Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. Е. Россовский, А. Л. Тасевич, Первая краевая задача для сильно эллиптического функционально-дифференциального уравнения с ортотропными сжати-ями, *Матем. заметки*, 2015, том 97, выпуск 5, 733–748

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10654>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.27.143

26 апреля 2023 г., 05:52:13

Первая краевая задача для сильно эллиптического функционально-дифференциального уравнения с ортотропными сжатиями

Л. Е. Россовский, А. Л. Тасевич

Найден ряд необходимых и достаточных условий сильной эллиптичности функционально-дифференциального уравнения, содержащего в старшей части ортотропные сжатия аргумента искомой функции. Доказаны однозначная разрешимость первой краевой задачи, дискретность, полуограниченность и секториальная структура ее спектра.

Библиография: 15 названий.

DOI: 10.4213/mzm10654

1. Введение. Работа посвящена краевой задаче

$$A_R u \equiv - \sum_{i,j=1}^2 (R_{ij} u_{x_i})_{x_j} = f(x), \quad x \in \Omega, \quad u|_{\partial\Omega} = 0 \quad (1.1)$$

в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, где

$$R_{ij} v(x) = a_{ij0} v(x) + a_{ij1} v(q^{-1} x_1, p x_2) + a_{ij,-1} v(q x_1, p^{-1} x_2),$$

$p, q > 1$, $a_{ij0}, a_{ij,\pm 1} \in \mathbb{C}$, $i, j = 1, 2$, а комплекснозначная функция $f(x)$ принадлежит пространству $L_2(\Omega)$.

Содержание работы связано в основном с исследованием известного неравенства

$$\operatorname{Re}(A_R u, u)_{L_2(\Omega)} \geq c_1 \|u\|_{H^1(\Omega)}^2 - c_2 \|u\|_{L_2(\Omega)}^2 \quad \text{для всех } u \in C_0^\infty(\Omega), \quad (1.2)$$

называемого *неравенством типа Гординга*, а также условием коэрцитивности оператора A_R . Если положить $a_{ij,\pm 1} = 0$, то оператор A_R становится линейным дифференциальным оператором второго порядка с постоянными коэффициентами, и в этом случае оценка (1.2) равносильна хорошо известному условию сильной эллиптичности:

$$\operatorname{Re} \sum_{i,j=1}^2 a_{ij0} \xi_i \xi_j \geq c_1 |\xi|^2.$$

Работа выполнена при поддержке государственного задания Министерства образования и науки РФ (задание № 1.1974.2014/К).

Вопрос, связанный с выполнением неравенства (1.2) для дифференциальных операторов, включая уравнения высокого порядка, системы уравнений и переменные коэффициенты, был решен в работах [1], [2], а для дифференциально-разностных операторов в ограниченных областях – в работе [3]. Функционально-дифференциальные уравнения, содержащие в старшей части сжатия и растяжения аргументов неизвестной функции, рассматривались в работах [4]–[7], где предполагалось, что коэффициент сжатия (растяжения) по всем переменным одинаков,

$$v(x_1, x_2) \mapsto v(qx_1, qx_2). \quad (1.3)$$

Для такого класса уравнений были получены при постоянных коэффициентах необходимые и достаточные условия в алгебраической форме выполнения неравенства типа Гординга, а при переменных коэффициентах – ряд необходимых условий и достаточных условий.

Хорошо известно, что свойства краевой задачи для функционально-дифференциального уравнения во многом определяются структурой орбит точек области под действием группы, порожденной присутствующими в уравнении преобразованиями. Для преобразований вида (1.3) орбиты располагаются на лучах, выходящих из начала координат. Объективная трудность в изучении уравнений со сжатиями (растяжениями), не позволяющая в полной мере воспользоваться существующей теорией нелокальных эллиптических задач, состоит в том, что все орбиты сгущаются в одной точке – начале координат.

Функционально-дифференциальные уравнения, содержащие сжатия по одним переменным и растяжения по другим,

$$v(x_1, x_2) \mapsto v(q^{-1}x_1, px_2), \quad (1.4)$$

ранее в литературе не рассматривались. Здесь уже орбиты лежат на “гиперболах” $|x_1|^{\ln p}|x_2|^{\ln q} = \text{const}$, и естественно предположить, что задачи с ортотропными сжатиями вида (1.4) по своим свойствам должны отличаться от задач с изотропными сжатиями вида (1.3).

В настоящей работе показывается, что неравенство типа Гординга в случае уравнения (1.1) сводится к проверке положительной определенности действующего в пространстве $L_2(\mathbb{R})$ самосопряженного разностного оператора

$$z(t) \mapsto z(t) + g(t)z(t-1) + \bar{g}(t+1)z(t+1)$$

с гладким коэффициентом $g(t)$, имеющим конечные пределы на $\pm\infty$. В то же время, доказательство однозначной разрешимости задачи (1.1), дискретности, полуограниченности и секториальной структуры ее спектра в $L_2(\Omega)$ при условии выполнения (1.2) абсолютно стандартно.

Активное изучение уравнений, содержащих растяжение или сжатие аргумента искомой функции, началось в 70-х годах прошлого века после выхода статей [8], [9]. В них рассматривалось уравнение, позже названное уравнением пантографа, описывающее волновое движение в воздушной линии питания электрифицированной железнодорожной системы. Функционально-дифференциальное уравнение, совпадающее по виду с уравнением пантографа, было выведено еще в работах по астрофизике и биологии [10], [11]. Краевая задача для обобщенного уравнения пантографа

впервые была рассмотрена в [12]. Ряд новых результатов, связанных с разрешимостью краевых задач для дифференциально-разностных уравнений на интервале и параболических дифференциально-разностных уравнений, получен в работах [13] и [14], [15], соответственно. В последних двух статьях обсуждается связь неравенства типа Гординга с известной гипотезой Като о квадратном корне из m -аккретивного оператора и пространством начальных данных для абстрактных параболических уравнений.

2. Необходимые и достаточные условия выполнения неравенства типа Гординга. В работе через $H^1(\Omega)$ обозначается пространство Соболева комплекснозначных функций, принадлежащих $L_2(\Omega)$ вместе с обобщенными производными первого порядка, а через $\dot{H}^1(\Omega)$ – замыкание множества $C_0^\infty(\Omega)$ финитных бесконечно дифференцируемых функций в $H^1(\Omega)$. Пространство $H^1(\Omega)$ – гильбертово со скалярным произведением

$$(u, v)_{H^1(\Omega)} = \int_{\Omega} (u\bar{v} + u_{x_1}\bar{v}_{x_1} + u_{x_2}\bar{v}_{x_2}) dx.$$

Пространство $\dot{H}^1(\Omega)$ можно отождествлять с подпространством функций из $H^1(\mathbb{R}^2)$, равных нулю вне Ω .

Зафиксировав числа $p > 1$, $q > 1$, введем ограниченный линейный оператор P в пространстве $L_2(\mathbb{R}^2)$ по формуле

$$Pu(x_1, x_2) = u(q^{-1}x_1, px_2).$$

Если же оператор P применяется к функциям, заданным в ограниченной области Ω , то считаем, что последние продолжены нулем вне Ω .

Понятно, что

$$P^{-1}u(x_1, x_2) = u(qx_1, p^{-1}x_2), \quad P^* = qp^{-1}P^{-1}, \quad Px_1 = q^{-1}x_1P, \quad Px_2 = px_2P,$$

а в образах Фурье оператор P заменяется на P^* ,

$$\tilde{u}(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-i(\xi_1x_1 + \xi_2x_2)} u(x_1, x_2) dx_1 dx_2, \quad \widetilde{Pu}(\xi_1, \xi_2) = P^*u(\xi_1, \xi_2).$$

Ясно также, что спектр $\sigma(P)$ оператора $P: L_2(\mathbb{R}^2) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^2)$ лежит на окружности $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = \sqrt{q/p}\}$. Можно показать аналогично [4], что $\sigma(P)$ совпадает с указанной окружностью.

Если есть оператор $R = a_0I + a_1P + a_{-1}P^{-1}$ с комплексными коэффициентами a_0, a_1, a_{-1} , то пусть $\bar{R}$ обозначает оператор с комплексно сопряженными коэффициентами, $\bar{R} = \bar{a}_0I + \bar{a}_1P + \bar{a}_{-1}P^{-1}$; тогда $\bar{R}$ при преобразовании Фурье переходит в сопряженный оператор R^* .

Неравенство (1.2) после интегрирования слева по частям переходит в эквивалентное неравенство

$$\operatorname{Re} \sum_{i,j=1}^2 (R_{ij}u_{x_i}, u_{x_j})_{L_2(\Omega)} \geq c_1 \|\nabla u\|_{L_2(\Omega)}^2 - (c_2 - c_1) \|u\|_{L_2(\Omega)}^2.$$

Если сделать в интегралах замену переменных $y = tx$, $t > 1$, то получим неравенство

$$\operatorname{Re} \sum_{i,j=1}^2 (R_{ij} v_{y_i}, v_{y_j})_{L_2(t\Omega)} \geq c_1 \|\nabla v\|_{L_2(t\Omega)}^2 - (c_2 - c_1) t^{-2} \|v\|_{L_2(t\Omega)}^2, \quad (2.1)$$

справедливое уже для произвольной функции $v \in C_0^\infty(t\Omega)$.

Далее будем предполагать, что область Ω содержит начало координат. Тогда из (2.1) следует, что для произвольной функции $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ выполнено неравенство

$$\operatorname{Re} \sum_{i,j=1}^2 (R_{ij} u_{x_i}, u_{x_j})_{L_2(\mathbb{R}^2)} \geq c_1 \|\nabla u\|_{L_2(\mathbb{R}^2)}^2.$$

В силу плотности $C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ в $H^1(\mathbb{R}^2)$ оно распространяется на все функции u из пространства $H^1(\mathbb{R}^2)$. Кроме того, заменяя в этом неравенстве функцию $u \in H^1(\mathbb{R}^2)$ на комплексно сопряженную функцию $\bar{u}$, приходим к

$$\operatorname{Re} \sum_{i,j=1}^2 (\bar{R}_{ij} u_{x_i}, u_{x_j})_{L_2(\mathbb{R}^2)} \geq c_1 \|\nabla u\|_{L_2(\mathbb{R}^2)}^2 \quad \text{для всех } u \in H^1(\mathbb{R}^2). \quad (2.2)$$

Теперь перейдем в (2.2) к преобразованию Фурье. По теореме Планшереля получаем эквивалентное неравенство

$$\operatorname{Re} \sum_{i,j=1}^2 (R_{ij}^* \xi_i \tilde{u}, \xi_j \tilde{u})_{L_2(\mathbb{R}^2)} \geq c_1 \|\xi | \tilde{u}\|_{L_2(\mathbb{R}^2)}^2,$$

справедливое уже для всех функций $\tilde{u}(\xi)$ из пространства $L_2(\mathbb{R}^2)$, для которых конечен интеграл справа.

В левой части полученного неравенства введем новые обозначения. Так, имеем

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{Re}(R_{ii}^* \xi_i \tilde{u}, \xi_i \tilde{u})_{L_2(\mathbb{R}^2)} &= (R_{ii}^* \xi_i \tilde{u}, \xi_i \tilde{u})_{L_2(\mathbb{R}^2)} + \overline{(R_{ii}^* \xi_i \tilde{u}, \xi_i \tilde{u})_{L_2(\mathbb{R}^2)}} \\ &= ((R_{ii} + R_{ii}^*) \xi_i \tilde{u}, \xi_i \tilde{u})_{L_2(\mathbb{R}^2)} = (R'_i \xi_i \tilde{u}, \xi_i \tilde{u})_{L_2(\mathbb{R}^2)}, \end{aligned}$$

где самосопряженные операторы R'_1 и R'_2 определены по формулам

$$\begin{aligned} R'_1 &= R_{11} + R_{11}^* = 2\alpha_{10}I + p\alpha_{11}P + q\bar{\alpha}_{11}P^{-1}, \\ R'_2 &= R_{22} + R_{22}^* = 2\alpha_{20}I + q^{-1}\alpha_{21}P + p^{-1}\bar{\alpha}_{21}P^{-1} \end{aligned} \quad (2.3)$$

с коэффициентами

$$\alpha_{i0} = \operatorname{Re} a_{ii0}, \quad i = 1, 2, \quad \alpha_{11} = p^{-1}a_{111} + q^{-1}\bar{a}_{11,-1}, \quad \alpha_{21} = qa_{221} + p\bar{a}_{22,-1}. \quad (2.4)$$

Далее,

$$\begin{aligned} &2 \operatorname{Re}(R_{12}^* \xi_1 \tilde{u}, \xi_2 \tilde{u})_{L_2(\mathbb{R}^2)} + 2 \operatorname{Re}(R_{21}^* \xi_2 \tilde{u}, \xi_1 \tilde{u})_{L_2(\mathbb{R}^2)} \\ &= ((R_{12}^* + R_{21}) \xi_1 \tilde{u}, \xi_2 \tilde{u})_{L_2(\mathbb{R}^2)} + ((R_{21}^* + R_{12}) \xi_2 \tilde{u}, \xi_1 \tilde{u})_{L_2(\mathbb{R}^2)}, \end{aligned}$$

при этом

$$\begin{aligned} &\xi_2(R_{12}^* + R_{21})\xi_1 + \xi_1(R_{21}^* + R_{12})\xi_2 \\ &= \xi_2((a_{210} + \bar{a}_{120})I + (a_{211} + pq^{-1}\bar{a}_{12,-1})P + (a_{21,-1} + qp^{-1}\bar{a}_{121})P^{-1})\xi_1 \\ &\quad + \xi_1((a_{120} + \bar{a}_{210})I + (a_{121} + pq^{-1}\bar{a}_{21,-1})P + (a_{12,-1} + qp^{-1}\bar{a}_{211})P^{-1})\xi_2 \end{aligned}$$

$$= ((a_{210} + \bar{a}_{120})I + p^{-1}(a_{211} + pq^{-1}\bar{a}_{12,-1})P + p(a_{21,-1} + qp^{-1}\bar{a}_{121})P^{-1})\xi_1\xi_2 \\ + ((a_{120} + \bar{a}_{210})I + q(a_{121} + pq^{-1}\bar{a}_{21,-1})P + q^{-1}(a_{12,-1} + qp^{-1}\bar{a}_{211})P^{-1})\xi_1\xi_2.$$

Обозначая через

$$R = 2\beta_0 I + \beta_1 P + \bar{\beta}_1 P^{-1} \quad (2.5)$$

оператор с коэффициентами

$$\beta_0 = \operatorname{Re}(a_{120} + a_{210}), \quad \beta_1 = qa_{121} + q^{-1}\bar{a}_{12,-1} + p^{-1}a_{211} + p\bar{a}_{21,-1}, \quad (2.6)$$

будем иметь окончательно

$$2 \operatorname{Re} \sum_{i,j=1}^2 (R_{ij}^* \xi_i \tilde{u}, \xi_j \tilde{u})_{L_2(\mathbb{R}^2)} = ((\xi_1 R'_1 \xi_1 + \xi_2 R'_2 \xi_2 + R \xi_1 \xi_2) \tilde{u}, \tilde{u})_{L_2(\mathbb{R}^2)}.$$

Далее все условия будут выражаться через коэффициенты α_{i0} , α_{i1} , β_0 и β_1 .

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. Отметим, что функции, обращающиеся в нуль во всех четвертях плоскости $\mathbb{R}_\xi^2$, кроме одной, образуют инвариантное подпространство для функциональных операторов рассматриваемого класса. Поэтому достаточно проверить два неравенства

$$((\xi_1 R'_1 \xi_1 + \xi_2 R'_2 \xi_2 \pm R \xi_1 \xi_2) \tilde{u}, \tilde{u})_{L_2(Q)} \geq 2c_1 \| |\xi| \tilde{u} \|_{L_2(Q)}^2$$

лишь на функциях $\tilde{u}$ с носителями в первой четверти $Q = \{\xi \in \mathbb{R}^2 : \xi_1 > 0, \xi_2 > 0\}$.

Оформим промежуточный результат.

ЛЕММА 1. Пусть область Ω содержит начало координат. Тогда неравенство (1.2) равносильно двум неравенствам

$$((\xi_1 R'_1 \xi_1 + \xi_2 R'_2 \xi_2 \pm R \xi_1 \xi_2) \tilde{u}, \tilde{u})_{L_2(Q)} \geq 2c_1 \| |\xi| \tilde{u} \|_{L_2(Q)}^2 \quad (2.7)$$

на классе всех функций $\tilde{u} \in L_2(Q)$, для которых сходится стоящий справа в (2.7) интеграл, а операторы R'_1 , R'_2 и R заданы формулами (2.3)–(2.6).

Положив

$$s_1 = \frac{2 \ln q}{\ln pq}, \quad s_2 = \frac{2 \ln p}{\ln pq}, \quad s_1 + s_2 = 2,$$

сделаем в интегралах из неравенства (2.7) замену переменных

$$\xi_1 = \rho t^{s_1}, \quad \xi_2 = \rho t^{-s_2}, \quad \rho = \sqrt{\xi_1^{s_2} \xi_2^{s_1}}, \quad t = \sqrt{\frac{\xi_1}{\xi_2}},$$

диффеоморфно отображающую первую четверть Q на себя.

Якобиан такой замены равен

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \xi_1}{\partial t} & \frac{\partial \xi_1}{\partial \rho} \\ \frac{\partial \xi_2}{\partial t} & \frac{\partial \xi_2}{\partial \rho} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} s_1 \rho t^{s_1-1} & t^{s_1} \\ -s_2 \rho t^{-s_2-1} & t^{-s_2} \end{vmatrix} = 2 \rho t^{s_1-s_2-1}.$$

Если

$$\tilde{u}(\xi_1, \xi_2) = \tilde{u}(\rho t^{s_1}, \rho t^{-s_2}) = v(\rho, t) = v\left(\sqrt{\xi_1^{s_2} \xi_2^{s_1}}, \sqrt{\frac{\xi_1}{\xi_2}}\right),$$

то

$$P\tilde{u}(\xi_1, \xi_2) = \tilde{u}(q^{-1}\xi_1, p\xi_2) = v\left(\sqrt{(q^{-1}\xi_1)^{s_2}(p\xi_2)^{s_1}}, \sqrt{\frac{q^{-1}\xi_1}{p\xi_2}}\right) = v(\rho, (pq)^{-1/2}t),$$

поскольку $p^{s_1/2}q^{-s_2/2} = 1$. Таким образом, оператор P в новых переменных есть оператор сжатия (растяжения) по t , $t > 0$. Сохраняя для этого оператора прежнее обозначение, перепишем неравенства (2.7):

$$\begin{aligned} & \int_0^{+\infty} \rho^3 d\rho \int_0^{+\infty} (t^{s_1} R'_1 t^{s_1} + t^{-s_2} R'_2 t^{-s_2} \pm R t^{s_1-s_2}) v \bar{v} t^{s_1-s_2-1} dt \\ & \geq 2c_1 \int_0^{+\infty} \rho^3 d\rho \int_0^{+\infty} (t^{2s_1} + t^{-2s_2}) t^{s_1-s_2-1} |v|^2 dt. \end{aligned}$$

Далее положим $t = e^\tau$, $-\infty < \tau < +\infty$, и $v(\rho, t) = v(\rho, e^\tau) = w(\rho, \tau) = w(\rho, \ln t)$. Тогда $dt/t = d\tau$ и

$$Pv(\rho, t) = v(\rho, (pq)^{-1/2}t) = w(\rho, \ln((pq)^{-1/2}t)) = w(\rho, \tau - \ln \sqrt{pq}),$$

т.е. в результате сделанных преобразований оператор P превращается в оператор сдвига T на прямой,

$$Tw(\rho, \tau) = w(\rho, \tau - \ln \sqrt{pq}), \quad T^{-1}w(\rho, \tau) = w(\rho, \tau + \ln \sqrt{pq})$$

(переменная $\rho > 0$ в данном случае является параметром). Введя обозначения

$$h_1 = \frac{1}{2}(3s_1 - s_2), \quad h_2 = \frac{1}{2}(s_1 - 3s_2), \quad h = \frac{h_1 + h_2}{2} = s_1 - s_2, \quad h_2 < h < h_1,$$

перепишем

$$\begin{aligned} t^{2s_1-s_2} R'_1 t^{s_1} &= e^{h_1\tau} e^{h\tau/2} (2\alpha_{10}I + p\alpha_{11}T + q\bar{\alpha}_{11}T^{-1}) e^{-h\tau/2} e^{h_1\tau} \\ &= e^{h_1\tau} (2\alpha_{10}I + (pq)^{1/2}\alpha_{11}T + (pq)^{1/2}\bar{\alpha}_{11}T^{-1}) e^{h_1\tau} = e^{h_1\tau} R_1 e^{h_1\tau}, \\ t^{s_1-2s_2} R'_2 t^{-s_2} &= e^{h_2\tau} e^{h\tau/2} (2\alpha_{20}I + q^{-1}\alpha_{21}T + p^{-1}\bar{\alpha}_{21}T^{-1}) e^{-h\tau/2} e^{h_2\tau} \\ &= e^{h_2\tau} (2\alpha_{20}I + (pq)^{-1/2}\alpha_{21}T + (pq)^{-1/2}\bar{\alpha}_{21}T^{-1}) e^{h_2\tau} = e^{h_2\tau} R_2 e^{h_2\tau}, \\ t^{s_1-s_2} R t^{s_1-s_2} &= e^{h\tau} R e^{h\tau}, \end{aligned}$$

где теперь R_1 , R_2 и R представляют собой самосопряженные разностные операторы

$$\begin{aligned} R_1 &= 2\alpha_{10}I + (pq)^{1/2}\alpha_{11}T + (pq)^{1/2}\bar{\alpha}_{11}T^{-1}, \\ R_2 &= 2\alpha_{20}I + (pq)^{-1/2}\alpha_{21}T + (pq)^{-1/2}\bar{\alpha}_{21}T^{-1}, \\ R &= 2\beta_0I + \beta_1T + \bar{\beta}_1T^{-1}, \end{aligned} \tag{2.8}$$

а коэффициенты по-прежнему задаются формулами (2.4), (2.6).

Итак, неравенства (2.7) заменяются неравенствами

$$\begin{aligned} & \int_0^{+\infty} \rho^3 d\rho \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{h_1\tau} R_1 e^{h_1\tau} + e^{h_2\tau} R_2 e^{h_2\tau} \pm e^{h\tau} R e^{h\tau}) w \bar{w} d\tau \\ & \geq 2c_1 \int_0^{+\infty} \rho^3 d\rho \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{2h_1\tau} + e^{2h_2\tau}) |w|^2 d\tau, \end{aligned} \quad (2.9)$$

где $w(\rho, \tau)$ пробегает множество всех измеримых в полуплоскости $\{(\rho, \tau) \in \mathbb{R}^2 : \rho > 0\}$ функций, для которых конечен интеграл

$$\int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (\rho e^{h\tau} + \rho^3 (e^{2h_1\tau} + e^{2h_2\tau})) |w(\rho, \tau)|^2 d\tau d\rho.$$

Для выполнения (2.9) необходимо и достаточно, чтобы для внутреннего интеграла имела место соответствующая оценка

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{h_1\tau} R_1 e^{h_1\tau} + e^{h_2\tau} R_2 e^{h_2\tau} \pm e^{h\tau} R e^{h\tau}) w(\tau) \bar{w}(\tau) d\tau \\ & \geq 2c_1 \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{2h_1\tau} + e^{2h_2\tau}) |w(\tau)|^2 d\tau \end{aligned} \quad (2.10)$$

на множестве всех функций $w(\tau)$ на прямой, для которых конечен интеграл в правой части (2.10). Достаточность очевидна, а чтобы показать необходимость, предположим, что для некоторой функции w_0 из указанного класса выполняется противоположное неравенство

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{h_1\tau} R_1 e^{h_1\tau} + e^{h_2\tau} R_2 e^{h_2\tau} + e^{h\tau} R e^{h\tau}) w_0(\tau) \bar{w}_0(\tau) d\tau \\ & < 2c_1 \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{2h_1\tau} + e^{2h_2\tau}) |w_0(\tau)|^2 d\tau \end{aligned}$$

(со знаком $+$ перед R для определенности). Рассмотрим тогда функцию

$$w(\rho, \tau) = \begin{cases} w_0(\tau), & 0 < \rho < 1, \\ 0, & \rho > 1. \end{cases}$$

Она принадлежит нужному пространству, поскольку $2h_1 < h < 2h_2$, и для нее неравенство (2.9) нарушено.

После введения обозначения $z(\tau) = e^{h\tau} w(\tau)$ оценка (2.10) принимает более удобный вид

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (e^\tau R_1 e^\tau + e^{-\tau} R_2 e^{-\tau} \pm R) z(\tau) \bar{z}(\tau) d\tau \geq 2c_1 \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{2\tau} + e^{-2\tau}) |z(\tau)|^2 d\tau \quad (2.11)$$

(заметим, что $(h_1 - h_2)/2 = 1$). Нами доказана

ЛЕММА 2. Пусть область Ω содержит начало координат. Тогда неравенство (1.2) равносильно двум неравенствам (2.11) на множестве всех функций $z(\tau)$ таких, что функции $e^{|\tau|} z(\tau)$ принадлежат $L_2(\mathbb{R})$. Операторы R_1 , R_2 и R заданы формулами (2.8) и (2.4), (2.6).

СЛЕДСТВИЕ 2.1. Если выполнено неравенство (1.2), а Ω содержит начало координат, то разностные операторы $R_1, R_2: L_2(\mathbb{R}) \rightarrow L_2(\mathbb{R})$ положительно определены, или, что то же самое,

$$\alpha_{10} > (pq)^{1/2} |\alpha_{11}|, \quad \alpha_{20} > (pq)^{-1/2} |\alpha_{21}|.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для рассматриваемых в лемме 2 функций $z(\tau)$ преобразование Фурье $z(\tau) \mapsto \widehat{z}(\lambda)$ определено в полосе $-1 \leq \operatorname{Im} \lambda \leq 1$, и неравенства (2.11) можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} (r_1(\lambda) |\widehat{z}(\lambda + i)|^2 + r_2(\lambda) |\widehat{z}(\lambda - i)|^2 \pm r(\lambda) |\widehat{z}(\lambda)|^2) d\lambda \\ & \geq 2c_1 \int_{-\infty}^{+\infty} (|\widehat{z}(\lambda + i)|^2 + |\widehat{z}(\lambda - i)|^2) d\lambda, \end{aligned} \quad (2.12)$$

где $r(\lambda)$, $r_1(\lambda)$ и $r_2(\lambda)$ — это обычные символы разностных операторов,

$$\begin{aligned} r(\lambda) &= 2\beta_{i0} + \beta_{i1}(pq)^{-i\lambda/2} + \overline{\beta}_{i1}(pq)^{i\lambda/2}, \\ r_1(\lambda) &= 2\alpha_{10} + \alpha_{11}(pq)^{(1-i\lambda)/2} + \overline{\alpha}_{11}(pq)^{(1+i\lambda)/2}, \\ r_2(\lambda) &= 2\alpha_{20} + \alpha_{21}(pq)^{-(1+i\lambda)/2} + \overline{\alpha}_{21}(pq)^{-(1-i\lambda)/2}. \end{aligned}$$

Для последовательности функций

$$z_N(\tau) = (\pi N)^{-1/4} \exp\left(-\frac{(\tau - N)^2}{2N} - \frac{3N}{2} + i\lambda_0\right)$$

выполнены соотношения

$$\begin{aligned} \widehat{z}_N(\lambda) &= \left(\frac{N}{\pi}\right)^{1/4} \exp\left(-\frac{N}{2}(\lambda - \lambda_0)^2 - \frac{3N}{2} - iN(\lambda - \lambda_0)\right), \\ |\widehat{z}_N(\lambda)|^2 &= \sqrt{\frac{N}{\pi}} \exp(-3N - N(\lambda - \lambda_0)^2), \quad |\widehat{z}_N(\lambda + i)|^2 = \sqrt{\frac{N}{\pi}} \exp(-N(\lambda - \lambda_0)^2), \\ |\widehat{z}_N(\lambda - i)|^2 &= \sqrt{\frac{N}{\pi}} \exp(-4N - N(\lambda - \lambda_0)^2), \end{aligned}$$

откуда видно, что левая часть неравенства (2.12) стремится к $r_1(\lambda_0)$, а правая — к $2c_1$ при $N \rightarrow \infty$. Получили, что $r_1(\lambda) \geq 2c_1$ на $\mathbb{R}$. Аналогично при помощи последовательности

$$(\pi N)^{-1/4} \exp\left(-\frac{(\tau + N)^2}{2N} - \frac{3N}{2} + i\lambda_0\right)$$

показывается, что $r_2(\lambda) \geq 2c_1$ на $\mathbb{R}$.

Сформулируем центральную теорему.

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть область Ω содержит начало координат. Неравенство (1.2) выполнено тогда и только тогда, когда $\beta_0^2 < \alpha_{10}\alpha_{20}$ и самосопряженные разностные операторы

$$I + g^\pm(\tau)T + T^{-1}\overline{g}^\pm(\tau): L_2(\mathbb{R}) \rightarrow L_2(\mathbb{R}), \quad (2.13)$$

где

$$g^{\pm}(\tau) = \frac{\alpha_{11}e^{2\tau} + \alpha_{21}e^{-2\tau} \pm \beta_1}{2\sqrt{(\alpha_{10}e^{2\tau} + \alpha_{20}e^{-2\tau} \pm \beta_0)((pq)^{-1}\alpha_{10}e^{2\tau} + pq\alpha_{20}e^{-2\tau} \pm \beta_0)}}, \quad (2.14)$$

положительно определены.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Подставим в (2.11) вместо функции $z(\tau)$ функцию $z(\tau)/\operatorname{ch} \tau$, где теперь $z(\tau)$ пробегает все пространство $L_2(\mathbb{R})$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{e^{\tau}}{\operatorname{ch} \tau} R_1 \frac{e^{\tau}}{\operatorname{ch} \tau} + \frac{e^{-\tau}}{\operatorname{ch} \tau} R_2 \frac{e^{-\tau}}{\operatorname{ch} \tau} \pm \frac{1}{\operatorname{ch} \tau} R \frac{1}{\operatorname{ch} \tau} \right) z(\tau) \bar{z}(\tau) d\tau \geq 4c_1 \|z\|_{L_2(\mathbb{R})}^2. \quad (2.15)$$

Таким образом, стоящий в скобках разностный оператор положительно определен. Приводя в нем подобные члены, видим, что он равен

$$\frac{g_0^{\pm}(\tau)}{\operatorname{ch}^2 \tau} I + \frac{g_1^{\pm}(\tau)}{\operatorname{ch} \tau \operatorname{ch}(\tau - \ln \sqrt{pq})} T + T^{-1} \frac{\bar{g}_1^{\pm}(\tau)}{\operatorname{ch} \tau \operatorname{ch}(\tau - \ln \sqrt{pq})},$$

где

$$g_0^{\pm}(\tau) = 2(\alpha_{10}e^{2\tau} + \alpha_{20}e^{-2\tau} \pm \beta_0), \quad g_1^{\pm}(\tau) = \alpha_{11}e^{2\tau} + \alpha_{21}e^{-2\tau} \pm \beta_1.$$

На функциях, носитель которых лежит на отрезке длины $\ln \sqrt{pq}$, неравенство (2.15) превращается в

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g_0^{\pm}(\tau)}{\operatorname{ch}^2 \tau} |z(\tau)|^2 d\tau \geq 4c_1 \|z\|_{L_2(\mathbb{R})}^2,$$

откуда немедленно следует положительность функций $g_0^{\pm}(\tau)$, т.е. $\beta_0^2 < \alpha_{10}\alpha_{20}$. Но тогда рассматриваемый разностный оператор можно представить в виде

$$\frac{\sqrt{g_0^{\pm}(\tau)}}{\operatorname{ch} \tau} [I + g^{\pm}(\tau)T + T^{-1}\bar{g}^{\pm}(\tau)] \frac{\sqrt{g_0^{\pm}(\tau)}}{\operatorname{ch} \tau}$$

(см. формулу (2.14)).

Итак, вопрос о выполнении неравенства типа Гординга сведен к вопросу о положительной определенности самосопряженного разностного оператора (2.13) на прямой с гладким стабилизирующим на бесконечности коэффициентом $g^{\pm}(\tau)$. В этом состоит основной результат работы.

При получении следующих ниже достаточных условий положительной определенности операторов (2.13) использован подход, предложенный в работе [4].

ЛЕММА 3. Если существуют такие положительные числа $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ и такая измеримая вещественная функция $\delta(\tau)$, что при почти всех $\tau \in \mathbb{R}$ выполнены условия

$$\delta(\tau) \geq \varepsilon_1, \quad |g^{\pm}(\tau)|^2 \leq \delta(\tau - \ln \sqrt{pq})[1 - \delta(\tau) - \varepsilon_2], \quad (2.16)$$

то разностные операторы (2.13) положительно определены.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Наряду с оператором (2.13), будем рассматривать матричный оператор

$$\begin{bmatrix} (1 - \delta)I & g^{\pm}T \\ T^{-1}\bar{g}^{\pm} & \delta I \end{bmatrix} : L_2^2(\mathbb{R}) \rightarrow L_2^2(\mathbb{R}), \quad (2.17)$$

где $\delta = \delta(\tau)$ – измеримая функция на прямой, удовлетворяющая условиям (2.16). Убедимся, что эти условия обеспечивают положительную определенность оператора (2.17), которое не слабее, чем положительная определенность оператора (2.13). Действительно, квадратичная форма матричного оператора,

$$\begin{aligned} & \left(\begin{bmatrix} (1-\delta)I & g^\pm T \\ T^{-1}\bar{g}^\pm & \delta I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \right)_{L_2^2(\mathbb{R})} \\ &= ((1-\delta)z_1, z_1)_{L_2(\mathbb{R})} + (\delta z_2, z_2)_{L_2(\mathbb{R})} + 2 \operatorname{Re}(g^\pm T z_2, z_1)_{L_2(\mathbb{R})}, \end{aligned}$$

превращается на подпространстве $z_1 = z_2 = z$ в

$$\|z\|_{L_2(\mathbb{R})}^2 + 2 \operatorname{Re}(g^\pm T z, z)_{L_2(\mathbb{R})},$$

что совпадает с квадратичной формой оператора $I + g^\pm T + T^{-1}\bar{g}^\pm$.

Достаточно представить оператор (2.17) в виде

$$\begin{bmatrix} (1-\delta)I & gT \\ T^{-1}\bar{g} & \delta I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & N \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ N^* & I \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

с положительно определенными операторами M_1, M_2 . Соотношение (2.18) сводится к системе уравнений

$$M_1 + N M_2 N^* = (1-\delta)I, \quad N M_2 = gT, \quad M_2 = \delta I,$$

из которой все операторы легко находятся:

$$\begin{aligned} M_2 &= \delta I, \quad N = gT\delta^{-1} = g(\tau)\delta^{-1}(\tau - \ln \sqrt{pq})T, \\ M_1 &= (1-\delta(\tau))I - g(\tau)\delta^{-1}(\tau - \ln \sqrt{pq})T\delta(\tau)T^{-1}\bar{g}(\tau)\delta^{-1}(\tau - \ln \sqrt{pq}) \\ &= (1-\delta(\tau) - |g(\tau)|^2\delta^{-1}(\tau - \ln \sqrt{pq}))I. \end{aligned}$$

В условиях леммы операторы M_1 и M_2 положительно определены, так что матричный оператор (2.17) положительно определен.

Легко проверяется, что условие

$$|g^\pm(\tau)| < 1, \quad \tau \in \mathbb{R},$$

является необходимым для положительной определенности оператора (2.13). Очевидное достаточное условие

$$\sup_{\tau \in \mathbb{R}} |g^\pm(\tau)| < \frac{1}{2} \quad (2.19)$$

получается, если положить $\delta(\tau) \equiv 1/2$ в лемме 3.

Приведем сейчас еще одно, более тонкое, нежели (2.19), достаточное условие, основанное на применении леммы 3.

СЛЕДСТВИЕ 2.2. Пусть

$$\varkappa = \sup_{\tau \in \mathbb{R}} (|g^\pm(\tau)| + |g^\pm(\tau + \ln \sqrt{pq})|) < 1. \quad (2.20)$$

Тогда разностные операторы (2.13) положительно определены.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выберем числа $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ так, чтобы выполнялись неравенства

$$0 < \varepsilon_1 < 1 - \varkappa, \quad 0 < \varepsilon_2 < \frac{\varepsilon_1(1 - \varkappa - \varepsilon_1)}{1 + \varepsilon_1}.$$

Положив в лемме 3

$$\varepsilon = \varepsilon_2, \quad \delta(\tau) = |g^\pm(\tau + \ln \sqrt{pq})| + \varepsilon_1,$$

будем иметь

$$\begin{aligned} & \delta(\tau - \ln \sqrt{pq})[1 - \delta(\tau) - \varepsilon_2] \\ &= (|g^\pm(\tau)| + \varepsilon_1)(1 - |g^\pm(\tau + \ln \sqrt{pq})| - (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)) \\ &= |g^\pm(\tau)|(1 - |g^\pm(\tau + \ln \sqrt{pq})|) \\ &\quad + \varepsilon_1(1 - |g^\pm(\tau)| - |g^\pm(\tau + \ln \sqrt{pq})|) - \varepsilon_2|g^\pm(\tau)| - \varepsilon_1(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \\ &\geq |g^\pm(\tau)|(1 - |g^\pm(\tau + \ln \sqrt{pq})|) + \varepsilon_1(1 - \varkappa - \varepsilon_1) - \varepsilon_2(1 + \varepsilon_1) \\ &\geq |g^\pm(\tau)|(1 - |g^\pm(\tau + \ln \sqrt{pq})|). \end{aligned}$$

Поэтому достаточно проверить неравенство

$$|g^\pm(\tau)|^2 \leq |g^\pm(\tau)|(1 - |g^\pm(\tau + \ln \sqrt{pq})|),$$

а оно выполнено в силу предположения (2.20).

ПРИМЕР 2.1. Рассмотрим уравнение

$$-\Delta u + au_{x_1x_2}(q^{-1}x_1, px_2) + \bar{b}u_{x_1x_2}(qx_1, p^{-1}x_2) = f.$$

Выпишем условия на коэффициенты $a, b \in \mathbb{C}$, гарантирующие выполнение неравенства (1.2).

В исходных обозначениях имеем

$$a_{110} = a_{220} = 1, \quad a_{111} = a_{11,-1} = a_{221} = a_{22,-1} = a_{120} = a_{210} = 0.$$

Можно считать, что $a_{121} = a/p$, $a_{12,-1} = pb$, в то время, как $a_{211} = a_{21,-1} = 0$. Тогда

$$\alpha_{11} = \alpha_{21} = 0, \quad \alpha_{10} = \alpha_{20} = 1, \quad \beta_0 = 0$$

и, таким образом,

$$g^\pm(\tau) = \frac{\pm\beta_1}{2\sqrt{\operatorname{ch} 2\tau \operatorname{ch}(2\tau - \ln pq)}},$$

где $\beta_1 = qa/p + pb/q$.

При $\tau = (\ln pq)/4$ знаменатель этой дроби достигает своего минимума, равного $(pq + 1)/\sqrt{pq}$. Поэтому наибольшее значение функции $|g^\pm(\tau)|$ равно $|\beta_1|\sqrt{pq}/(pq + 1)$, и (2.19) в данном случае означает, что

$$|\beta_1| < \frac{pq + 1}{2\sqrt{pq}},$$

т.е.

$$|q^2a + p^2b| < (pq + 1)\frac{\sqrt{pq}}{2}.$$

Чтобы воспользоваться следствием 2.2, нужно найти наибольшее значение функции

$$\begin{aligned} & |g^{\pm}(\tau)| + |g^{\pm}(\tau + \ln \sqrt{pq})| \\ &= \frac{|\beta_1|}{2\sqrt{\operatorname{ch} 2\tau \operatorname{ch}(2\tau - \ln pq)}} + \frac{|\beta_1|}{2\sqrt{\operatorname{ch} 2\tau \operatorname{ch}(2\tau + \ln pq)}} \\ &= \frac{|\beta_1|}{\sqrt{2(\operatorname{ch}(4\tau - \ln pq) + \operatorname{ch} \ln pq)}} + \frac{|\beta_1|}{\sqrt{2(\operatorname{ch}(4\tau + \ln pq) + \operatorname{ch} \ln pq)}}. \end{aligned}$$

3. Разрешимость и спектр краевой задачи. Будем рассматривать задачу (1.1) в предположении выполнения неравенства (1.2). Уравнение тогда принято называть сильно эллиптическим. При этом из рассуждений предыдущего пункта видно, что неравенство (1.2) выполняется для рассматриваемого уравнения при постоянной c_2 , равной нулю. Будем считать также область Ω ограниченной.

С задачей (1.1) свяжем непрерывную на пространстве $\dot{H}^1(\Omega)$ полуторалинейную форму

$$a_R[u, v] = \sum_{i,j=1}^2 (R_{ij}u_{x_i}, v_{x_j})_{L_2(\Omega)}, \quad u, v \in \dot{H}^1(\Omega).$$

Очевидно, существует постоянная $M > 0$ такая, что

$$|a_R[u, v]| \leq M \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)}, \quad u, v \in \dot{H}^1(\Omega). \quad (3.1)$$

Кроме того, неравенство (1.2), левая часть которого совпадает на гладких финитных функциях с $\operatorname{Re} a_R[u, u]$, обеспечивает оценку

$$\operatorname{Re} a_R[u, u] \geq c_1 \|u\|_{H^1(\Omega)}^2, \quad u \in \dot{H}^1(\Omega), \quad (3.2)$$

на всем пространстве $\dot{H}^1(\Omega)$.

Функция $u \in \dot{H}^1(\Omega)$ называется *обобщенным решением* задачи (1.1), если интегральное тождество

$$a_R[u, v] = (f, v)_{L_2(\Omega)}$$

выполнено для любой функции $v \in \dot{H}^1(\Omega)$.

Будем рассматривать также неограниченный оператор

$$\mathcal{A}_R: \mathcal{D}(\mathcal{A}_R) \subset L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega),$$

область определения $\mathcal{D}(\mathcal{A}_R)$ которого состоит из всевозможных обобщенных решений задачи (1.1), когда f пробегает все пространство $L_2(\Omega)$. Если u – обобщенное решение, отвечающее правой части f , то полагаем $\mathcal{A}_R u = f$ (оператор $\mathcal{A}_R$, очевидно, корректно определен на $\mathcal{D}(\mathcal{A}_R)$). Понятно, что $C_0^\infty(\Omega) \subset \mathcal{D}(\mathcal{A}_R) \subset \dot{H}^1(\Omega)$ и $\mathcal{A}_R u = A_R u$, если $u \in C_0^\infty(\Omega)$.

Рассуждения этого пункта хорошо известны, они носят достаточно общий характер и опираются на неравенство (1.2), позволяющее ввести в пространстве $\dot{H}^1(\Omega)$ связанное с оператором в уравнении эквивалентное скалярное произведение.

ЛЕММА 4. Формула

$$(u, v)'_{\dot{H}^1(\Omega)} = \frac{1}{2} (a_R[u, v] + \overline{a_R[v, u]}) \quad (3.3)$$

задает эквивалентное скалярное произведение на пространстве $\dot{H}^1(\Omega)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Правая часть (3.3) представляет собой непрерывную на $\dot{H}^1(\Omega)$ эрмитову полуторалинейную форму, причем

$$\frac{1}{2}(a_R[u, u] + \overline{a_R[u, u]}) = \operatorname{Re} a_R[u, u] \geq c_1 \|u\|_{\dot{H}^1(\Omega)}^2$$

в силу (3.2).

ЛЕММА 5. Существует (единственный) линейный ограниченный оператор

$$K: \dot{H}^1(\Omega) \rightarrow \dot{H}^1(\Omega)$$

такой, что

$$(u, Kv)'_{\dot{H}^1(\Omega)} = \frac{1}{2i}(a_R[u, v] - \overline{a_R[v, u]}) \quad (3.4)$$

для всех $u, v \in \dot{H}^1(\Omega)$. При этом оператор K является самосопряженным,

$$(Ku, v)'_{\dot{H}^1(\Omega)} = (u, Kv)'_{\dot{H}^1(\Omega)},$$

и $\|K\|' \leq M/c_1$, где M и c_1 – постоянные из неравенств (3.1) и (3.2), а $\|\cdot\|'$ обозначает операторную норму, отвечающую норме $\|\cdot\|'_{\dot{H}^1(\Omega)}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При фиксированной функции $v \in \dot{H}^1(\Omega)$ правая часть равенства (3.4) представляет собой непрерывный линейный функционал относительно u на пространстве $\dot{H}^1(\Omega)$, рассматриваемом с эквивалентным скалярным произведением $(\cdot, \cdot)'_{\dot{H}^1(\Omega)}$:

$$\left| \frac{1}{2i}(a_R[u, v] - \overline{a_R[v, u]}) \right| \leq M \|v\|_{\dot{H}^1(\Omega)} \|u\|_{\dot{H}^1(\Omega)} \leq \frac{M}{c_1} \|v\|'_{\dot{H}^1(\Omega)} \|u\|'_{\dot{H}^1(\Omega)}.$$

По теореме Рисса существует единственный элемент $Kv \in \dot{H}^1(\Omega)$, для которого равенство (3.4) справедливо при всех u из $\dot{H}^1(\Omega)$. Отображение $v \mapsto Kv$, очевидно, линейно, при этом $\|Kv\|'_{\dot{H}^1(\Omega)} \leq (M/c_1) \|v\|'_{\dot{H}^1(\Omega)}$, откуда вытекает оценка нормы оператора K , $\|K\|' \leq M/c_1$.

Наконец,

$$(v, Ku)'_{\dot{H}^1(\Omega)} = \frac{1}{2i}(a_R[v, u] - \overline{a_R[u, v]}),$$

так что

$$(Ku, v)'_{\dot{H}^1(\Omega)} = \overline{(v, Ku)'_{\dot{H}^1(\Omega)}} = -\frac{1}{2i}(\overline{a_R[v, u]} - a_R[u, v]) = (u, Kv)'_{\dot{H}^1(\Omega)}.$$

ТЕОРЕМА 3.1. Для любой функции $f \in L_2(\Omega)$ задача (1.1) имеет единственное обобщенное решение $u \in \dot{H}^1(\Omega)$, причем $\|u\|'_{\dot{H}^1(\Omega)} \leq (1/\sqrt{c_1}) \|f\|_{L_2(\Omega)}$.

Спектр $\sigma(\mathcal{A}_R)$ оператора $\mathcal{A}_R$ дискретный и содержится во множестве

$$\sigma(\mathcal{A}_R) \subset \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \lambda > 0, |\arg \lambda| \leq \arctg \frac{M}{c_1} \right\}.$$

Для любого числа $\lambda \in \mathbb{C}$ оператор $\lambda I - \mathcal{A}_R: L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)$ фредгольмов. Если $\lambda \notin \sigma(\mathcal{A}_R)$, то резольвента $(\lambda I - \mathcal{A}_R)^{-1}$ есть компактный оператор в $L_2(\Omega)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим уравнение

$$\mathcal{A}_R u = f, \quad u \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_R), \quad f \in L_2(\Omega).$$

По определению, $a_R[u, v] = (f, v)_{L_2(\Omega)}$, или

$$\frac{1}{2}(a_R[u, v] + \overline{a_R[v, u]}) + i \frac{1}{2i}(a_R[u, v] - \overline{a_R[v, u]}) = (f, v)_{L_2(\Omega)}$$

для всех $v \in \mathring{H}^1(\Omega)$. В силу лемм 4 и 5 последнее соотношение можно переписать следующим образом:

$$(u, v)'_{\mathring{H}^1(\Omega)} + i(Ku, v)'_{\mathring{H}^1(\Omega)} = (f, v)_{L_2(\Omega)}. \quad (3.5)$$

Правая часть этого равенства является непрерывным антилинейным функционалом относительно v на пространстве $\mathring{H}^1(\Omega)$ и по теореме Рисса порождает ограниченный линейный оператор $\Lambda: L_2(\Omega) \rightarrow \mathring{H}^1(\Omega)$ такой, что

$$(\Lambda f, v)'_{\mathring{H}^1(\Omega)} = (f, v)_{L_2(\Omega)}, \quad v \in \mathring{H}^1(\Omega).$$

Таким образом, исходное уравнение равносильно уравнению $(I + iK)u = F$ в $\mathring{H}^1(\Omega)$ с правой частью $F = \Lambda f$. Поскольку оператор iK кососимметрический, его спектр лежит на мнимой оси, и существует ограниченный обратный оператор

$$(I + iK)^{-1}: \mathring{H}^1(\Omega) \rightarrow \mathring{H}^1(\Omega),$$

т.е. уравнение имеет единственное решение

$$u = (I + iK)^{-1}F = (I + iK)^{-1}\Lambda f.$$

Чтобы оценить норму этого решения, подставим в (3.5) $v = u$. Будем иметь

$$\|u\|_{\mathring{H}^1(\Omega)}'^2 + i(Ku, u)'_{\mathring{H}^1(\Omega)} = (f, u)_{L_2(\Omega)},$$

откуда с учетом вещественности $(Ku, u)'_{\mathring{H}^1(\Omega)}$ получаем оценку

$$\|u\|_{\mathring{H}^1(\Omega)}'^2 \leq |(f, u)_{L_2(\Omega)}| \leq \|f\|_{L_2(\Omega)} \|u\|_{L_2(\Omega)}.$$

Поскольку

$$\|u\|_{\mathring{H}^1(\Omega)}'^2 = \operatorname{Re} a_R[u, u] + c_2 \|u\|_{L_2(\Omega)}^2 \geq c_1 \|u\|_{\mathring{H}^1(\Omega)}^2 \geq c_1 \|u\|_{L_2(\Omega)}^2,$$

выводим $\|u\|_{\mathring{H}^1(\Omega)}' \leq (1/\sqrt{c_1})\|f\|_{L_2(\Omega)}$.

Итак, точка $\lambda = 0$ является резольвентной точкой оператора $\mathcal{A}_R$, и оператор $\mathcal{A}_R^{-1}$ компактен в силу компактного вложения $\mathring{H}^1(\Omega)$ в $L_2(\Omega)$. Отсюда следует, что оператор $\mathcal{A}_R$ имеет дискретный спектр, т.е. спектр, состоящий из изолированных собственных значений конечной кратности. Чтобы в этом убедиться, достаточно записать оператор $\lambda I - \mathcal{A}_R$ для произвольного $\lambda \in \mathbb{C}$ в виде

$$\lambda I - \mathcal{A}_R = -(I - \lambda \mathcal{A}_R^{-1})\mathcal{A}_R,$$

сводящем вопрос о разрешимости к уравнению с оператором “тождественный плюс компактный”. Из этого представления очевидным образом вытекает и фредгольмовость оператора $\lambda I - \mathcal{A}_R$.

Убедимся теперь, что все собственные значения лежат в угле, охватывающем положительную вещественную полуось. Пусть $\mathcal{A}_R u = \lambda u$ при ненулевой функции $u \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_R)$, которую можно нормировать: $\|u\|'_{\dot{H}^1(\Omega)} = 1$. Имеем

$$(u, v)'_{\dot{H}^1(\Omega)} + i(Ku, v)'_{\dot{H}^1(\Omega)} = \lambda(\Lambda u, v)'_{\dot{H}^1(\Omega)}, \quad v \in \dot{H}^1(\Omega).$$

Полагая теперь $v = u$, будем иметь

$$1 + i(Ku, u)'_{\dot{H}^1(\Omega)} = \mu(\Lambda u, u)'_{\dot{H}^1(\Omega)} + i\nu(\Lambda u, u)'_{\dot{H}^1(\Omega)}, \quad (3.6)$$

где μ и ν обозначают действительную и мнимую части числа λ .

Отметим, что сужение оператора Λ на пространство $\dot{H}^1(\Omega)$ (будем обозначать это сужение Λ_0) является положительным и компактным оператором в $\dot{H}^1(\Omega)$. Действительно, по определению,

$$(\Lambda_0 u, u)'_{\dot{H}^1(\Omega)} = \|u\|_{L_2(\Omega)}^2 > 0, \quad u \neq 0,$$

а компактность Λ_0 следует из компактности вложения $\dot{H}^1(\Omega)$ в $L_2(\Omega)$. Приравняем действительные и мнимые части равенства (3.6):

$$1 = \mu(\Lambda_0 u, u)'_{\dot{H}^1(\Omega)}, \quad (Ku, u)'_{\dot{H}^1(\Omega)} = \nu(\Lambda_0 u, u)'_{\dot{H}^1(\Omega)}.$$

Отсюда следует, что действительная и мнимая части собственного значения удовлетворяют соотношениям

$$\mu > 0, \quad \frac{\nu}{\mu} = (Ku, u)'_{\dot{H}^1(\Omega)}.$$

Поскольку u лежит на единичной сфере, имеем $|(Ku, u)'_{\dot{H}^1(\Omega)}| \leq \|K\|'$. Из леммы 5 выводим $|\nu|/\mu \leq M/c_1$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] М. И. Вишик, “О сильно эллиптических системах дифференциальных уравнений”, *Матем. сб.*, **29:3** (1951), 615–676.
- [2] L. Gårding, “Dirichlet’s problem for linear elliptic partial differential equations”, *Math. Scand.*, **1** (1953), 55–72.
- [3] A. Skubachevskii, “The first boundary value problem for strongly elliptic differential-difference equations”, *J. Differential Equations*, **63:3** (1986), 332–361.
- [4] Л. Е. Россовский, “Коэрцитивность функционально-дифференциальных уравнений”, *Матем. заметки*, **59:1** (1996), 103–113.
- [5] Л. Е. Россовский, “Краевые задачи для эллиптических функционально-дифференциальных уравнений с растяжением и сжатием аргументов”, *Тр. ММО*, **62**, 2001, 199–228.
- [6] Л. Е. Россовский, “О спектральной устойчивости функционально-дифференциальных уравнений”, *Матем. заметки*, **90:6** (2011), 885–901.
- [7] Л. Е. Россовский, “К вопросу о коэрцитивности функционально-дифференциальных уравнений”, *Труды Шестой Международной конференции по дифференциальным и функционально-дифференциальным уравнениям (Москва, 14–21 августа, 2011). Часть 1*, СМФН, **45**, РУДН, М., 2012, 122–131.

- [8] T. Kato, J. B. McLeod, “The functional-differential equation $y'(x) = ay(\lambda x) + by(x)$ ”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **77** (1971), 891–937.
- [9] J. R. Ockendon, A. B. Tayler, “The dynamics of a current collection system for an electric locomotive”, *Proc. R. Soc. London. Ser. A*, **322** (1971), 447–468.
- [10] В. А. Амбарцумян, “К теории флуктуаций яркости в млечном пути”, *Докл. АН СССР*, **44** (1944), 223–226.
- [11] A. J. Hall, G. C. Wake, “A functional differential equation arising in the modelling of cell growth”, *J. Austral. Math. Soc. Ser. B*, **30**:4 (1989), 424–435.
- [12] К. Кук, Л. Е. Россовский, А. Л. Скубачевский, “Краевая задача для функционально-дифференциального уравнения с линейно преобразованным аргументом”, *Дифференц. уравнения*, **31**:8 (1995), 1348–1352.
- [13] Д. А. Неверова, А. Л. Скубачевский, “О классических и обобщенных решениях краевых задач для дифференциально-разностных уравнений с переменными коэффициентами”, *Матем. заметки*, **94**:5 (2013), 702–719.
- [14] А. М. Селицкий, “Пространство начальных данных 3-й краевой задачи для параболического дифференциально-разностного уравнения в одномерном случае”, *Матем. заметки*, **92**:4 (2012), 636–640.
- [15] А. М. Селицкий, “Пространство начальных данных 2-й краевой задачи для параболического дифференциально-разностного уравнения в липшицевых областях”, *Матем. заметки*, **94**:3 (2013), 477–480.

Л. Е. Россовский

Российский университет дружбы народов, г. Москва

E-mail: lrossovskii@gmail.com

Поступило

09.10.2014

А. Л. Тасевич

Российский университет дружбы народов, г. Москва

E-mail: atasevich@gmail.com