Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. Н. Бирюков, Явная формула для вычисления энтропии кос в группе B_3 , *Матем. заметки*, 2015, том 97, выпуск 4, 629–631

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10646>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.81.55.215

26 апреля 2023 г., 07:27:58

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

Явная формула для вычисления энтропии кос в группе B_3

О. Н. Бирюков

Рассматривается классическая группа кос Артина [1] из трех нитей

$$B_3 = \langle \sigma_1, \sigma_2 \mid \sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 = \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2 \rangle$$

и ее гомоморфизм [2] в группу классов отображений (гомеотопий) компактной ориентированной двумерной поверхности M рода нуль с 4 компонентами края

$$\varphi: B_3 \rightarrow \text{Homeot}(M).$$

Поверхность M является гиперболической, а гомеотопии любой гиперболической поверхности в соответствии с классификацией Нильсена–Тёрстона [3] делятся на три типа: периодические, псевдоаносовские и приводимые. Соответственно различают аналогичные типы кос.

Тип косы из трех нитей можно определить, используя так называемое гомологическое представление группы кос:

$$\psi: B_3 \rightarrow \text{SL}_2(\mathbb{Z}), \quad \sigma_1 \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1)$$

ТЕОРЕМА 1 [4]. Для периодической косы β из трех нитей след матрицы $\psi(\beta)$ по абсолютной величине меньше 2, для приводимой косы – равен 2, для псевдоаносовской косы – больше 2.

Энтропией косы β называется точная нижняя грань топологической энтропии гомоморфизмов в классе $\varphi(\beta)$. Известно (см. [2], [4], [5]), что энтропия периодических и приводимых кос из трех нитей равна нулю, а энтропия псевдоаносовской косы $\beta \in B_3$ может быть вычислена через след матрицы $\psi(\beta)$:

$$h(\beta) = \log \frac{|\text{tr } \psi(\beta)| + \sqrt{\text{tr}^2 \psi(\beta) - 4}}{2}. \quad (2)$$

Для $n \in \mathbb{N}$ обозначим через $\mathcal{F}_n$ семейство двоичных функций $f: \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{0; 1\}$, у которых прообраз единицы непустой и в упорядоченном, дважды повторяющемся наборе ее значений $f(1), f(2), \dots, f(n), f(1), f(2), \dots, f(n)$ между любыми двумя единицами расположено четное число нулей.

ПРИМЕР 1. При $n \geq 3$ функция $f: \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{0; 1\}$ такая, что $f(1) = f(2) = 1$ и $f(x) = 0$ для всех $x > 2$, принадлежит семейству $\mathcal{F}_n$, если n – четное, и не принадлежит семейству $\mathcal{F}_n$, если n – нечетное.

Обозначим через $P_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$ многочлен следующего вида:

$$P_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{f \in \mathcal{F}_n} x_1^{f(1)} x_2^{f(2)} \dots x_n^{f(n)}. \quad (3)$$

Для $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ многочлен P_n выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} P_1(x_1) &= x_1, \\ P_2(x_1, x_2) &= x_1 x_2, \\ P_3(x_1, x_2, x_3) &= x_1 + x_2 + x_3 + x_1 x_2 x_3, \\ P_4(x_1, x_2, x_3, x_4) &= x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_4 + x_1 x_4 + x_1 x_2 x_3 x_4, \\ P_5(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) &= x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_5 + x_1 x_4 x_5 \\ &\quad + x_3 x_4 x_5 + x_2 x_3 x_4 + x_1 x_2 x_3 x_4 x_5, \\ P_6(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) &= x_1 x_2 + x_1 x_4 + x_1 x_6 + x_2 x_3 + x_2 x_5 + x_3 x_4 + x_3 x_6 + x_4 x_5 \\ &\quad + x_5 x_6 + x_1 x_2 x_3 x_4 + x_2 x_3 x_4 x_5 + x_3 x_4 x_5 x_6 + x_1 x_4 x_5 x_6 \\ &\quad + x_1 x_2 x_5 x_6 + x_1 x_2 x_3 x_6 + x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6. \end{aligned}$$

Разобьем семейство $\mathcal{F}_n$ на два подсемейства: $\mathcal{F}_n^{\text{odd}}$ и $\mathcal{F}_n^{\text{even}}$. К подсемейству $\mathcal{F}_n^{\text{odd}}$ отнесем те функции, у которых минимальный элемент полного прообраза единицы нечетный, а к подсемейству $\mathcal{F}_n^{\text{even}}$ – все остальные функции из $\mathcal{F}_n$. Определим многочлены P_n^{odd} и P_n^{even} :

$$\begin{aligned} P_n^{\text{odd}}(x_1, x_2, \dots, x_n) &= \sum_{f \in \mathcal{F}_n^{\text{odd}}} x_1^{f(1)} x_2^{f(2)} \dots x_n^{f(n)}, \\ P_n^{\text{even}}(x_1, x_2, \dots, x_n) &= \sum_{f \in \mathcal{F}_n^{\text{even}}} x_1^{f(1)} x_2^{f(2)} \dots x_n^{f(n)}. \end{aligned}$$

Ясно, что для любого $n \in \mathbb{N}$ имеет место равенство

$$P_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = P_n^{\text{odd}}(x_1, x_2, \dots, x_n) + P_n^{\text{even}}(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Для $n = 1, 2, 3, 4$ многочлены P_n^{odd} и P_n^{even} выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned} P_1^{\text{odd}}(x_1) &= x_1, & P_1^{\text{even}}(x_1) &= 0, \\ P_2^{\text{odd}}(x_1, x_2) &= x_1 x_2, & P_2^{\text{even}}(x_1, x_2) &= 0, \\ P_3^{\text{odd}}(x_1, x_2, x_3) &= x_1 + x_3 + x_1 x_2 x_3, & P_3^{\text{even}}(x_1, x_2, x_3) &= x_2, \\ P_4^{\text{odd}}(x_1, x_2, x_3, x_4) &= x_1 x_2 + x_3 x_4 + x_1 x_4 + x_1 x_2 x_3 x_4, & P_4^{\text{even}}(x_1, x_2, x_3, x_4) &= x_2 x_3. \end{aligned}$$

ЛЕММА. Для любого $n \in \mathbb{N}$ имеют место следующие рекуррентные соотношения (для краткости вместо $P_n(x_1, \dots, x_n)$ будем писать просто P_n):

$$\begin{aligned} P_{2n+2}^{\text{odd}} &= P_{2n}^{\text{odd}} \cdot (1 + x_{2n+1} x_{2n+2}) + x_{2n+1} x_{2n+2} + P_{2n-1}^{\text{odd}} \cdot x_{2n+2}, \\ P_{2n+1}^{\text{odd}} &= P_{2n}^{\text{odd}} \cdot x_{2n+1} + x_{2n+1} + P_{2n-1}^{\text{odd}}, \\ P_{2n+3}^{\text{even}} &= P_{2n+1}^{\text{even}} \cdot (1 + x_{2n+1} x_{2n+2}) + x_{2n+2} + P_{2n}^{\text{even}} \cdot x_{2n+2}, \\ P_{2n+2}^{\text{even}} &= P_{2n+1}^{\text{even}} \cdot x_{2n+1} + P_{2n}^{\text{even}}. \end{aligned}$$

ТЕОРЕМА 2. Для косы из трех нитей вида $\beta = \sigma_1^{k_1} \sigma_2^{-m_1} \sigma_1^{k_2} \sigma_2^{-m_2} \dots \sigma_1^{k_s} \sigma_2^{-m_s}$ след матрицы ее гомологического представления (1) может быть вычислен по формуле

$$\text{tr } \psi(\beta) = 2 + P_{2s}(k_1, m_1, k_2, m_2, \dots, k_s, m_s),$$

где $P_{2s}(k_1, m_1, k_2, m_2, \dots, k_s, m_s)$ – многочлен вида (3).

Доказательство. Рассмотрим косу из трех нитей

$$\beta_n = \sigma_1^{k_1} \sigma_2^{-m_1} \sigma_1^{k_2} \sigma_2^{-m_2} \dots \sigma_1^{k_n} \sigma_2^{-m_n}.$$

Введем обозначения для элементов матрицы $\psi(\beta_n)$:

$$\psi(\beta_n) = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}.$$

Тогда прямыми вычислениями получаются следующие соотношения:

$$\begin{aligned} a_1 &= 1 + k_1 m_1, & b_1 &= k_1, & c_1 &= m_1, & d_1 &= 1, \\ a_{n+1} &= a_n + a_n k_{n+1} m_{n+1} + b_n m_{n+1}, & b_{n+1} &= a_n k_{n+1} + b_n, \\ c_{n+1} &= c_n + c_n k_{n+1} m_{n+1} + d_n m_{n+1}, & d_{n+1} &= c_n k_{n+1} + d_n. \end{aligned}$$

Отсюда, применяя лемму, имеем

$$\begin{aligned} a_n &= 1 + P_{2n}^{\text{odd}}(k_1, m_1, k_2, m_2, \dots, k_n, m_n), \\ b_n &= P_{2n-1}^{\text{odd}}(k_1, m_1, k_2, m_2, \dots, k_{n-1}, m_{n-1}, k_n), \\ c_n &= P_{2n+1}^{\text{even}}(k_1, m_1, k_2, m_2, \dots, k_n, m_n, k_{n+1}), \\ d_n &= 1 + P_{2n}^{\text{even}}(k_1, m_1, k_2, m_2, \dots, k_n, m_n). \end{aligned}$$

И так как $\text{tr } \psi(\beta_n) = a_n + d_n$, теорема 2 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Объединение теорем 1 и 2 дает эффективный способ определения типа косы по классификации Нильсена–Тёрстона в случае трех нитей за время порядка $O(l)$, где l есть длина задающего косу входного слова в образующих σ_i .

ТЕОРЕМА 3. Энтропия псевдоаносовской косы β из трех нитей вида

$$\beta = \sigma_1^{k_1} \sigma_2^{-m_1} \sigma_1^{k_2} \sigma_2^{-m_2} \dots \sigma_1^{k_s} \sigma_2^{-m_s}$$

может быть вычислена по формуле

$$h(\beta) = \log \frac{|2 + P| + \sqrt{(2 + P)^2 - 4}}{2},$$

где $P = P_{2s}(k_1, m_1, k_2, m_2, \dots, k_s, m_s)$ – многочлен вида (3).

Доказательство является прямым следствием теоремы 2 и формулы (2).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] В. В. Прасолов, А. Б. Сосинский, *Узлы, зацепления, косы и трехмерные многообразия*, МЦНМО, М., 1997. [2] D. Bernardete, Z. Nitecki, M. Gutiérrez, *J. Knot Theory Ramifications*, 4:4 (1995), 549–618. [3] Э. Кэссон, С. Блейлер, *Теория автоморфизмов поверхностей по Нильсену и Тёрстону*, Библиотека студента-математика, 5, ФАЗИС, М., 1998. [4] J. E. Andersen, G. Masbaum, K. Ueno, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 141:3 (2006), 477–488. [5] *Travaux de Thurston sur les surfaces*, Séminaire Orsay, Astérisque, 66–67, Soc. Math. France, Paris, 1979.

О. Н. Бирюков

Московский государственный областной
социально-гуманитарный институт, г. Коломна
E-mail: oleg_biryukov@mail.ru

Поступило

01.09.2014