frac{2(2i+1)r}{(2sn - (2i+1))^{r+1}}.$$

С помощью этой оценки и оценки

$$2q+1 = 2\left[\frac{n-1}{2}\right] + 1 \leq n \quad (13)$$

получаем

$$I_1 < \frac{8r}{\pi} \sum_{i=0}^q \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{(2sn - (2i+1))^{r+1}} \leq \frac{8r}{\pi} (q+1) \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{(2sn - n)^{r+1}} = O\left(\frac{1}{n^r}\right).$$

Отсюда следуют и оценка (12), и то, что в ней O -большое нельзя заменить на o -малое, поскольку величины I_1 и I_2 положительны и I_2 имеет точный порядок n^{-r} .

Теорема доказана.

В [5; теорема 2] доказано, что для отличных от констант непрерывных функций f справедлива оценка

$$\|f(x) - u_n(f, x, 1)\| < \left(\frac{1}{2} + \frac{J}{2}\right) \omega\left(f, \frac{\pi}{n}\right), \quad (14)$$

где $\omega(f, \delta)$ – модуль непрерывности функции f , причем числовой множитель в правой части (14) не может быть уменьшен. Согласно сказанному выше этот множитель равен

$$\frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}.$$

Отметим еще, что как показано в [6], существует такой линейный метод приближения функций f тригонометрическими полиномами $A_n(f, x)$ порядка $n - 1$, что для функций, модуль непрерывности которых является вогнутой (выпуклой вверх) функцией, выполняется неравенство

$$\|f(x) - A_n(f, x)\| \leq \frac{3 + \sqrt{3}}{4} \omega\left(f, \frac{\pi}{n}\right).$$

Рассмотрим теперь нормы сопряженных ядер Фавара

$$\tilde{\Phi}_n(t, r) := \sum_{k=1}^n \frac{\lambda_k(n, r)}{k^r} \cos\left(kt - \frac{r+1}{2}\pi\right).$$

Доказательство следующего утверждения аналогично рассуждениям, проводившимся для ядер Фавара $\Phi_n(t, r)$ в теореме 1. Пусть, как и выше, $q = [(n - 1)/2]$.

ТЕОРЕМА 3. *При четных r норма ядра $\tilde{\Phi}_n(t, r)$ равна*

$$\frac{4}{\pi} \sum_{s=0}^q \frac{\lambda_{2s+1}(n, r)}{(2s+1)^{r+1}}.$$

При нечетных r справедливо строгое неравенство

$$\|\tilde{\Phi}_n(\cdot, r)\| > \frac{4}{\pi} \sum_{s=0}^q (-1)^s \frac{\lambda_{2s+1}(n, r)}{(2s+1)^{r+1}}. \quad (15)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При четных r получаем с помощью леммы 2

$$\begin{aligned} \|\tilde{\Phi}_n(\cdot, r)\| &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sum_{k=1}^n \frac{\lambda_k(n, r)}{k^r} \sin kt \, dt = \\ &= \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^n (1 - (-1)^k) \frac{\lambda_k(n, r)}{k^{r+1}} = \frac{4}{\pi} \sum_{i=0}^q \frac{\lambda_{2i+1}(n, r)}{(2i+1)^{r+1}}. \end{aligned}$$

Если r нечетно, то

$$\|\tilde{\Phi}_n(\cdot, r)\| = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \left| \sum_{k=1}^n \frac{\lambda_k(n, r)}{k^r} \cos kt \right| dt.$$

Отсюда к оценке (15) приходим, используя установленные выше свойства полиномов (9).

Теорема доказана.

При четных r справедлив также аналог теоремы 2, в котором участвуют сопряженные константы Фавара $\tilde{K}_r$, см. [7; п. 101], которые при четных r имеют вид

$$\tilde{K}_r = \frac{4}{\pi} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{(2s+1)^{r+1}}.$$

ТЕОРЕМА 4. Для норм сопряженных ядер Фавара $\tilde{\Phi}_n(t, r)$ при четных r справедливы оценки

$$\|\tilde{\Phi}_n(\cdot, r)\| < \tilde{K}_r, \quad (16)$$

где $\tilde{K}_r$ – сопряженные константы Фавара, и

$$\tilde{K}_r - \|\tilde{\Phi}_n(\cdot, r)\| = O\left(\frac{\log n}{n^r}\right), \quad n \rightarrow \infty. \quad (17)$$

При этом в (17) O -большое нельзя заменить на o -малое.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оценка (16) следует из теоремы 3. Докажем (17). Имеем

$$\tilde{K}_r - \|\tilde{\Phi}_n(\cdot, r)\| = \frac{4}{\pi} \sum_{i=0}^q \frac{1 - \lambda_{2i+1}(n, r)}{(2i+1)^{r+1}} + \frac{4}{\pi} \sum_{i=q+1}^{\infty} \frac{1}{(2i+1)^{r+1}} = \tilde{I}_1 + I_2.$$

Величина $\tilde{I}_1$ равна

$$\begin{aligned} & \frac{4}{\pi} \sum_{i=0}^q \frac{1}{(2i+1)^{r+1}} \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^{s+1} \left[\left(\frac{2i+1}{2ns - (2i+1)} \right)^r + \left(\frac{2i+1}{2ns + (2i+1)} \right)^r \right] \\ &= \frac{4}{\pi} \sum_{i=0}^q \frac{1}{2i+1} \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^{s+1} \left[\frac{1}{(2ns - (2i+1))^r} + \frac{1}{(2ns + (2i+1))^r} \right]. \end{aligned}$$

Оценим разность

$$\begin{aligned} B(s, n, r) &:= \frac{1}{(2ns - (2i+1))^r} + \frac{1}{(2ns + (2i+1))^r} - \\ &- \left(\frac{1}{(2ns + 2n - (2i+1))^r} + \frac{1}{(2ns + 2n + (2i+1))^r} \right). \end{aligned}$$

Согласно формуле конечных приращений Лагранжа при некотором $\theta \in (0, 1)$ имеем

$$B(s, n, r) = 2nr \left[\frac{1}{(2ns + 2n\theta - (2i+1))^{r+1}} + \frac{1}{(2ns + 2n\theta + (2i+1))^{r+1}} \right].$$

Отсюда, пользуясь неравенством (13), находим оценку сверху

$$B(s, n, r) < \frac{4nr}{((2s-1)n)^{r+1}}$$

и оценку снизу

$$B(s, n, r) > \frac{4nr}{((2s+3)n)^{r+1}}.$$

Следовательно, сумма $\tilde{I}_1$ при $n \rightarrow \infty$ имеет точный порядок

$$\frac{\log n}{n^r}.$$

Так как

$$I_2 = O\left(\frac{1}{n^r}\right),$$

теорема доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Н. П. Корнейчук, *Экстремальные задачи теории приближения*, М., Наука, 1976.
- [2] Ю. Н. Субботин, С. А. Теляковский, “Уточнение оценок относительных поперечников классов дифференцируемых функций”, *Теория функций и дифференциальные уравнения*, Тр. МИАН, **269**, МАИК, М., 2010, 242–253.
- [3] А. С. Белов, “О примерах тригонометрических рядов с неотрицательными частными суммами”, *Матем. сб.*, **186**:4 (1995), 21–46.
- [4] L. Vietoris, “Über das Vorzeichen gewisser trigonometrischer Summen”, *Österr. Akad. Wiss. Math.-natur. Kl. Sitzungsber. Abt. II*, **167** (1958), 125–135.
- [5] С. Б. Стечкин, “О приближении непрерывных периодических функций суммами Фавара”, *Приближение периодических функций*, Тр. МИАН СССР, **109**, 1971, 26–34.
- [6] С. Б. Стечкин, “Замечание к теореме Джексона”, *Приближение функций в среднем*, Тр. МИАН СССР, **88**, 1967, 17–19.
- [7] Н. И. Ахиезер, *Лекции по теории аппроксимации*, М., Наука, 1965.

Ю. Н. Субботин

Институт математики и механики УрО РАН,

г. Екатеринбург

E-mail: yunsub@imm.uran.ru

Поступило

11.09.2014

С. А. Теляковский

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН,

г. Москва

E-mail: SergeyAltel@yandex.ru