Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Мелешкина, О коэффициентах Фурье характеристических функций интервалов по полной ортонормированной системе, ограниченной в $L^p([0, 1])$, $2 < p < \infty$, *Матем. заметки*, 2015, том 97, выпуск 4, 632–635

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10647>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.208.226.222

26 апреля 2023 г., 16:47:07

О коэффициентах Фурье характеристических функций интервалов по полной ортонормированной системе, ограниченной в $L^p([0, 1])$, $2 < p < \infty$

А. В. Мелешкина

1. Постановка задачи и основной результат. Пусть

$$\mathbb{X} = \{\chi_t\}_{t \in (0, 1]} \quad (1.1)$$

– семейство характеристических функций интервалов

$$\chi_t(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } 0 \leq x \leq t, \\ 0, & \text{если } t < x \leq 1. \end{cases}$$

В этой работе изучаются свойства коэффициентов Фурье функций класса (1.1) по полным в $L^2([0, 1])$ ортонормированным системам функций

$$\Phi = \{\phi_j\}_{j=1}^{\infty}, \quad (1.2)$$

равномерно ограниченным в $L^p([0, 1])$, $2 < p < \infty$:

$$\exists M > 0 \quad \forall j \in \mathbb{N} \quad \|\phi_j\|_{L^p([0, 1])} \leq M. \quad (1.3)$$

Установлена следующая

ТЕОРЕМА. Для любой системы (1.2) с условием (1.3) существует $\chi \in \mathbb{X}$ в классе (1.1) такая, что

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\langle \chi, \phi_j \rangle|^{(p-2)/(p-1)} = \infty, \quad (1.4)$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – скалярное произведение в $L^2([0, 1])$.

Отметим, что ранее свойства коэффициентов Фурье функций из класса (1.1) рассматривались Бочкаревым [1], [2] и Кашиным [3], [4].

Бочкаревым установлено, в частности, что для равномерно ограниченных в $L^{\infty}([0, 1])$ систем (1.2)

$$\int_0^1 \sum_{j=1}^{\infty} |c_j(\chi_t)| dt = \infty, \quad (1.5)$$

где $c_j(\chi_t) = \int_0^t \phi_j(x) dx$ – коэффициенты Фурье по системе Φ .

Кашиным [3] показано, что для любой полной ортонормированной системы выполнено

$$\sum_{j=1}^{\infty} \|c_j(\chi_t)\|_{L^2([0, 1])} = \infty. \quad (1.6)$$

Отметим, что из соотношений вида (1.6) нельзя сделать выводы о поведении последовательности $\{c_j(\chi_t)\}_{j=1}^{\infty}$ в некоторой точке t . Это, видимо, не случайно. Как показывает пример системы Хаара для общих ортонормированных систем, убывающая перестановка последовательности коэффициентов Фурье функций χ_t убывает экспоненциально. Теорема показывает, что при условии (1.3) коэффициенты Фурье функций класса (1.1) не могут

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект 14-50-00005).

DOI: 10.4213/mzm10647

© А. В. МЕЛЕШКИНА, 2015

убывать слишком быстро. Вопрос о точности показателя $(p-2)/(p-1)$ в теореме остается открытым.

Вопрос о расходимости ряда (1.4) связан с оценками снизу n -членных приближений в метрике $L^2([0, 1])$. Такие оценки для систем с условием (1.3) рассматривались в [5]. Полученные там результаты дают для данного n оценку снизу для верхней грани

$$\sup_{0 < t < 1} \sigma_n(\chi_t, \Phi). \quad (1.7)$$

Однако вывести из полученных в [5] результатов утверждение теоремы не удастся. Это, возможно, связано с тем, что оценки снизу для величин (1.7) в [5] использовали малость коэффициентов $c_j(\chi_t - \chi_{t'})$ в случае, если величина $|t - t'|$ достаточно мала. В настоящей заметке, наоборот, используется оценка снизу для элементов последовательности $\{c_j(\chi_t)\}_{j=1}^\infty$.

2. Вспомогательные утверждения. Нам потребуется хорошо известное утверждение (см., например, [6; приложение 1]).

Пусть $g \in L^s(\mathbb{R})$, $0 < s < \infty$, и для $t \in \mathbb{R}$ $\lambda_f(t) = \mu\{x : |f(x)| > t\}$. Тогда

$$\int_{\mathbb{R}} |g(x)|^s dx = s \int_0^\infty t^{s-1} \lambda_g(t) dt \quad (2.1)$$

Пусть функция $f(x)$ определена на $\mathbb{R}$. Положим

$$\|f\|_s = \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^s dx \right)^{1/s}, \quad s > 0.$$

Введем в рассмотрение величину (возникающую при определении нормы в пространстве Соболева $W_2^{1/2}$)

$$N(f, W_2^{1/2}) = \left(\int_0^\infty h^{-2} \|f(x+h) - f(x)\|_2^2 dh \right)^{1/2}. \quad (2.2)$$

Доказательство следующего утверждения аналогично доказательству Бесова утверждения 1 в [6; гл. 10, §3]. При этом в нашем случае показатель $(p-2)/(p-1) < 1$.

ЛЕММА. Для всех $p > 2$ существует $C > 0$ такое, что для всех $f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, $f' \in L^p(\mathbb{R})$,

$$N(f, W_2^{1/2}) \leq C \cdot \|f\|_{(p-2)/(p-1)}^{(p-2)/2(p-1)} \cdot \|f'\|_p^{p/2(p-1)}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Не ограничивая общности, будем считать, что $\|f'\|_p = 1$. Пусть также $1/p + 1/q = 1$. Тогда для любого h , применяя неравенство Гёльдера, получим

$$|f(x+h) - f(x)| \leq h^{1/q}. \quad (2.3)$$

Рассмотрим множества

$$E(h) = \{x : |f(x)| \leq h^{1/q}, |f(x+h)| \leq h^{1/q}\}, \quad F(h) = \mathbb{R} \setminus E(h).$$

Легко проверить, что

$$\mu F(h) \leq 2\lambda_f(h^{1/q}).$$

Будем использовать на множестве $F(h)$ оценку (2.3), а на множестве $E(h)$ оценку

$$|f(x+h) - f(x)|^2 \leq 2(|f(x+h)|^2 + |f(x)|^2)$$

и (2.1). Тогда

$$\|f(x+h) - f(x)\|_2^2 = \int_{E(h)} |f(x+h) - f(x)|^2 dx + \int_{F(h)} |f(x+h) - f(x)|^2 dx$$

$$\begin{aligned}
&\leq 2 \int_{E(h)} |f(x+h)|^2 + |f(x)|^2 dx + h^{2/q} \cdot \mu F(h) \\
&\leq 4 \int_{\{x: |f(x)|^q \leq h\}} (|f(x)|^q)^{2/q} dx + 2h^{2/q} \lambda_f(h^{1/q}) \\
&= \frac{8}{q} \int_0^h t^{2/q-1} (\lambda_{f^q}(t) - \lambda_{f^q}(h)) dt + 2h^{2/q} \lambda_{f^q}(h) \\
&= \frac{8}{q} \int_0^h t^{2/q-1} \lambda_{f^q}(t) dt - 2h^{2/q} \lambda_{f^q}(h).
\end{aligned} \tag{2.4}$$

Используя (2.4) и (2.1), оценим величину (2.2). Имеем

$$\begin{aligned}
N^2(f, W_2^{1/2}) &= \int_0^\infty h^{-2} \|f(x+h) - f(x)\|_2^2 dh \\
&\leq \int_0^\infty h^{-2} \left[\frac{8}{q} \int_0^h t^{2/q-1} \lambda_{f^q}(t) dt - 2h^{2/q} \lambda_{f^q}(h) \right] dh \\
&= \frac{8}{q} \int_0^\infty t^{2/q-1} \lambda_{f^q}(t) \int_t^\infty h^{-2} dh dt - 2 \int_0^\infty h^{2/q-2} \lambda_{f^q}(h) dh \\
&= \left(\frac{8}{q} - 2 \right) \int_0^\infty t^{2/q-2} \lambda_{f^q}(t) dt = \frac{2(4-q)}{q} \frac{q}{2-q} \int_{\mathbb{R}} (|f(t)|^q)^{2/q-1} dt \\
&= \frac{2(4-q)}{2-q} \int_{\mathbb{R}} |f(t)|^{2-q} dt = \frac{2(4-q)}{2-q} \|f\|_{(p-2)/(p-1)}^{(p-2)/(p-1)},
\end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Заметим, что утверждение леммы будет справедливо, если функция определена на любом конечном отрезке $[a, b]$. В этом случае величина (2.2) принимает вид

$$N(f, W_2^{1/2}([a, b])) = \left(\int_a^b \int_a^b \frac{|f(x) - f(y)|^2}{|x - y|^2} dx dy \right)^{1/2}. \tag{2.5}$$

3. Доказательство теоремы. Рассмотрим систему функций (1.2) с условием (1.3) и систему

$$f_j(x) = \int_0^x \phi_j(t) dt, \quad x \in [0, 1], \quad j \in \mathbb{N}. \tag{3.1}$$

Для любого x последовательность (3.1) – это последовательность коэффициентов Фурье функции χ_x класса (1.1) по системе (1.2).

Согласно (1.3) имеем $\|f'_j\|_p \leq M$, $j \in \mathbb{N}$. По лемме

$$N^2(f_j, W_2^{1/2}([a, b])) \leq C^2 \cdot \|f_j\|_{(p-2)/(p-1)}^{(p-2)/(p-1)} \cdot \|f'_j\|_p^{p/(p-1)} \leq C^2 \cdot M^{p/(p-1)} \cdot \|f_j\|_{(p-2)/(p-1)}^{(p-2)/(p-1)}.$$

Для системы (3.1) в силу (2.5) и равенства Парсеваля для любого отрезка $[a, b]$ имеем

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^\infty N^2(f_j, W_2^{1/2}([a, b])) &= \sum_{j=1}^\infty \int_a^b \int_a^b \frac{|f_j(x) - f_j(y)|^2}{|x - y|^2} dx dy \\
&= \int_a^b \int_a^b \frac{\sum_{j=1}^\infty |f_j(x) - f_j(y)|^2}{|x - y|^2} dx dy = \int_a^b \int_a^b \frac{|x - y|}{|x - y|^2} dx dy = \infty.
\end{aligned} \tag{3.2}$$

Выберем последовательность M_s так, что

$$\lim_{s \rightarrow \infty} M_s = \infty.$$

Из (3.2) следует, что существует точка $x_1 \in (0, 1)$ и индекс N_1 такие, что

$$\sum_{j=1}^{N_1} |f_j(x_1)|^{(p-2)/(p-1)} > M_1.$$

Из непрерывности функций f_j вытекает существование отрезка $\omega_1 \subset (0, 1)$ с центром в точке x_1 такого, что для всех $y \in \omega_1$ выполнена оценка

$$\sum_{j=1}^{N_1} |f_j(y)|^{(p-2)/(p-1)} \geq M_1.$$

Используя (3.2) в случае, когда $[a, b] = \omega_1$, и учитывая, что существует $D > 0$ такое, что для всех $j \in \mathbb{N}$ выполнена оценка

$$N(f_j, W_2^{1/2}([a, b])) \leq D,$$

находим точку $x_2 \in \omega_1$ и индекс N_2 такие, что

$$\sum_{j=N_1+1}^{N_2} |f_j(x_2)|^{(p-2)/(p-1)} > M_2,$$

а значит, существует отрезок $\omega_2 \subset \omega_1$ с центром в точке x_2 такой, что для всех $y \in \omega_2$

$$\sum_{j=N_1+1}^{N_2} |f_j(y)|^{(p-2)/(p-1)} \geq M_2.$$

Продолжая построение, получим последовательность вложенных отрезков $\omega_1 \supset \omega_2 \supset \dots$. Пусть $z \in \bigcap_{s=1}^{\infty} \omega_s$. Из построения ясно, что

$$\sum_{j=1}^{\infty} |f_j(z)|^{(p-2)/(p-1)} = \infty.$$

Теорема доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] С. В. Бочкарев, *Докл. АН СССР*, **202**:5 (1972), 995–997. [2] С. В. Бочкарев, *Матем. заметки*, **15**:3 (1974), 363–370. [3] Б. С. Кашин, *Матем. сб.*, **106**:3 (1978), 380–385. [4] B. S. Kashin, “On lower estimates for n -term approximation in Hilbert spaces”, *Approximation theory*, DARBA, Sofia, 2002, 241–257. [5] Б. С. Кашин, А. В. Мелешкина, *Матем. заметки*, **95**:6 (2014), 830–835. [6] Б. С. Кашин, А. А. Саакян, *Ортогональные ряды*, Изд-во АФЦ, М., 1999.

А. В. Мелешкина

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова;
Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
E-mail: meleshkina-anna@mail.ru

Поступило

29.12.2014