Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. Т. Воробьёв, М. Г. Семёнов, Инъекторы во множестве Фиттинга конечной группы, *Матем. заметки*, 2015, том 97, выпуск 4, 516–528

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10645>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.97.219

26 апреля 2023 г., 16:39:42

Инъекторы во множестве Фиттинга конечной группы

Н. Т. Воробьев, М. Г. Семёнов

Множество подгрупп $\mathcal{F}$ конечной группы G называют *множеством Фиттинга*, если оно замкнуто относительно взятия нормальных подгрупп, произведений нормальных $\mathcal{F}$ -подгрупп и внутренних автоморфизмов G . Множество Фиттинга $\mathcal{F}$ группы G назовем π -*насыщенным*, если для каждой подгруппы H из G такой, что $O^{\pi'}(H) \in \mathcal{F}$, справедливо $H \in \mathcal{F}$. В работе доказано, что если $\mathcal{F}$ – π -насыщенное множество Фиттинга π -разрешимой группы G , то в G существуют $\mathcal{F}$ -инъекторы и любые два из них сопряжены.

Библиография: 13 названий.

DOI: 10.4213/mzm10645

1. Введение. Основополагающим результатом в теории классов конечных разрешимых групп является обобщение фундаментальных теорем Силова и Холла, которое было получено Гашюцом, Фишером и Хартли [1], где доказано, что для любого класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ в каждой конечной разрешимой группе G существуют $\mathfrak{F}$ -инъекторы и любые два из них сопряжены. Напомним, что класс групп $\mathfrak{F}$ называют *классом Фиттинга*, если $\mathfrak{F}$ замкнут относительно взятия нормальных подгрупп и произведений нормальных $\mathfrak{F}$ -подгрупп. При этом подгруппа V группы G называется $\mathfrak{F}$ -*инъектором* G , если для любой субнормальной подгруппы N группы G подгруппа $V \cap N$ является максимальной из подгрупп N , принадлежащих $\mathfrak{F}$. *Множеством Фиттинга* $\mathcal{F}$ группы G называют такое множество подгрупп группы G , которое замкнуто относительно взятия нормальных подгрупп, их произведений и сопряжений подгрупп. Понятие $\mathcal{F}$ -*инъектора* группы для ее множества Фиттинга $\mathcal{F}$ определяется аналогично, как и понятие $\mathfrak{F}$ -инъектора для класса Фиттинга $\mathfrak{F}$.

Справедливость указанной выше теоремы Гашюца–Фишера–Хартли из [1] была подтверждена Шеметковым [2] для множества Фиттинга конечной частично разрешимой группы (разрешимый случай см. также в [3]). В [2] было установлено, что для любого множества Фиттинга $\mathcal{F}$ конечной π -разрешимой группы G (π – множество всех простых делителей всех групп из $\mathcal{F}$) в G существует единственный класс сопряженных $\mathcal{F}$ -инъекторов.

Заметим, что если $\mathfrak{F}$ – класс Фиттинга, то множество подгрупп $\{H \leq G \mid H \in \mathfrak{F}\}$ группы G является множеством Фиттинга G . Его обозначают $\text{Tr}_{\mathfrak{F}}(G)$ и называют *следом класса Фиттинга* $\mathfrak{F}$ в группе G . Известно (см. [4; примеры VIII.2.2]), что

каждому классу Фиттинга $\mathfrak{F}$ соответствует его след в группе G , хотя обратное в общем случае неверно. Кроме того, очевидно, что множество $\mathfrak{F}$ -инъекторов для класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ и $\mathcal{F}$ -инъекторов для множества Фиттинга $\mathcal{F} = \text{Tr}_{\mathfrak{F}}(G)$ совпадают, и поэтому из указанной выше теоремы Шеметкова [2], в частности, следует теорема Гашюца–Фишера–Хартли [1].

Пусть π – произвольное непустое множество простых чисел и π' – дополнение π в множестве всех простых чисел. Основной результат настоящей работы – доказательство того, что в любой π -разрешимой группе G для каждого ее π -насыщенного множества Фиттинга $\mathcal{F}$ существуют $\mathcal{F}$ -инъекторы и любые два из них сопряжены (теорема 3.10).

В заключительном пункте работы мы обобщаем результат Шеметкова из [2] о существовании и сопряженности $\mathcal{F}$ -инъекторов, ослабляя требование π -разрешимости группы и заменяя его условием π -разрешимости ее подходящей факторгруппы. Все рассматриваемые в работе группы конечны. При необходимости определения и обозначения, которые мы не приводим, можно найти в [4]–[6].

2. Предварительные сведения. Пусть $\mathcal{X}$ – множество подгрупп группы G , $H \leq G$ и $\mathcal{X}_H = \{S \leq H : S \in \mathcal{X}\}$. Тогда если $\mathcal{X}$ – множество Фиттинга группы G , то $\mathcal{X}_H$ является, очевидно, множеством Фиттинга группы H . Символом $G_{\mathcal{X}}$ обозначим наибольшую из нормальных $\mathcal{X}$ -подгрупп группы G . Такую подгруппу называют $\mathcal{X}$ -радикалом группы G .

Мы будем использовать известное свойство $\mathcal{F}$ -радикала группы, которое представляет

ЛЕММА 2.1 (см. [4; свойство VIII.2.4(a)]). Пусть $\mathcal{F}$ – множество Фиттинга группы G и N – субнормальная подгруппа. Тогда $N_{\mathcal{F}} = G_{\mathcal{F}} \cap N$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2. Пусть $\mathcal{F}$ – множество подгрупп группы G .

(а) $\mathcal{F}$ -Подгруппу V группы G называют (см. [4; VIII.2.5(a)]) $\mathcal{F}$ -максимальной, если из $V \leq W \leq G$ и $V \in \mathcal{F}$ следует, что $V = W$.

(б) $\mathcal{F}$ -Инъектором группы G называется (см. [4; VIII.2.5(b)]) такая подгруппа V , что $V \cap K$ является $\mathcal{F}$ -максимальной подгруппой в K для любой субнормальной подгруппы K из G .

Мы будем использовать также некоторые известные утверждения об $\mathcal{F}$ -инъекторах группы для множеств Фиттинга, которые мы приведем в качестве лемм.

ЛЕММА 2.3 (см. [4; теорема VIII.2.9]). Если $\mathcal{F}$ – множество Фиттинга разрешимой группы G , то в группе G существуют $\mathcal{F}$ -инъекторы и любые два из них сопряжены.

Символом $\sigma(G)$ обозначим множество всех простых делителей порядка группы G , а $\sigma(\mathcal{F})$ – объединение множеств $\sigma(G)$ для всех групп G из ее множества Фиттинга $\mathcal{F}$.

ЛЕММА 2.4 (см. [2; теорема 2.2]). Пусть $\mathcal{F}$ – множество Фиттинга π -разрешимой группы G , где $\pi = \sigma(\mathcal{F})$. Тогда в группе G существуют $\mathcal{F}$ -инъекторы и любые два из них сопряжены.

ЛЕММА 2.5 (см. [3; свойство 2.2]). Пусть A – нормальная подгруппа группы G . Тогда выполнены следующие утверждения.

(1) Если $\mathcal{F}$ – множество Фиттинга группы G и $A \in \mathcal{F}$, то

$$\overline{\mathcal{F}} = \{S/A : A \leq S \in \mathcal{F}\}$$

– множество Фиттинга группы G/A . Более того, если V – $\mathcal{F}$ -инъектор группы G , то V/A является $\overline{\mathcal{F}}$ -инъектором группы G/A .

(2) Если $\overline{\mathcal{F}}$ – множество Фиттинга группы G/A и V/A является $\overline{\mathcal{F}}$ -инъектором группы G/A , то

$$\mathcal{F}_0 = \{S \leq G : (SA)/A \in \overline{\mathcal{F}}\}$$

– множество Фиттинга группы G и V – $\mathcal{F}_0$ -инъектор группы G .

(3) Если $\mathcal{F}$ – множество Фиттинга группы G и $V \in \mathcal{F}$ – подгруппа группы G такая, что $VA = G$ и $V \cap A$ – $\mathcal{F}$ -инъектор группы A , то V – $\mathcal{F}$ -инъектор группы G .

(4) Если V – $\mathcal{F}$ -инъектор группы G , то VA/A – $\mathcal{F}$ -инъектор группы G/A .

Напомним, что символом $F(G)$ обозначают подгруппу Фиттинга группы G – наибольшую нормальную нильпотентную подгруппу группы G , а символом $F_\pi(G)$ – наибольшую нормальную π -нильпотентную подгруппу группы G .

ЛЕММА 2.6 (см. [5; следствие 4.1.2]). Для любой π -разрешимой группы G имеет место включение

$$C_G(F_\pi(G)) \subseteq F_\pi(G).$$

Пусть $\mathbb{P}$ – множество всех простых чисел, $\pi \subseteq \mathbb{P}$ и $\pi' = \mathbb{P} \setminus \pi$. Напомним, что символом $O_{\pi'}(G)$ обозначают наибольшую нормальную π' -подгруппу группы G , а символом $O^\pi(G)$ – такую наименьшую нормальную подгруппу группы G , что факторгруппа $G/O^\pi(G)$ является π -группой.

Для доказательства основного результата, мы будем использовать также свойства холловских θ -баз.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.7. Пусть θ – некоторая конечная система попарно непересекающихся подмножеств множества простых чисел: $\theta = \{\pi_1, \pi_2, \pi_3, \dots, \pi_k\}$. Множество подгрупп

$$H_1, H_2, H_3, \dots, H_k \tag{2.1}$$

называется (см. [8]) холловской θ -базой группы G , если эти подгруппы удовлетворяют следующим условиям:

- 1) H_i , $i = 1, 2, \dots, k$, – холловская π_i -подгруппа группы G ;
- 2) подгруппы (2.1) попарно перестановочны.

ЛЕММА 2.8 (см. [8; теорема 1]). Пусть G – π -разрешимая группа, $\overline{\pi}$ – множество простых делителей порядка группы G , не принадлежащих π , множество $\theta = \{\pi_1, \pi_2, \pi_3, \dots, \pi_k\}$ есть произвольная конечная система попарно непересекающихся подмножеств $\pi_1, \pi_2, \pi_3, \dots, \pi_k$ множества простых чисел, удовлетворяющая следующему условию: либо все пересечения $\pi_i \cap \overline{\pi} = \emptyset$, $i = 1, 2, \dots, k$, либо в θ существует такое π_s , что $\overline{\pi} \subseteq \pi_s$.

Тогда группа G содержит по крайней мере одну холловскую θ -базу и любые две холловские θ -базы сопряжены между собой.

3. Инъекторы для π -насыщенных множеств Фиттинга. Настоящий пункт посвящен доказательству существования и сопряженности инъекторов для π -насыщенного множества Фиттинга π -разрешимой группы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. Множество Фиттинга $\mathcal{F}$ группы G назовем π -насыщенным, если для каждой подгруппы H из G такой, что $O^{\pi'}(H) \in \mathcal{F}$, справедливо $H \in \mathcal{F}$.

Мы будем использовать понятие строгой π -замкнутости π -подгрупп в группе и некоторые его свойства.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.2. Пусть G – группа, π – некоторое множество простых чисел и H_0 является такой π -подгруппой группы G , что $H_0 \leq H \in \text{Hall}_{\pi}(G)$. Подгруппу H_0 назовем *строго π -замкнутой подгруппой в H относительно G* , если $H_0^g \cap H \leq H_0$ для всех $g \in G$.

Заметим, что понятие строгой замкнутости (π -замкнутости для $\pi = \{p\}$) было определено в работе [7].

Докажем свойства строгой π -замкнутости подгрупп, аналогичные свойствам строгой замкнутости из работы [7], которые будем использовать в дальнейшем.

ЛЕММА 3.3. Пусть G – группа, π – некоторое множество простых чисел и H_0 является такой π -подгруппой группы G , что $H_0 \leq H \in \text{Hall}_{\pi}(G)$. Если H_0 строго π -замкнута в H относительно G , то справедливы следующие утверждения:

- 1) если $H_0 \leq H^x$ для некоторого элемента $x \in G$, то подгруппа H_0 строго π -замкнута в H^x относительно G ;
- 2) если N – нормальная подгруппа группы G , то подгруппа H_0N/N строго π -замкнута в HN/N относительно G/N ;
- 3) H_0^x строго π -замкнута в H^x относительно G .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Из условия $H_0 \leq H^x$ следует, что $H_0^{x^{-1}} \leq H$. Тогда ввиду определения строгой π -замкнутости

$$H_0^{x^{-1}} = H_0^{x^{-1}} \cap H \leq H_0.$$

Следовательно, $x \in N_G(H_0)$. Так как для любого элемента $g \in G$ справедливо

$$H_0^g \cap H^x = (H_0^{gx^{-1}} \cap H)^x \leq H_0^x = H_0,$$

то H_0 строго π -замкнута в H^x относительно G .

2) Заметим, что для любого элемента $g \in G$ существует такой элемент $x \in N$, для которого

$$H_0^g \cap HN = H_0^g \cap H^x = (H_0^{gx^{-1}} \cap H)^x \leq H_0^x \leq H_0N.$$

Отсюда следует, что H_0N/N строго π -замкнута в HN/N относительно G/N .

3) Для любого элемента $g \in G$ выполняется включение $H_0^g \cap H \leq H_0$. Но

$$(H_0^g \cap H)^x = H_0^{gx} \cap H^x \leq H_0^x.$$

Тогда ввиду произвольности выбора g H_0^x строго π -замкнута в H^x относительно G .

ЛЕММА 3.4. Пусть G – π -разрешимая группа и H_0 строго π -замкнута в $H \in \text{Hall}_\pi(G)$ относительно G . Тогда существует такая нормальная подгруппа N группы G , что $N \cap H = H_0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проведем методом индукции по порядку группы. Пусть G – группа наименьшего порядка, для которой лемма неверна и M – неединичная нормальная подгруппа группы G . Через $\bar{K}$ будем обозначать подгруппу KM/M факторгруппы $\bar{G} = G/M$. Тогда по утверждению 2 леммы 3.3 подгруппа $\bar{H}_0$ будет строго π -замкнутой в $\bar{H}$ относительно $\bar{G}$. Из того, что $|M| > 1$, следует $|\bar{G}| < |G|$. Тогда по индукции в $\bar{G}$ найдется такая нормальная подгруппа $\bar{L}$, что $\bar{L} \cap \bar{H} = \bar{H}_0$. Следовательно, в группе G найдется такая нормальная подгруппа L , что $LM \cap HM = H_0M$. Применяя тождество Дедекинда, имеем

$$LM \cap H = LM \cap HM \cap H = H_0M \cap H = H_0(M \cap H).$$

Это означает, что в G найдется такая нормальная подгруппа N , для которой выполнено $N \cap H = H_0(M \cap H)$.

Пусть $O_{\pi'}(G) \neq 1$ и $M = O_{\pi'}(G)$. Тогда

$$N \cap H = H_0(O_{\pi'}(G) \cap H).$$

Так как H является π -подгруппой, а $O_{\pi'}(G)$ – π' -подгруппой, то $O_{\pi'}(G) \cap H = 1$. Следовательно, $N \cap H = H_0$ и в этом случае лемма верна.

Предположим, что $O_\pi(G) \cap H_0 \neq 1$. Значит, можно считать, что $M = O_\pi(G) \cap H_0$. Тогда

$$N \cap H = H_0(O_\pi(G) \cap H_0 \cap H) = H_0$$

и лемма верна.

Пусть теперь $O_{\pi'}(G) = 1$ и $O_\pi(G) \cap H_0 = 1$. Тогда $H_0 \leq C_G(O_\pi(G))$. Заметим, что по лемме 2.6 справедливо включение $C_G(F_\pi(G)) \subseteq F_\pi(G)$. Так как $O_{\pi'}(G) = 1$, то $C_G(O_\pi(G)) \subseteq O_\pi(G)$. Следовательно,

$$H_0 \leq C_G(O_\pi(G)) \leq O_\pi(G), \quad H_0 = O_\pi(G) \cap H_0 \neq 1.$$

Полученное противоречие завершает доказательство леммы.

СЛЕДСТВИЕ 3.5 (см. [7]). Пусть G – π -разрешимая группа и P_0 строго замкнута в $P \in \text{Syl}_p(G)$ относительно G для некоторого простого числа p из π . Тогда в G существует такая нормальная подгруппа N , что $N \cap P = P_0$.

ЛЕММА 3.6. Пусть группа G π -разрешима, π_1 – подмножество множества π и подгруппа H_0 строго π_1 -замкнута в $H \in \text{Hall}_{\pi_1}(G)$ относительно G . Тогда справедливы следующие утверждения:

- 1) если группа L_0 строго π' -замкнута в $L \in \text{Hall}_{\pi'}(G)$ относительно G , то существуют такие элементы $s \in G$ и $t \in G$, что

$$H_0^s L_0^t = L_0^t H_0^s;$$

- 2) если π_2 – такое подмножество множества π , что либо $\pi_1 \cap \pi_2 = \emptyset$, либо $\pi_1 = \pi_2$, а подгруппа L_0 строго π_2 -замкнута в $L \in \text{Hall}_{\pi_2}(G)$ относительно G , то существуют такие элементы $s \in G$ и $t \in G$, что $H_0^s L_0^t = L_0^t H_0^s$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Пусть группа L_0 строго π' -замкнута в $L \in \text{Hall}_{\pi'}(G)$ относительно G и $\theta = \{\pi_1, \pi'\}$. Заметим, что при таком выборе множества θ по лемме 2.8 в группе G существует по крайней мере одна холловская θ -база. В силу сопряженности холловых подгрупп в группе G найдутся такие элементы $s \in G$ и $t \in G$, что H^s и L^t будут принадлежать холловской θ -базе. Значит, $H^s L^t = L^t H^s$. Тогда ввиду утверждения 3 леммы 3.3 и леммы 3.4 существуют такие нормальные подгруппы N и M из G , что $N \cap H^s = H_0^s$ и $M \cap L^t = L_0^t$. Следовательно, произведение

$$H_0^s L_0^t = (N \cap H^s)(M \cap L^t) \subseteq N L^t \cap H^s M \cap H^s L^t.$$

Так как $N \cap H^s = H_0^s$, то $H_0^s \in \text{Hall}_{\pi_1}(N)$. Тогда из $L^t \in \mathfrak{E}_{\pi'} \subseteq \mathfrak{E}_{\pi_1'}$ следует $|N L^t| = |H_0^s| \cdot l$, где $l - \pi_1'$ -число. Аналогично, $|H^s M| = |L_0^t| \cdot m$, где $m - \pi$ -число. Ввиду того, что $|N L^t \cap H^s M \cap H^s L^t|$ делит числа $|N L^t|$, $|H^s M|$ и $|H^s L^t|$, получаем

$$|N L^t \cap H^s M \cap H^s L^t| \leq |H_0^s| \cdot |L_0^t| = |H_0^s L_0^t|.$$

Следовательно, $N L^t \cap H^s M \cap H^s L^t = H_0^s L_0^t$ и $H_0^s L_0^t$ является подгруппой группы G . Этот факт завершает доказательство утверждения 1).

2) Пусть группа L_0 строго π_2 -замкнута в $L \in \text{Hall}_{\pi_2}(G)$ относительно G и $\pi_2 \subseteq \pi$. Рассмотрим два случая.

а) Случай $\pi_1 \cap \pi_2 = \emptyset$. Пусть $\theta = \{\pi_1, \pi_2\}$. Тогда по лемме 2.8 в группе G существует по крайней мере одна холловская θ -база. Как и при доказательстве утверждения 1), найдутся такие элементы $s \in G$ и $t \in G$, что H^s и L^t будут принадлежать холловской θ -базе и $H^s L^t = L^t H^s$. Далее, с учетом равенства $\pi_1 \cap \pi_2 = \emptyset$, следуя доказательству утверждения 1) настоящей леммы, нетрудно показать, что

$$N L^t \cap H^s M \cap H^s L^t = H_0^s L_0^t.$$

Значит, $H_0^s L_0^t$ является подгруппой группы G и $H_0^s L_0^t = L_0^t H_0^s$.

б) Случай $\pi_1 = \pi_2$. В силу сопряженности холловых π_1 -подгрупп в группе G найдутся такие элементы $s \in G$ и $t \in G$, что $H^s = L^t = \overline{H}$. Тогда ввиду утверждения 3 леммы 3.3 и леммы 3.4 существуют такие нормальные подгруппы N и M из G , что $N \cap \overline{H} = H_0^s$ и $M \cap \overline{H} = L_0^t$. Следовательно, по лемме 4.1 [9]

$$H_0^s L_0^t = (N \cap \overline{H})(M \cap \overline{H}) = N M \cap \overline{H}.$$

Значит, $H_0^s L_0^t$ является подгруппой группы G и $H_0^s L_0^t = L_0^t H_0^s$.

СЛЕДСТВИЕ 3.7 (см. [7]). Пусть $G - \pi$ -разрешимая группа, $p, q -$ простые числа из π и группа P_0 строго замкнута в $P \in \text{Syl}_p(G)$ относительно G , а группа Q_0 строго замкнута в $Q \in \text{Syl}_q(G)$ относительно G . Тогда существуют такие элементы $s \in G$ и $t \in G$, что

$$P_0^s Q_0^t = Q_0^t P_0^s.$$

СЛЕДСТВИЕ 3.8. Пусть G является π -разрешимой группой и $p \in \pi$. Если группа P_0 строго замкнута в $P \in \text{Syl}_p(G)$ относительно G и H_0 строго π' -замкнута в $H \in \text{Hall}_{\pi'}(G)$ по отношению к G . Тогда существуют такие элементы $s \in G$ и $t \in G$, что

$$P_0^s H_0^t = H_0^t P_0^s.$$

Ключевым свойством для доказательства основного результата работы является

ЛЕММА 3.9. Пусть G – π -разрешимая группа и $\mathcal{F}$ – π -насыщенное множество Фиттинга группы G . Пусть N – такая подгруппа группы G , что G/N является либо π' -группой либо нильпотентной π -группой. Если W – $\mathcal{F}$ -максимальная подгруппа группы N и V_1, V_2 – такие $\mathcal{F}$ -максимальные подгруппы G , что $W \leq V_1 \cap V_2$, то подгруппы V_1 и V_2 сопряжены в G .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть G – группа наименьшего порядка, для которой лемма неверна. Заметим, что $W = V_1 \cap N = V_2 \cap N$ и $V_i \leq N_G(W)$ для $i \in \{1, 2\}$. Легко видеть, что для группы $N_G(W)$ выполняются условия леммы. Если $N_G(W) < G$, то для $N_G(W)$ лемма верна по индукции. В этом случае очевидно, что лемма верна и для группы G . Таким образом, мы можем предположить $N_G(W) = G$, т.е. $W \trianglelefteq G$. Значит,

$$V_i/W = V_i/V_i \cap N \cong V_i N/N \leq G/N \quad \text{для } i \in \{1, 2\}.$$

Рассмотрим два случая.

Случай 1: G/N является π' -группой. В данном случае V_i/W является π' -группой. Следовательно, в факторгруппе G/W существуют такие холловы π' -подгруппы H_i/W , что $V_i/W \leq H_i/W$. Из того, что H_i/W являются π' -подгруппами и $W \trianglelefteq G$, следует, что $O^{\pi'}(H_i) \trianglelefteq W$. Значит, $O^{\pi'}(H_i) \in \mathcal{F}$. Так как $\mathcal{F}$ является π -насыщенным множеством Фиттинга группы G , то $H_i \in \mathcal{F}$. Тогда в силу $\mathcal{F}$ -максимальности V_i можно заключить, что $V_i = H_i$, и сопряженность V_1 и V_2 следует из сопряженности холловых π' -подгрупп.

Случай 2: G/N является нильпотентной π -группой. В этом случае из $\mathcal{F}$ -максимальности W в N и π -насыщенности $\mathcal{F}$ следует, что N/W также является π -группой. Следовательно, ввиду изоморфизма

$$G/N \cong G/W/N/W$$

получаем, что G/W является разрешимой π -группой, и доказательство в точности аналогично доказательству леммы VIII.2.8 из [4].

Основной результат работы – следующая

ТЕОРЕМА 3.10. Пусть G – π -разрешимая группа и $\mathcal{F}$ – π -насыщенное множество Фиттинга G . Тогда в группе G существуют $\mathcal{F}$ -инъекторы и любые два из них сопряжены.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем теорему методом индукции по порядку группы для всех пар $(G, \mathcal{F})$, удовлетворяющих условиям теоремы. Пусть G – контрпример минимального порядка и M – максимальная нормальная подгруппа G . Так как группа G π -разрешима, то факторгруппа G/M является либо π' -группой, либо элементарной абелевой p -группой для некоторого простого $p \in \pi$. Рассмотрим два следующих случая.

Случай 1: G/M является π' -группой для каждой максимальной нормальной подгруппы M из G . По предположению индукции в M существуют $\mathcal{F}$ -инъекторы. Пусть V_1 – $\mathcal{F}$ -инъектор группы M и $\bar{V}_1$ – такая $\mathcal{F}$ -максимальная подгруппа группы G , что $V_1 \leq \bar{V}_1$. Покажем, что $\bar{V}_1 \cap N$ является $\mathcal{F}$ -инъектором группы N для любой максимальной нормальной подгруппы N группы G .

По индукции в группе N существуют $\mathcal{F}$ -инъекторы и любые два из них сопряжены. Пусть V_2 – $\mathcal{F}$ -инъектор группы N и $\bar{V}_2$ – такая максимальная $\mathcal{F}$ -подгруппа группы G , что $V_2 \leq \bar{V}_2$. Из сопряженности инъекторов в M и N , а также в $M \cap N$, следует, что

$$W = V_1 \cap M \cap N = V_2 \cap M \cap N.$$

Тогда $W \leq \bar{V}_1 \cap \bar{V}_2$. Так как в данном случае $G/M \cap N$ является π' -группой, то по лемме 3.9 существует такой элемент $x \in G$, что $\bar{V}_1^x = \bar{V}_2$. Следовательно,

$$(\bar{V}_1 \cap N)^x = \bar{V}_1^x \cap N = \bar{V}_2 \cap N = V_2.$$

Теперь из сопряженности $\mathcal{F}$ -инъекторов в N получаем, что $\bar{V}_1 \cap N$ является $\mathcal{F}$ -инъектором группы N для любой максимальной нормальной подгруппы N группы G . Следовательно, подгруппа $\bar{V}_1$ является $\mathcal{F}$ -инъектором группы G , и существование $\mathcal{F}$ -инъекторов в G доказано.

Докажем теперь сопряженность $\mathcal{F}$ -инъекторов группы G . Пусть V_1 и V_2 – $\mathcal{F}$ -инъекторы G . Тогда подгруппы $V_1 \cap M$ и $V_2 \cap M$ являются $\mathcal{F}$ -инъекторами группы M . Следовательно, по индукции существует такой элемент x из группы M , что

$$(V_1 \cap M)^x = V_1^x \cap M = V_2 \cap M.$$

Пусть

$$W = V_1^x \cap M = V_2 \cap M.$$

Тогда, V_1^x и V_2 – $\mathcal{F}$ -максимальные подгруппы G , содержащие W . Кроме того, подгруппа W – $\mathcal{F}$ -инъектор группы M . Следовательно, V_1^x и V_2 сопряжены в G , и теорема в случае 1 доказана.

Случай 2. Существует такая максимальная нормальная подгруппа M из G , что G/M является p -группой для некоторого числа $p \in \pi$. В этом случае $O^p(G) < G$. Если $O^p(G) = 1$, то группа G разрешима и теорема верна ввиду леммы 2.3. Пусть $O^p(G) \neq 1$. Тогда по индукции в группе $O^p(G)$ существуют $\mathcal{F}$ -инъекторы и любые два из них сопряжены. Если подгруппа S является $\mathcal{F}$ -инъектором группы $O^p(G)$, то для $g \in G$ подгруппа S^g – $\mathcal{F}$ -инъектор группы $O^p(G)$. Применяя снова индукцию, получаем, что $S^g = S^h$ для некоторого элемента $h \in O^p(G)$. По лемме Фраттини $G = N_G(S)O^p(G)$. Следовательно, если P является силовской p -подгруппой $N_G(S)$, то $G = PO^p(G)$.

Пусть R – подгруппа, порожденная $\mathcal{F}$ -подгруппами группы PS , содержащими S . Так как любая такая подгруппа является субнормальной в PS , то $R \in \mathcal{F}$.

Пусть T является такой $\mathcal{F}$ -подгруппой группы G , что S содержится в T . Заметим, что $T \cap O^p(G)$ является $\mathcal{F}$ -подгруппой. Из $\mathcal{F}$ -максимальности S в $O^p(G)$ следует $S = T \cap O^p(G)$. Следовательно, $T \leq N_G(S)$. Итак, любая силовская p -подгруппа группы T сопряжена в $N_G(S)$ с подгруппой P . Так как факторгруппа

$$T/S = T/T \cap O^p(G) \cong TO^p(G)/O^p(G)$$

является p -группой, то T сопряжена с подгруппой вида P_0S в $N_G(S)$, для некоторой подгруппы P_0 из P . Следовательно, все расширения S из $\mathcal{F}$ сопряжены в $N_G(S)$ с подгруппами группы R . В частности, если в G существуют $\mathcal{F}$ -инъекторы, то они сопряжены с R .

Итак, для завершения доказательства теоремы осталось показать, что R является $\mathcal{F}$ -инъектором группы G . Так как подгруппа R $\mathcal{F}$ -максимальна в G , то достаточно выяснить, что R содержит $\mathcal{F}$ -инъектор подгруппы L для любой максимальной нормальной подгруппы L в G .

Так как группа G π -разрешима, то либо $|G : L| = q$ для некоторого простого числа $q \in \pi$, либо $|G : L|$ является π' -числом.

Пусть T – $\mathcal{F}$ -инъектор группы L . Подгруппы

$$T \cap L \cap O^p(G) = T \cap O^p(G) \quad \text{и} \quad S \cap L \cap O^p(G) = S \cap L$$

являются $\mathcal{F}$ -инъекторами нормальной подгруппы $L \cap O^p(G)$. Следовательно, они сопряжены в $L \cap O^p(G)$. Выберем группу T таким образом, что

$$T \cap O^p(G) = L \cap S = U.$$

Рассмотрим отдельно следующие две возможности.

Случай 2.1. Индекс $|G : L|$ является π' -числом. Пусть $P_1 \in \text{Syl}_p(T)$, и пусть $H_1 \in \text{Hall}_{\pi'}(S)$. Заметим, что группа

$$T/U = T/T \cap O^p(G) \cong TO^p(G)/O^p(G)$$

является p -группой, а группа

$$S/U = S/S \cap L \cong SL/L$$

является π' -группой. Следовательно, $T = P_1U$ и $S = H_1U$. Так как S и T подгруппы $N_G(U)$, то существуют такая силовская подгруппа P и холлова π' -подгруппа H группы $N_G(U)$, что $P_1 \leq P$ и $H_1 \leq H$. Если $g \in N_G(U)$, то

$$(H_1^g \cap H)U \leq S^g \in \mathcal{F}.$$

Так как HU/U является π' -группой, то $\langle H_1^g \cap H, H_1 \rangle U/U$ также является π' -группой. Теперь из π -насыщенности множества Фиттинга и $U \trianglelefteq HU$ следует, что группа $\langle H_1^g \cap H, H_1 \rangle U$ является $\mathcal{F}$ -подгруппой HU . Значит,

$$S \leq \langle H_1^g \cap H, H_1 \rangle U \leq \langle S^g, S \rangle \leq O^p(G).$$

Из $\mathcal{F}$ -максимальности S в $O^p(G)$ получаем $H_1^g \cap H \leq H_1$. Таким образом, H_1 строго π' -замкнута в H относительно $N_G(U)$. Легко видеть, что $(P_1^g \cap P)U$ и $T = P_1U$ являются субнормальными подгруппами группы PU , и поэтому $\langle P_1^g \cap P, P_1 \rangle U$ является $\mathcal{F}$ -подгруппой PU . Тогда

$$T \leq \langle P_1^g \cap P, P_1 \rangle U \leq \langle T^g, T \rangle \leq L$$

и ввиду $\mathcal{F}$ -максимальности T в L имеем $P_1^g \cap P \leq P_1$. Таким образом, P_1 строго замкнута в P относительно $N_G(U)$. Отсюда по следствию 3.8 заключаем, что существует такой элемент $g \in N_G(U)$, для которого произведение $P_1^g H_1$ является подгруппой группы $N_G(U)$.

Пусть подгруппа

$$K = P_1^g H_1 U = (P_1 U)^g (H_1 U) = T^g S.$$

Тогда

$$K \cap O^p(G) = T^g S \cap O^p(G) = (T^g \cap O^p(G))S = (T \cap O^p(G))^g S = U^g S = US = S$$

и, аналогично, $K \cap L = T^g$. Следовательно, S и T^g являются нормальными $\mathcal{F}$ -подгруппами группы K и поэтому $K \in \mathcal{F}$. Так как S содержится в K , то R содержит подгруппу, сопряженную с K . Следовательно, R содержит $\mathcal{F}$ -инъектор подгруппы L , и теорема в случае 2.1) доказана.

Остается рассмотреть

Случай 2.2. Индекс $|G : L| = q$ для некоторого простого числа $q \in \pi$. Пусть $P_1 \in \text{Syl}_p(T)$ и $Q_1 \in \text{Syl}_q(S)$. Заметим, что группа

$$T/U = T/T \cap O^p(G) \cong TO^p(G)/O^p(G)$$

является p -группой, а группа

$$S/U = S/S \cap L \cong SL/L$$

является q -группой. Тогда $T = P_1 U$ и $S = Q_1 U$. Так как S и T подгруппы $N_G(U)$, то существуют такие силовские подгруппы P и Q группы $N_G(U)$, что $P_1 \leq P$ и $Q_1 \leq Q$. Если $g \in N_G(U)$, то

$$(P_1^g \cap P)U \leq T^g \in \mathcal{F}.$$

Как и в случае 2.1, P_1 строго замкнута в P относительно $N_G(U)$ и Q_1 строго замкнута в Q относительно $N_G(U)$. По следствию 3.7 существует такой элемент $g \in N_G(U)$, что произведение $P_1^g Q_1$ является подгруппой группы $N_G(U)$.

Пусть подгруппа

$$K_2 = P_1^g Q_1 U = (P_1 U)^g (Q_1 U) = T^g S.$$

Тогда

$$K_2 \cap O^p(G) = T^g S \cap O^p(G) = (T^g \cap O^p(G))S = (T \cap O^p(G))^g S = U^g S = US = S.$$

Аналогично, можно показать, что $K_2 \cap L = T^g$. Следовательно, S и T^g являются нормальными $\mathcal{F}$ -подгруппами группы K_2 и $K_2 \in \mathcal{F}$. Так как S содержится в K_2 , то R содержит подгруппу, сопряженную с K_2 . Следовательно, R содержит $\mathcal{F}$ -инъектор подгруппы L .

Следуя определению 3.1 класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ будем называть π -насыщенным, если $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}\mathfrak{E}_{\pi'}$.

СЛЕДСТВИЕ 3.11. Пусть G – π -разрешимая группа и $\mathfrak{F}$ – π -насыщенный класс Фиттинга группы G . Тогда в группе G существуют $\mathfrak{F}$ -инъекторы и любые два из них сопряжены.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть

$$\mathcal{F} = \text{Tr}_{\mathfrak{F}}(G) = \{H \leq G : H \in \mathfrak{F}\}.$$

Тогда $\mathcal{F}$ – π -насыщенное множество Фиттинга, причем множества $\mathcal{F}$ -инъекторов и $\mathfrak{F}$ -инъекторов группы G совпадают. Теперь существование и сопряженность $\mathfrak{F}$ -инъекторов G вытекает непосредственно из теоремы 3.10.

Группу G называют (см. [5; с. 251]) π -замкнутой, если она имеет нормальную холлову π -подгруппу, и π -специальной, если она имеет нормальную нильпотентную холлову π -подгруппу. Легко видеть, что класс всех π -замкнутых и класс всех π -специальных групп являются π -насыщенными классами Фиттинга. Поэтому справедливы

СЛЕДСТВИЕ 3.12. *В любой π -разрешимой группе существует единственный класс сопряженных π -замкнутых инвекторов.*

СЛЕДСТВИЕ 3.13. *В любой π -разрешимой группе существуют π -специальные инвекторы и любые два из них сопряжены.*

СЛЕДСТВИЕ 3.14 (см. [7; теорема 3]). *Если $\mathcal{F}$ – множество Фиттинга разрешимой группы G , то в G существуют $\mathcal{F}$ -инвекторы и любые два из них сопряжены.*

СЛЕДСТВИЕ 3.15 (см. [1; теорема 1]). *Если $\mathfrak{F}$ – класс Фиттинга и группа G разрешима, то в G существуют $\mathfrak{F}$ -инвекторы и любые два из них сопряжены.*

4. Инвекторы групп с π -разрешимой факторгруппой. В этом пункте работы мы расширяем известные результаты Шеметкова [2] и Баллестера-Болинше [6; теорема 2.4.27] о существовании и сопряженности $\mathcal{F}$ -инвекторов группы G в предположении о том, что π -разрешима не сама группа G , а только ее факторгруппа по $\mathcal{F}$ -радикалу.

ТЕОРЕМА 4.1. *Пусть $\mathcal{F}$ – множество Фиттинга группы G и $G/G_{\mathcal{F}}$ является π -разрешимой группой, где $\pi = \sigma(\mathcal{F})$. Тогда в группе G существуют $\mathcal{F}$ -инвекторы и любые два из них сопряжены.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 2.5 множество

$$\mathcal{F}^* = \{H/G_{\mathcal{F}} : H \in \mathcal{F} \wedge G_{\mathcal{F}} \leq H\}$$

является множеством Фиттинга группы $G/G_{\mathcal{F}}$, а

$$\mathcal{F}_0 = \{S \leq G : SG_{\mathcal{F}}/G_{\mathcal{F}} \in \mathcal{F}^* \wedge S \trianglelefteq SG_{\mathcal{F}}\}$$

является множеством Фиттинга группы G .

Покажем вначале, что для любой субнормальной подгруппы K из G справедливо равенство $K_{\mathcal{F}} = K_{\mathcal{F}_0}$. Очевидно, $\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}$ и $K_{\mathcal{F}_0} \leq K_{\mathcal{F}}$. Так как $K_{\mathcal{F}}G_{\mathcal{F}} \in \mathcal{F}$ и $K_{\mathcal{F}}G_{\mathcal{F}}/G_{\mathcal{F}} \in \mathcal{F}^*$, то $K_{\mathcal{F}} \in \mathcal{F}_0$ и $K_{\mathcal{F}} \leq K_{\mathcal{F}_0}$. Значит, $K_{\mathcal{F}} = K_{\mathcal{F}_0}$.

Заметим, что $\sigma(\mathcal{F}^*) \subseteq \sigma(\mathcal{F})$ и $G/G_{\mathcal{F}}$ является π -разрешимой группой для $\pi = \sigma(\mathcal{F}^*)$. Теперь, применяя лемму 2.4, имеем, что в π -разрешимой группе $G/G_{\mathcal{F}}$ существует $\mathcal{F}^*$ -инвектор $V/G_{\mathcal{F}}$. Следовательно, по лемме 2.5 V является $\mathcal{F}_0$ -инвектором группы G . Докажем, что V – $\mathcal{F}$ -инвектор группы G . Для этого нам достаточно выяснить, что для любой субнормальной подгруппы K из G подгруппа $K \cap V$ является $\mathcal{F}$ -максимальной в K . Пусть существует такая подгруппа $W \in \mathcal{F}$, что $K \cap V \leq W \leq K$. Тогда

$$(K \cap V)G_{\mathcal{F}}/G_{\mathcal{F}} = (V/G_{\mathcal{F}}) \cap (KG_{\mathcal{F}}/G_{\mathcal{F}}) \leq WG_{\mathcal{F}}/G_{\mathcal{F}} \leq KG_{\mathcal{F}}/G_{\mathcal{F}}.$$

Заметим, что $K \cap V$ является $\mathcal{F}_0$ -инвектором группы K . Значит,

$$K_{\mathcal{F}} = K_{\mathcal{F}_0} \leq V \cap K \leq W$$

и поэтому $K_{\mathcal{F}} \leq W$. Теперь ввиду леммы 2.1 $K_{\mathcal{F}} = K \cap G_{\mathcal{F}}$ и, значит,

$$WG_{\mathcal{F}} \cap K = W(G_{\mathcal{F}} \cap K) = WK_{\mathcal{F}} = W.$$

Следовательно, W субнормальна в $WG_{\mathcal{F}}$ и $WG_{\mathcal{F}} \in \mathcal{F}$, т.е. $WG_{\mathcal{F}}/G_{\mathcal{F}} \in \mathcal{F}^*$. Ввиду $\mathcal{F}$ -максимальности $(V/G_{\mathcal{F}}) \cap (KG_{\mathcal{F}}/G_{\mathcal{F}})$ в $KG_{\mathcal{F}}/G_{\mathcal{F}}$ справедливо равенство

$$(K \cap V)G_{\mathcal{F}} = WG_{\mathcal{F}}.$$

Следовательно,

$$K \cap V = (K \cap V)(G_{\mathcal{F}} \cap K) = (K \cap V)G_{\mathcal{F}} \cap K = WG_{\mathcal{F}} \cap K = W$$

и V является $\mathcal{F}$ -инъектором группы G .

Докажем сопряженность инъекторов в G . Пусть V — $\mathcal{F}$ -инъектор группы G . Тогда по утверждению 1 леммы 2.5 $V/G_{\mathcal{F}}$ является $\mathcal{F}^*$ -инъектором группы $G/G_{\mathcal{F}}$. Но по лемме 2.4 $\mathcal{F}^*$ -инъекторы группы $G/G_{\mathcal{F}}$ сопряжены, и поэтому $\mathcal{F}$ -инъекторы группы G также сопряжены.

СЛЕДСТВИЕ 4.2 (см. [2; теорема 2.2]). Пусть $\mathcal{F}$ — множество Фиттинга π -разрешимой группы G , где $\pi = \sigma(\mathcal{F})$. Тогда в группе G существуют $\mathcal{F}$ -инъекторы и любые два из них сопряжены.

СЛЕДСТВИЕ 4.3 (см. [6; теорема 2.4.27]). Пусть $\mathcal{F}$ — множество Фиттинга группы G и $G/G_{\mathcal{F}}$ является разрешимой группой. Тогда в группе G существуют $\mathcal{F}$ -инъекторы и любые два из них сопряжены.

СЛЕДСТВИЕ 4.4 (см. [10]). Пусть $\mathfrak{F}$ — класс Фиттинга и $G/G_{\mathfrak{F}}$ — π -разрешимая группа, где $\pi = \sigma(\mathfrak{F})$. Тогда в группе G существуют $\mathfrak{F}$ -инъекторы и любые два из них сопряжены.

СЛЕДСТВИЕ 4.5 (см. [11]). Пусть $\mathfrak{F}$ — класс Фиттинга и $G/G_{\mathfrak{F}}$ — разрешимая группа. Тогда в группе G существуют $\mathfrak{F}$ -инъекторы и любые два из них сопряжены.

В заключение отметим, что представляет интерес задача нахождения характеристик $\mathcal{F}$ -инъекторов для множества Фиттинга $\mathcal{F}$ группы посредством радикалов и холловских подгрупп, аналогичных характеристикам $\mathfrak{F}$ -инъекторов для классов Фиттинга $\mathfrak{F}$, полученных в работах [12], [13].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] B. Fischer, W. Gaschütz, B. Hartley, “Injektoren endlicher auflösbarer Gruppen”, *Math. Z.*, **102**:5 (1967), 337–339.
- [2] Л. А. Шеметков, “О подгруппах π -разрешимых групп”, *Конечные группы*, Наука и техника, Минск, 1975, 207–212.
- [3] W. Anderson, “Injectors in finite solvable groups”, *J. Algebra*, **36**:3 (1975), 333–338.
- [4] K. Doerk, T. Hawkes, *Finite Soluble Groups*, de Gruyter Exp. Math., **4**, Walter de Gruyter, Berlin, 1992.
- [5] Л. А. Шеметков, *Формации конечных групп*, Современная алгебра, Наука, М., 1978.
- [6] A. Ballester-Bolínches, L. M. Ezquerro, *Classes of Finite Groups*, Math. Appl. (Springer), **584**, Springer, Dordrecht, 2006.

- [7] I. Hawthorn, “The existence and uniqueness of injectors for fitting sets of solvable groups”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **126**:8 (1998), 2229–2230.
- [8] П. А. Гольберг, “Холловские θ -базы конечных групп”, *Изв. вузов. Матем.*, 1961, № 1, 36–43.
- [9] С. Н. Воробьёв, Е. Н. Залеская, “Об аналоге гипотезы Шеметкова для классов Фипера конечных групп”, *Сиб. матем. журн.*, **54**:5 (2013), 989–999.
- [10] W. Guo, “Injector of finite groups”, *Chinese Ann. Math. Ser. A*, **18**:2 (1997), 145–148.
- [11] В. Г. Сементовский, “Инъекторы конечных групп”, *Исследование нормального и подгруппового строения конечных групп*, Наука и техника, Минск, 1984, 166–170.
- [12] W. Guo, N. T. Vorob'ev, “On injectors of finite soluble groups”, *Comm. Algebra*, **36**:9 (2008), 3200–3208.
- [13] Y. Liu, W. Guo, N. T. Vorob'ev, “Description of $\mathfrak{F}$ -injectors of Finite Soluble Groups”, *Math. Sci. Res. J.*, **12**:1 (2008), 17–22.

Н. Т. Воробьёв

Витебский государственный университет
им. П. М. Машерова, Беларусь
E-mail: vorobyovnt@tut.by

Поступило

29.07.2013

Исправленный вариант

23.04.2014

М. Г. Семёнов

Витебский государственный университет
им. П. М. Машерова, Беларусь
E-mail: mg-semenow@mail.ru