Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. С. Тихомиров, Т. Л. Трошина, Бирациональная и численная геометрия многообразия полных пар двоеточий алгебраической поверхности, *Матем. заметки*, 1999, том 65, выпуск 3, 412–419

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1065>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.187.58

26 апреля 2023 г., 16:36:03

УДК 512.7

БИРАЦИОНАЛЬНАЯ И ЧИСЛЕННАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЯ ПОЛНЫХ ПАР ДВОЕТОЧИЙ АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ

А. С. Тихомиров, Т. Л. Трошина

Работа посвящена описанию бирациональных перестроек, необходимых для регуляризации “сложения” пар точек на алгебраической поверхности. Образцом описания служит сложение точек алгебраической поверхности, требующей однократного раздутия гладкого подмногообразия – диагонали прямого произведения поверхности на себя. Точное описание раздутий приводит к описанию геометрии (кольца алгебраических циклов) и численных инвариантов – произведений классов Черна стандартных расслоений на схемах Гильберта порядка 4 алгебраических поверхностей.

Библиография: 5 названий.

0. Введение. Пусть S – гладкая, проективная, неприводимая алгебраическая поверхность над полем $k = \bar{k}$, $\text{char } k \neq 2$, $H_d = \text{Hilb}^d S$ – схема Гильберта 0-мерных подсхем длины d (d -точий) на S , Z – подсхема в S , соответствующая данной замкнутой точке $z \in H_d$. В статье [1] для целых $d_1, d_2 \geq 1$ было введено понятие многообразия $X_{d_1 d_2}$ полных пар 0-мерных подсхем длин d_1, d_2 в S как замыкания в $H_{d_1} \times H_{d_2} \times H_{d_1+d_2}$ рационального морфизма “сложения точек” $f: H_{d_1} \times H_{d_2} \rightarrow H_{d_1+d_2}: (z_1, z_2) \mapsto z$, где $Z = Z_1 \cup Z_2$, регулярного на $H_{d_1} \times H_{d_2} \setminus \Gamma$, где $\Gamma = \Gamma_{d_1 d_2} = \{(z_1, z_2) \in H_{d_1} \times H_{d_2} \mid Z_{d_1} \cap Z_{d_2} \neq \emptyset\}$ – график инциденции. Там же доказано, что в случае $d_1 = d_2 = 2$ многообразие $X = X_{22}$ (называемое ниже *многообразием полных пар двоеточий*) гладко, и естественная проекция $\sigma: X \rightarrow H_2 \times H_2$ есть раздутие X вдоль Γ как приведенного многообразия. Так как $\Gamma = \Gamma_{22}$ – особое многообразие, естественно разложить σ в композицию раздутий и стягиваний с неособыми центрами. В настоящей заметке мы даем ответ на этот вопрос (теорема 1 ниже) для случая $\text{char } k = 0$. Полученный результат позволяет дать нам эффективное описание кольца Чжоу $A(X)$ многообразия X (как градуированного $\mathbb{Z}$ -модуля) в терминах кольца $A(H_2 \times H_2)$ и колец Чжоу других многообразий, участвующих в описании морфизма σ (см. формулы (14)–(16)). Это описание позволяет затем в интересном для приложений случае $S = \mathbb{P}^2$ вычислить ранги градуированных компонент $A'(X)$ кольца $A(X)$ (как свободных $\mathbb{Z}$ -модулей), т.е. (в случае $k = \mathbb{C}$) числа Бетти многообразия X (теорема 2).

1. Два последовательных раздутия $\tilde{X} \rightarrow X_1 \rightarrow X$ многообразия X полных пар двоеточий поверхности S . Для описания морфизма $\sigma: X \rightarrow H \times H$, где $H = H_2$, нам потребуются некоторые конструкции и результаты из [1]. Пусть Γ_1 и Γ_2 – прообразы на многообразии $T = H \times S \times H$ графиков инциденции (универсальных циклов) $\Gamma_{21} \subset H \times S$ и $\Gamma_{12} \subset S \times H$ при проекциях $\text{pr}_{12}: T \rightarrow H \times S$ и $\text{pr}_{23}: T \rightarrow S \times H$ соответственно. Тогда по определению $\Gamma = \text{pr}_{13}(\Gamma')$, где $\Gamma' = \Gamma_1 \cap \Gamma_2$, а $\text{pr}_{13}: T \rightarrow H \times H$ –

проекция. Заметим, что универсальный цикл Γ_{12} – гладкое подмногообразие в $S \times H$, изоморфное раздутию $\widetilde{S \times S}$ многообразия $S \times S$ вдоль диагонали, поэтому естественная проекция $p_s: \Gamma_{12} \rightarrow S$ (соответственно $p'_s: \Gamma_{21} \simeq \Gamma_{12} \xrightarrow{p_s} S$) является плоским гладким морфизмом, а значит, и морфизм $p'_s \times p_s: \Gamma_{21} \times \Gamma_{12} \rightarrow S \times S$ гладкий. При этом по построению $\Gamma' \simeq (p'_s \times p_s)^{-1}(S_\Delta)$, где S_Δ – диагональ в $S \times S$, причем морфизм $\pi_s = p'_s \times p_s|_{\Gamma'}: \Gamma' \rightarrow S_\Delta \simeq S$ совпадает с композицией $\Gamma' \hookrightarrow T \xrightarrow{\text{pr}_2} S$. Следовательно, Γ' – гладкое многообразие. Далее, пусть Δ – диагональ в $H \times H$, $\Delta \simeq H$, $p = \text{pr}_{13}|_{\Gamma'}$, $\Delta' = p^{-1}(\Delta) = \text{pr}_{13}^{-1}(\Delta) \cap \Gamma'$. По построению Δ' изоморфно универсальному циклу $\Gamma_{12} \subset S \times H$ при изоморфизме $\text{pr}_{13}^{-1}(\Delta) \simeq S \times H$, причем пересечение в T гладких многообразий $\text{pr}_{13}^{-1}(\Delta)$ и Γ' вдоль Δ' как гладкого подмногообразия в T трансверсально. Кроме того, полагая $\Gamma^* = \Gamma \setminus \Delta$, $\Gamma'^* = \Gamma' \setminus \Delta'$, мы имеем изоморфизм $p|_{\Gamma'^*}: \Gamma'^* \rightarrow \Gamma^*$ и двойное накрытие $p|_{\Delta'}: \Delta' \rightarrow \Delta$, совпадающее с двойным накрытием $\widetilde{S \times S} \rightarrow H$ при указанных выше отождествлениях. В частности, $\Delta = \text{Sing } \Gamma$ – множество двойных точек Γ и $p: \Gamma' \rightarrow \Gamma$ – морфизм нормализации.

Пусть $\sigma_0: \tilde{\Gamma} \rightarrow \Gamma$ – раздутие Γ с центром в многообразии Δ и $\text{pr}_{\Gamma'}: \tilde{\Gamma}' = \tilde{\Gamma} \times_{\Gamma} \Gamma' \rightarrow \Gamma'$ – естественная проекция. С другой стороны, пусть $\hat{\Gamma}$ – раздутие Γ' с центром в гладком многообразии Δ' . Ввиду гладкости Γ' многообразие $\hat{\Gamma}$ также гладко. Кроме того, поскольку в силу сказанного выше многообразие Δ' является схемным прообразом Δ при проекции p , по известному функториальному свойству раздутий (см., например, [2, дополнение В.6.9]) имеем вложение $\hat{\Gamma} \xrightarrow{i} \tilde{\Gamma}'$, так что $\text{pr}_{\Gamma'} \circ i: \hat{\Gamma} \rightarrow \Gamma'$ – морфизм раздутия с центром Δ' .

Рассмотрим теперь индуцированный морфизм $\tilde{p} = \text{pr}_{\tilde{\Gamma}} \circ i: \hat{\Gamma} \rightarrow \tilde{\Gamma}$, где $\text{pr}_{\tilde{\Gamma}}: \tilde{\Gamma}' \rightarrow \tilde{\Gamma}$ – естественная проекция. Так как согласно сказанному выше p – конечный морфизм степени 1 в общей точке, то и $\tilde{p}$ – также конечный морфизм неприводимых многообразий степени 1 в общей точке.

ЛЕММА 1. *Многообразие $\tilde{\Gamma}$ неособо. Тем самым, $\tilde{p}: \hat{\Gamma} \rightarrow \tilde{\Gamma}$ – изоморфизм многообразий.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\sigma_\Delta: X_1 \rightarrow H \times H$ – раздутие с центром в многообразии $\Delta \subset H \times H$. Имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\Gamma} & \xrightarrow{j} & X_1 \\ \sigma_0 \downarrow & & \downarrow \sigma_\Delta \\ \Gamma & \hookrightarrow & H \times H \end{array}.$$

Для описания $\tilde{\Gamma}$ воспользуемся локальными уравнениями подмногообразия Γ в $H \times H$, полученными в § 4 работы [1]. Именно, достаточно рассмотреть эти уравнения в подходящей окрестности U точки $x_0 = (z, z) \in \Delta \subset H \times H$, где Z – неприведенная схема длины 2. Согласно [1, формулы (4.16)–(4.21) и (4.26)] можно выбрать окрестность U с локальными координатами $a, b, c, d, a_2, b_2, c_2, d_2$ такими, что идеалы $I_\Gamma = I_{\Gamma \cap U, U}$ и $I_\Delta = I_{\Delta \cap U, U}$ суть

$$I_\Gamma = (b^2 + 4a^2b_2, 2ad - bc, d^2 + c^2b_2, bd + 2acb_2), \quad (1)$$

$$I_\Delta = (a, b, c, d). \quad (2)$$

Пользуясь (2), покроем $\sigma_{\Delta}^{-1}(U)$ картами $U_i, i = 1, 2, 3, 4$, с координатами $x_{ij}, j = 1, \dots, 8$, в U_i такими, в которых $\sigma_i = \sigma_{\Delta}|_{U_i}: U_i \rightarrow U$ задается формулами

$$\begin{aligned} \sigma_1: \quad & a = x_{11}, \quad b = x_{21}x_{11}, \quad c = x_{31}x_{11}, \quad d = x_{41}x_{11}, \\ & x_{51} = a_2, \quad x_{61} = b_2, \quad x_{71} = c_2, \quad x_{81} = d_2, \\ \sigma_2: \quad & a = x_{12}x_{22}, \quad b = x_{22}, \quad c = x_{32}x_{22}, \quad d = x_{42}x_{22}, \\ & x_{52} = a_2, \quad x_{62} = b_2, \quad x_{72} = c_2, \quad x_{82} = d_2, \\ \sigma_3: \quad & a = x_{13}x_{33}, \quad b = x_{23}x_{33}, \quad c = x_{33}, \quad d = x_{43}x_{33}, \\ & x_{53} = a_2, \quad x_{63} = b_2, \quad x_{73} = c_2, \quad x_{83} = d_2, \\ \sigma_4: \quad & a = x_{14}x_{44}, \quad b = x_{24}x_{44}, \quad c = x_{34}x_{44}, \quad d = x_{44}, \\ & x_{54} = a_2, \quad x_{64} = b_2, \quad x_{74} = c_2, \quad x_{84} = d_2. \end{aligned} \quad (3)$$

Пусть $\tilde{\Delta} = \sigma_{\Delta}^{-1}(\Delta)$, $\tilde{\Delta}_i = \tilde{\Delta} \cap U_i$, $I_{\tilde{\Delta}_i} = I_{\tilde{\Delta}, U_i}, i = 1, 2, 3, 4$. Из (2) и (3) немедленно следует, что

$$I_{\tilde{\Delta}_i} = (x_{ii}), \quad i = 1, 2, 3, 4. \quad (4)$$

Подставляя (3) в (1), с помощью элементарных вычислений получаем (после удаления из $U_i \setminus \sigma_{\Delta}^{-1}(x_0)$ подходящих замкнутых подмножеств) формулы для идеалов $I_{\sigma_i^{-1}(\Gamma \cap U), U_i} = \sigma_i^{-1}I_{\Gamma}$:

$$\begin{aligned} \sigma_1^{-1}I_{\Gamma} &= (x_{11})^2(4x_{61} + x_{21}^2, 2x_{41} - x_{21}x_{31}), & \sigma_2^{-1}I_{\Gamma} &= (x_{22})^2, \\ \sigma_3^{-1}I_{\Gamma} &= (x_{33})^2(2x_{13}x_{43} - x_{23}, x_{43}^2 + x_{63}), & \sigma_4^{-1}I_{\Gamma} &= (x_{44})^2. \end{aligned} \quad (5)$$

Как следует из (5), $\sigma_i^{-1}I_{\Gamma}$ делится на $I_{\tilde{\Delta}_i}^2, i = 1, 2, 3, 4$. Сокращая эти формулы на обратимые идеалы $I_{\tilde{\Delta}_i}^2$, получаем формулы для искоемых идеалов $I_{\tilde{\Gamma}_i} = I_{\tilde{\Gamma}, U_i}$, где $\tilde{\Gamma}_i = \tilde{\Gamma} \cap U_i, i = 1, 2, 3, 4$:

$$I_{\tilde{\Gamma}_1} = (4x_{61} + x_{21}^2, 2x_{41} - x_{21}x_{31}), \quad I_{\tilde{\Gamma}_3} = (x_{23} - 2x_{13}x_{43}, x_{63} + x_{43}^2), \quad I_{\tilde{\Gamma}_2} = I_{\tilde{\Gamma}_4} = (1). \quad (6)$$

Из формул (5) очевидным образом следует гладкость $\tilde{\Gamma}$. Наконец, поскольку $\tilde{p}: \hat{\Gamma} \rightarrow \tilde{\Gamma}$ – конечный бирациональный морфизм гладких проективных многообразий, то $\tilde{p}$ – изоморфизм (см., например, [3, гл. II, § 4, следствие 1 из теоремы 2]).

Пусть теперь $\sigma_{\tilde{\Gamma}}: \tilde{X} \rightarrow X_1$ – раздутие с центром в гладком многообразии $\tilde{\Gamma}, E = \sigma_{\tilde{\Gamma}}^{-1}(\tilde{\Gamma})$ – исключительный дивизор раздутия $\sigma_{\tilde{\Gamma}}, D = \sigma_{\tilde{\Gamma}}^{-1}(\tilde{\Delta}), g_E = \sigma_{\tilde{\Gamma}}|_E: E \rightarrow \tilde{\Gamma}$ и $g_D = \sigma_{\tilde{\Gamma}}|_D: D \rightarrow \tilde{\Delta}$ – проекции. Из (4)–(6) непосредственно следуют соотношения между пучками идеалов $\mathcal{I}_{\Gamma, H \times H}, \mathcal{I}_{\tilde{\Delta}, X_1}$ и $\mathcal{I}_{\tilde{\Gamma}, X_1}$:

$$\sigma_{\Delta}^{-1}\mathcal{I}_{\Gamma, H \times H} \simeq \mathcal{I}_{\tilde{\Delta}, X_1}^2 \mathcal{I}_{\tilde{\Gamma}, X_1} = \mathcal{I}_{\tilde{\Gamma}, X_1}(-2\tilde{\Delta}),$$

откуда

$$(\sigma_{\Delta}\sigma_{\tilde{\Gamma}})^{-1}\mathcal{I}_{\Gamma, H \times H} = \mathcal{I}_{D, \tilde{X}}^2 \mathcal{I}_{E, \tilde{X}} = \mathcal{O}_{\tilde{X}}(-2D - E). \quad (7)$$

Кроме того, уравнения (4) и (6) немедленно влекут гладкость многообразия $\tilde{\Delta} \cap \tilde{\Gamma}$, а поскольку $\tilde{\Delta}$ – гладкий дивизор в X_1 , то отсюда опять по функториальности раздутий получаем, что $g_D: D \rightarrow \tilde{\Delta}$ – раздутие с гладким центром $\tilde{\Delta} \cap \tilde{\Gamma}$, откуда следует гладкость D .

Далее, по определению $E \simeq \mathbb{P}(\mathcal{N}_{\tilde{\Gamma}/X_1}^\vee)$ и g_E совпадает со структурным морфизмом $\mathbb{P}(\mathcal{N}_{\tilde{\Gamma}/X_1}^\vee) \rightarrow \tilde{\Gamma}$, а значит, слой g_E изоморфен $\mathbb{P}^1$. Аналогично, пусть $g_\Delta: \tilde{\Delta} \simeq \mathbb{P}(\mathcal{N}_{\Delta/H}^\vee) \simeq \mathbb{P}(\Omega_H) \rightarrow H \simeq \Delta$ – структурный морфизм и пусть $\mathbb{P}_z^3 = g_\Delta^{-1}(z)$, $E_z = E \cap \mathbb{P}_z^3$, $z \in \Delta \simeq H$. Элементарное наблюдение показывает, что если соответствующая точке z схема Z в S приведена (т.е. Z – пара различных точек в S), то схема E_z есть объединение двух скрещивающихся прямых $l_{1z} \cup l_{2z}$ в $\mathbb{P}_z^3$ (рассматриваемых как неприводимые многообразия). Соответственно из формул (6) непосредственно следует, что если Z – неприведенная схема ($Z \simeq \text{Спек } k[x]/(x^2)$), то носитель схемы E_z есть некоторая прямая l_z в $\mathbb{P}_z^3$, а схемная структура E_z совпадает с двойной структурой на l_z как образующей некоторой гладкой квадрики $V_z \subset \mathbb{P}_z^3$: $\mathcal{O}_{E_z} = \mathcal{O}_{V_z}/\mathcal{O}_{V_z}(-2l_z)$ (здесь квадрика V_z может быть выбрана неоднозначно).

Далее, пусть $G(1, 3)_z$ – грассманиан прямых пространства $\mathbb{P}_z^3$ и $Q_z = \{l \in G(1, 3)_z \mid \chi(\mathcal{O}_{l \cap E_z}) = 2\}$. Кроме того, пусть $B_H = \{z \in H \mid Z \text{ неприведена}\}$ и $H^* = H \setminus B_H$. Из предыдущего описания схемы E_z непосредственно вытекает

ЛЕММА 2. *Если $z \in H^*$, то $Q_z \simeq l_{1z} \times l_{2z}$ – гладкая квадрика. Если $z \in B_H$, то Q_z – квадратичный конус с вершиной l_z . Для любой $z \in H$ через каждую точку в $\mathbb{P}_z^3 \setminus E_z$ проходит единственная прямая из Q_z .*

Рассмотрим теперь множество $Y' = \bigcup_{z \in \Delta} Q_z$ (ниже мы увидим, что на Y' существует структура гладкого шестимерного многообразия). Для произвольной прямой $\tilde{l} \in Y'$ из свойств раздутия σ_Δ немедленно следует, что $(\tilde{\Delta} \cdot \tilde{l})_{X_1} = -1$. Далее, пусть l – собственный прообраз прямой $\tilde{l}$ при отображении $\sigma_{\tilde{\Gamma}}$ (или, что то же самое, при морфизме g_D , поскольку $\tilde{l} \subset \tilde{\Delta}$). Очевидно, что $\sigma_l = \sigma_{\tilde{\Gamma}}|_l: l \rightarrow \tilde{l}$ – изоморфизм, так что

$$(l \cdot D)_{\tilde{X}} = \deg(\mathcal{O}_{\tilde{X}}(D)|_l) = \deg \sigma_l^*(\mathcal{O}_{X_1}(\tilde{\Delta})|_{\tilde{l}}) = \deg(\mathcal{O}_{X_1}(\tilde{\Delta})|_{\tilde{l}}) = (\tilde{\Delta} \cdot \tilde{l})_{X_1} = -1. \quad (8)$$

Кроме того, пусть $\tilde{l} \in Q_z$, где $z \in \Delta^*$. Тогда по определению $\tilde{l}$ пересекает $\tilde{\Gamma}$ трансверсально в двух различных точках и, как следствие, $(l \cdot E)_{\tilde{X}} = 2$. Отсюда и из (8) получаем $((E + 2D) \cdot l)_{\tilde{X}} = 0$. Это равенство будет использовано в следующем пункте.

В заключение этого пункта заметим, что в силу леммы 2 прямые $l = \sigma_l^{-1}(\tilde{l})$, $\tilde{l} \in Y'$, заметают дивизор D на $\tilde{X}$, и через каждую точку D проходит единственная такая прямая l . Тем самым, определено отображение множеств $g: D \rightarrow Y' : x \mapsto \sigma_l(l)$, где l определена однозначно условием $x \in l$. Ниже мы покажем, что в действительности $g: D \rightarrow Y'$ является морфизмом, и дадим его точное описание (теорема 1).

2. Разложение морфизма $\sigma: X \rightarrow H \times H$ в “домик” Хиронаки. Целью этого пункта является доказательство существования бирационального регулярного морфизма $\tilde{\sigma}: \tilde{X} \rightarrow X$ и его точное описание, приводящее затем к основному результату о разложении $\sigma: X \rightarrow H \times H$ в “домик” Хиронаки (теорема 1). Для этого нам потребуется провести несколько дополнительных построений. Пусть Δ^* – образ H^* при изоморфизме $\Delta \simeq H$. Сначала возьмем произвольную точку $z \in \Delta^*$ и пусть $Z = x_1 \cup x_2$ – соответствующая ей пара различных точек в S . Выбирая достаточно малую аналитическую окрестность $U \subset H \times H$ точки z (здесь для удобства мы временно ограничиваемся случаем $k = \mathbb{C}$), непосредственно замечаем (пользуясь, например, формулами (1)), что $\Gamma \cap U$ является объединением двух своих гладких ветвей $\Gamma_{(1)}$ и $\Gamma_{(2)}$, трансверсально пересекающихся вдоль $\Delta \cap U$. Тем самым, полагая $\tilde{U} = \sigma^{-1}(U)$, мы получаем, что раздутие $\sigma_U = \sigma|_{\tilde{U}}: \tilde{U} \rightarrow U$ (в категории аналитических пространств) разлагается в

композицию $\tilde{U} \xrightarrow{\sigma_2} U' \xrightarrow{\sigma_1} U$, где $\sigma_1: U' \rightarrow U$ – раздутие с центром в $\Gamma_{(1)}$, а $\sigma_2: \tilde{U} \rightarrow U'$ – раздутие с центром в $\Gamma'_{(2)} = \sigma_1^{-1}(\Gamma_{(2)})$. При этом $\delta_2 = \sigma_1|_{\Gamma'_{(2)}}: \Gamma'_{(2)} \rightarrow \Gamma_{(2)}$ – раздутие с центром $\Delta \cap U$ в $\Gamma_{(2)}$, так что, полагая $E_i = \sigma^{-1}(\Gamma_{(i)})$, $\Gamma_{(i)}^* = \Gamma_{(i)} \cap \Gamma^*$, $E_i^* = \sigma^{-1}(\Gamma_{(i)}^*)$, $i = 1, 2$, получаем морфизм $\sigma_{E_2}: E_2 \rightarrow \Gamma'_{(2)}$ такой, что $\sigma_{E_2}|_{E_2^*} = \sigma|_{E_2^*}$. Меняя порядок раздутия U вдоль ветвей $\Gamma_{(1)}$ и $\Gamma_{(2)}$, получаем морфизмы $\sigma_{E_1}: E_1 \rightarrow \Gamma'_{(1)}$ и $\delta_1: \Gamma'_{(1)} \rightarrow \Gamma_{(1)}$, где δ_1 – раздутие $\Gamma_{(1)}$ с центром $\Delta \cap U$, такие, что $\sigma_{E_1}|_{E_1^*} = \sigma|_{E_1^*}$. Пусть $Q(z) = \sigma^{-1}(z)$ и $n_{iz} = \delta_i^{-1}(z)$, $i = 1, 2$; в частности, $n_{2z} = \delta_2^{-1}(z) = \sigma_1^{-1}(z)$, $Q(z) = \sigma_2^{-1}(n_{2z})$ и по конструкции $Q(z) \simeq n_{1z} \times n_{2z} \simeq n_{iz} \times_{\Gamma'_{(i)}} E_i$, $i = 1, 2$ (здесь расслоенные квадраты определяются данными $n_{iz} \hookrightarrow \Gamma'_{(i)} \xleftarrow{\sigma_{E_i}} E_i$), причем проекции

на сомножители $Q(z) \xrightarrow{\text{pr}_i} n_{iz}$ совпадают с естественными проекциями в расслоенных квадратах. Отсюда и из равенств $\sigma_{E_i}|_{E_i^*} = \sigma|_{E_i^*}$, $i = 1, 2$, следует

ЛЕММА 3. *Прямые h любой серии на квадрике $Q(z)$, где $z \in \Delta^*$, и прямые $\sigma^{-1}(x)$, $x \in \Gamma^*$, принадлежат одному алгебраическому семейству прямых на дивизоре $E_\Gamma = \sigma^{-1}(\Gamma)$ в X . Тем самым, $(h \cdot E_\Gamma)_X = -1$.*

Вернемся к композиции раздутий $\bar{\sigma} = \sigma_\Delta \circ \sigma_\Gamma: \tilde{X} \rightarrow H \times H$. Так как согласно (7) $\bar{\sigma}^{-1}\mathcal{J}_{\Gamma, H \times H}$ – обратимый пучок, то по универсальности раздутия $\sigma: X \rightarrow H \times H$ получаем, что существует морфизм $\tilde{\sigma}: \tilde{X} \rightarrow X$ такой, что $\bar{\sigma} = \sigma \circ \tilde{\sigma}$; в частности, $\bar{\sigma}^{-1}\mathcal{J}_{\Gamma, H \times H} = \tilde{\sigma}^{-1}\mathcal{J}_{E_\Gamma, X} = \tilde{\sigma}^*\mathcal{O}_X(-E_\Gamma)$, где $E_\Gamma = \sigma^{-1}(\Gamma)$ – исключительный дивизор раздутия σ , а правое равенство здесь следует из обратимости на $\tilde{X}$ пучков $\tilde{\sigma}^{-1}\mathcal{J}_{E_\Gamma, X}$ и $\tilde{\sigma}^*\mathcal{O}_X(-E_\Gamma)$. Более того, равенство (7) дает

$$\sigma^*\mathcal{O}_X(-E_\Gamma) = \mathcal{O}_{\tilde{X}}(-E - 2D). \quad (9)$$

Заметим теперь, что по определению отображения $\tilde{\sigma}$, обозначая $Y = \sigma^{-1}(\Delta)$, имеем в силу гладкости Γ^* изоморфизм $\tilde{\sigma}|_{\tilde{X} \setminus D}: \tilde{X} \setminus D \xrightarrow{\sim} X \setminus Y$, откуда $Y = \tilde{\sigma}(D)$.

Далее, возьмем произвольную пару (z, y) , где $z \in \Delta$, $y \in Q_z$, и пусть $l = l_{z, y} = g^{-1}(y)$ – прямая в D , соответствующая точке y . Так как $\tilde{\sigma}(D) = Y$, то $m = \tilde{\sigma}(l) \subset \sigma^{-1}(z) = Q(z)$. Покажем, что m – точка. Рассмотрим сначала случай $z \in \Delta^*$, т.е. когда $Q(z)$ – гладкая квадрика, и пусть h_1 и h_2 – образующие в $\text{Pic } Q(z)$. Предположим теперь, что m – кривая, так что $m \sim a_1 h_1 + a_2 h_2$ для некоторых целых $a_1, a_2 \geq 0$, $a_1 + a_2 > 0$. Пусть d – степень отображения $\tilde{\sigma}_l = \tilde{\sigma}|_l: l \rightarrow m$. Тогда согласно лемме 3 $\deg(\mathcal{O}_X(E_\Gamma)|m) = -(a_1 + a_2)$, так что в силу (9) получаем $((E + 2D) \cdot l)_{\tilde{X}} = \deg(\sigma^*\mathcal{O}_X(E_\Gamma)|l) = -d(a_1 + a_2) < 0$ вопреки (8). Следовательно, m – точка. Теперь положим $B_\Delta = \Delta \setminus \Delta^* \simeq B_H$, $Y^* = \sigma^{-1}(\Delta^*)$, $B_Y = Y \setminus Y^* = \sigma^{-1}(B_\Delta)$ и заметим, что прямые $l_{z, y}$ для $z \in B_\Delta$ лежат в замкнутом подмножестве $\tilde{\sigma}^{-1}(B_Y)$ в D и, тем самым, составляют собственное замкнутое подмножество семейства Y' прямых $l_{z, y}$, $z \in \Delta$, на D (здесь семейство Y' естественным образом снабжается алгебраической структурой как редуцированная компонента схемы Гильберта $\text{Hilb } D$; при этом $g: D \rightarrow Y'$, очевидно, является морфизмом, откуда в силу неприводимости D следует неприводимость Y'). Отсюда и из неприводимости Y' следует по непрерывности, что $m = \tilde{\sigma}(l_{z, y})$ – точка и для любой пары (z, y) , $z \in B_\Delta$. Таким образом, морфизм $g_D = \tilde{\sigma}|_D: D \rightarrow Y$ пропускается через g , т.е. существует отображение $\psi: Y' \rightarrow Y$ (априори ψ – не обязательно морфизм) такое, что $g_D = \psi \circ g$.

Покажем, что ψ – изоморфизм. В самом деле, g по определению является проективным морфизмом, слои которого суть приведенные проективные прямые, а значит, $g_*\mathcal{O}_D = \mathcal{O}_{Y'}$. Тем самым, поскольку $g_D = \psi \circ g$ – морфизм, имеем морфизм пучков

$g_d^\sharp : \mathcal{O}_Y \rightarrow g_{D*}\mathcal{O}_D$, где $g_{D*}\mathcal{O}_D = \psi_*g_*\mathcal{O}_D = \psi_*\mathcal{O}_{Y'}$, т.е. $g_d^\sharp$ индуцирует морфизм пучков $\psi^\sharp : \mathcal{O}_Y \rightarrow \psi_*\mathcal{O}_{Y'}$. Пара $(\psi, \psi^\sharp)$ и определяет ψ как морфизм $Y' \rightarrow Y$.

Далее, из леммы 3 в силу того, что $\tilde{\sigma}|_{\tilde{X} \setminus D} : \tilde{X} \setminus D \rightarrow X \setminus Y$ – изоморфизм, непосредственно следует, что образующие прямые на любой квадрике $Q(z) \subset Y'$, $z \in \Delta$, при морфизме ψ изоморфно отображаются на образующие прямые квадрики Q_z . Отсюда, очевидно, следует, что $\psi : Q(z) \rightarrow Q_z$ – изоморфизм для любого $z \in \Delta$ независимо от того, является ли Q_z гладкой квадратикой или конусом. Тем самым, ψ – биекция.

Наконец, поскольку $g : D \rightarrow Y'$ – морфизм со слоем $\mathbb{P}^1$ (тем самым, g – гладкий морфизм) и D – гладкое многообразие, то Y' – также гладкое многообразие, а значит, ввиду гладкости Y биекция $\psi : Y' \rightarrow Y$ – изоморфизм.

Теперь заметим, что согласно Мойшезону [4], так как слой l проекции g удовлетворяет условию (8), определено стягивание $\sigma_Y : \tilde{X} \rightarrow X'$ дивизора D , т.е. определены гладкое (аналитическое) многообразие X' и вложение в него гладкого подмногообразия $Y' \hookrightarrow X'$ такие, что коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X} & \xrightarrow{\sigma_Y} & X' \\ \downarrow & & \downarrow \\ D & \xrightarrow{g} & Y' \end{array},$$

в которой σ_Y – раздутие X' с центром Y' . Поскольку $g = \sigma_Y|_D = \tilde{\sigma}|_D$, то $\tilde{\sigma}$ как отображение пропускается через σ_Y , т.е. существует отображение $\nu : X' \rightarrow X$ такое, что $\tilde{\sigma} = \nu \circ \sigma_Y$. Поскольку σ_Y – раздутие с гладким центром, то, как известно, $\sigma_Y^*\mathcal{O}_{\tilde{X}} = \mathcal{O}_{X'}$, поэтому рассуждение, аналогичное приведенному выше для морфизма $\tilde{\psi}$, показывает, что ν – морфизм (в аналитической категории). Так как по построению $\nu|_{X' \setminus Y'} : X' \setminus Y' \rightarrow X \setminus Y$ – изоморфизм и $\nu|_{Y'} = \psi$ – изоморфизм, то $\nu : X' \rightarrow X$ – биективный морфизм гладких многообразий, а тем самым, изоморфизм. Следовательно, $\tilde{\sigma}$ отождествляется с σ_Y ; в частности, σ_Y – раздутие в категории схем над $\mathbb{C}$. Итак, для случая $k = \mathbb{C}$ (а тем самым, по принципу Лефшеца [5, с. 187] и для любого основного поля k характеристики 0) доказана

ТЕОРЕМА 1. (i) *Морфизм раздутия $\sigma : X \rightarrow H \times H$ с центром Γ разлагается в композицию раздутий с гладкими центрами в диаграмме (“домике” Хиронаки):*

$$\begin{array}{ccc} X_1 & \xleftarrow{\sigma_{\tilde{\Gamma}}} & \tilde{X} \\ \sigma_\Delta \downarrow & & \downarrow \sigma_Y \\ H \times H & \xleftarrow{\sigma} & X \end{array}, \quad (10)$$

где σ_Δ – раздутие $H \times H$ с центром в диагонали $\Delta \simeq H$, $\Delta_{\tilde{\Gamma}}$ – раздутие с гладким центром $\tilde{\Gamma}$ – собственным прообразом Γ при морфизме σ_Δ , а σ_Y – раздутие с гладким центром $Y = \sigma^{-1}(\Delta)$.

(ii) $\tilde{\Delta} = \sigma_\Delta^{-1}(\Delta) \simeq \mathbb{P}(\mathcal{N}_{\Delta/H \times H}^\vee)$ и $\sigma_\Delta|_{\tilde{\Delta}}$ совпадает со структурным морфизмом $g_\Delta : \mathbb{P}(\mathcal{N}_{\Delta/H \times H}^\vee) \rightarrow \Delta$.

(iii) $\tilde{\Gamma}$ изоморфно раздутию многообразия $(\widetilde{S \times S}) \times_S (\widetilde{S \times S})$ вдоль гладкого подмногообразия $\widetilde{S \times S}$, вложенного в $(\widetilde{S \times S}) \times_S (\widetilde{S \times S})$ как относительная (над S)

диагональ. При этом слой естественной проекции $\tilde{\Gamma} \xrightarrow{\gamma} S$ над произвольной точкой $x \in S$ есть $\widetilde{S_x \times S_x}$ – раздутие $S_x \times S_x$ вдоль диагонали, где S_x – раздутие S в точке x .

Далее, $g_{\tilde{\Gamma}} = \sigma_{\tilde{\Gamma}}|E: E \simeq \mathbb{P}(\mathcal{N}_{\tilde{\Gamma}/X_1}^{\vee}) \rightarrow \tilde{\Gamma}$ совпадает со структурным морфизмом проективизации, где E – исключительный дивизор раздутия σ_{Γ} .

(iv) $g_Y = \sigma|Y: Y \rightarrow \Delta$ – морфизм со слоем гладкая квадрика над точкой $z \in \Delta^*$, соответственно со слоем неприводимый квадратичный конус над точкой $z \in B_{\Delta}$.

(v) Исключительный дивизор $D = \mathbb{P}(\mathcal{N}_{Y/X}^{\vee})$ раздутия $\sigma_Y: \tilde{X} \rightarrow X$ с центром Y совпадает с $\sigma_{\tilde{\Gamma}}^{-1}(\tilde{\Delta})$, и $g_D = \sigma_Y|D: D \rightarrow Y$ – структурный морфизм проективизации.

Выше доказаны все утверждения теоремы кроме (iii). Последнее легко вытекает из предыдущих конструкций.

3. Численная геометрия многообразия X . Для проведения дальнейших вычислений сделаем два общих замечания.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Пусть V – произвольное многообразие, $A_*(V) = \bigoplus_{k=0}^{\dim V} A_k(V)$ – его кольцо Чжоу, градуированное по размерности циклов, $\mathcal{E}$ – локально свободный пучок ранга $r + 1$ на V , $W = \mathbb{P}(\mathcal{E})$, $\pi: W \rightarrow V$ – структурный морфизм, $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}(1)$ – пучок Гротендика, где $\pi_* \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}(1) = \mathcal{E}$, и $\xi_{\pi} = c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}(1))$. Как известно, имеет место изоморфизм градуированных групп

$$A_*(W) \simeq \bigoplus_{i=0}^r \pi^* A_*(V) \cdot \xi_{\pi}^i \simeq A_*(W/V) \oplus A_*(V),$$

где учтено, что $\pi^* A_*(V) \cdot \xi_{\pi}^r \simeq A_*(V)$, и введено обозначение

$$A_*(W/V) = \bigoplus_{i=0}^{r-1} \pi^* A_*(V) \cdot \xi_{\pi}^i = \ker(\pi_*: A_*(W) \rightarrow A_*(V)).$$

В частности, при $r = 1$ имеем изоморфизм градуированных групп

$$A_*(W) \simeq \pi^* A_*(V) \oplus A_*(V), \quad A(W/V) \simeq \pi^* A_*(V). \quad (11)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Пусть $\mathcal{X} \hookrightarrow \mathcal{K}$ – регулярное вложение коразмерности $r + 1$ многообразия $\mathcal{X}$ в многообразие $\mathcal{K}$, $f: \tilde{\mathcal{X}} \rightarrow \mathcal{X}$ – раздутие с центром $\mathcal{X}$, $\mathcal{D} = \mathbb{P}(\mathcal{N}_{\mathcal{X}/\mathcal{K}}^{\vee})$ – исключительный дивизор раздутия f и $g = f|_{\mathcal{D}}$. Тогда из [2, 6.7] легко получаем изоморфизм градуированных групп

$$A_*(\tilde{\mathcal{X}}) \simeq f^* A_*(\mathcal{X}) \oplus j_* A_*(\mathcal{D}/\mathcal{X}) \simeq A_*(\mathcal{X}) \oplus A_*(\mathcal{D}/\mathcal{X}), \quad (12)$$

где $j: \mathcal{D} \hookrightarrow \tilde{\mathcal{X}}$ – вложение. В частности, при $r = 1$ с учетом (11) имеем

$$A_*(\tilde{\mathcal{X}}) \simeq A_*(\mathcal{X}) \oplus g^* A_*(\mathcal{X}). \quad (13)$$

Применим теперь эти замечания к теореме 1. Из (10), (12) и (13) немедленно получаем изоморфизмы градуированных групп:

$$\begin{aligned} A_*(X_1) &\simeq A_*(\tilde{\Delta}/\Delta) \oplus A_*(H \times H), & A_*(\tilde{X}) &\simeq A_*(X_1) \oplus g_E^* A_*(\tilde{\Gamma}), \\ A_*(D) &\simeq g_D^* A_*(Y) \oplus A_*(Y), & A_*(\tilde{X}) &\simeq A_*(X) \oplus g_D^* A_*(Y). \end{aligned} \quad (14)$$

Кроме того, утверждения (iii) и (v) теоремы 1 дают изоморфизмы градуированных групп:

$$A_*(D) \simeq A_*(\tilde{\Delta}) \oplus \gamma^* A_*(\tilde{\Gamma} \cap \tilde{\Delta}), \quad (15)$$

$$A_*(\tilde{\Gamma} \cap \tilde{\Delta}) \simeq A_*(\widetilde{S \times S}) \oplus \delta^* A_*(\widetilde{S \times S}). \quad (16)$$

Применим теперь полученные изоморфизмы (14)–(16) к частному случаю $S = \mathbb{P}^2$. В этом случае легко видеть, что $\Delta \simeq H \simeq \mathbb{P}(S^2 T_{\mathbb{P}^2})$ и $\widetilde{S \times S} \simeq \mathbb{P}(T_{\mathbb{P}^2}) \times_{-\mathbb{P}^2} \mathbb{P}(T_{\mathbb{P}^2})$. Отсюда немедленно имеем

$$\text{rank } A_i(\Delta) = \begin{cases} 1, & i = 0, 4, \\ 2, & i = 1, 3, \\ 3, & i = 2, \end{cases} \quad \text{rank } A_i(\widetilde{S \times S}) = \begin{cases} 1, & i = 0, 4, \\ 3, & i = 1, 3, \\ 4, & i = 2. \end{cases} \quad (17)$$

Кроме того, если $\pi_1: \mathcal{V} = \mathbb{P}(T_{\mathbb{P}^2}(-1)) \rightarrow \mathbb{P}^2$ – структурный морфизм проективизации и $\rho: \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{P}^2$ – отображение линейным рядом $|\mathcal{O}_{\mathcal{V}/\mathbb{P}^2}(1)|$, то нетрудно видеть, что $\widetilde{S \times S} \simeq \mathbb{P}(\rho^* T_{\mathbb{P}^2}^2)$ и естественная проекция $\widetilde{S \times S} \rightarrow S$ совпадает с композицией $\mathbb{P}(\rho^* T_{\mathbb{P}^2}^2) \xrightarrow{\pi_2} \mathcal{V} \xrightarrow{\pi_1} \mathbb{P}^2$, где π_2 – структурный морфизм. Отсюда и из утверждения (iii) теоремы 1, учитывая (16), находим

$$\text{rank } A_i(\tilde{\Gamma}) = \begin{cases} 1, & i = 0, 6, \\ 6, & i = 1, 5, \\ 14, & i = 2, 4, \\ 18, & i = 3, \end{cases} \quad \text{rank } A_i(\tilde{\Gamma} \cap \tilde{\Delta}) = \begin{cases} 1, & i = 0, 5, \\ 4, & i = 1, 4, \\ 7, & i = 2, 3. \end{cases} \quad (18)$$

Последовательная подстановка равенств (17), (18) в формулы (14), (15) дает следующий результат.

ТЕОРЕМА 2. Ранги $a_i = \text{rank } A_i(X)$, $0 \leq i \leq 8$, групп Чжоу многообразия X полных пар двоеточий проективной плоскости $\mathbb{P}^2$ равны:

$$a_0 = a_8 = 1, \quad a_1 = a_7 = 5, \quad a_2 = a_6 = 16, \quad a_3 = a_5 = 29, \quad a_4 = 36.$$

В случае $k = \mathbb{C}$ соответственно числа Бетти $b_i(X)$ и топологическая эйлерова характеристика $\chi_{\text{top}}(X)$ для $X = \mathbb{P}^2$ равны:

$$b_{2k} = a_k, \quad k = 0, \dots, 8, \quad b_{2k+1} = 0, \quad k \geq 0, \quad \chi_{\text{top}}(X) = 138.$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Тихомиров А. С. Многообразие полных пар нульмерных подсхем алгебраической поверхности // Изв. РАН. Сер. матем. 1997. Т. 61. № 6. С. 153–180.
- [2] Фултон У. Теория пересечений. М.: Мир, 1989.
- [3] Шафаревич И. Р. Основы алгебраической геометрии. Т. 1. М.: Наука, 1988.
- [4] Мойшезон Б. Г. Об n -мерных компактных комплексных многообразиях, имеющих n алгебраически независимых мероморфных функций. I // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1966. Т. 30. № 1. С. 133–174.
- [5] Harris J. Algebraic Geometry. A First Course. New York: Springer, 1992.

Ярославский государственный педагогический университет
им. К. Д. Ушинского
E-mail: alexandr@tikho.yaroslavl.su

Поступило
23.04.98