Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Ю. Артамонов, Прямая оценка типа Джексона для
общего модуля гладкости в непериодическом случае,
Матем. заметки, 2015, том 97, выпуск 5, 794–797

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10656>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.253.173

26 апреля 2023 г., 15:16:38

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

Прямая оценка типа Джексона для общего модуля гладкости в непериодическом случае

С. Ю. Артамонов

Вопросам приближения целыми функциями экспоненциального типа посвящена обширная литература (см., например, [1]–[6]). В случае приближения функций, заданных на конечномерном евклидовом пространстве, как известно, класс тригонометрических полиномов порядка $\leq \sigma$ уже не пригоден в качестве класса аппроксимирующих функций и он заменяется более обширным классом функций, представляющих сужение на вещественную ось целых функций экспоненциального типа порядка $\leq \sigma$ [1].

Данное сообщение посвящено вопросам о возможности переноса прямой оценки типа Джексона для общего модуля гладкости, полученной в работе [7] в периодическом случае, на случай приближения целыми функциями экспоненциального типа и является продолжением исследований, начатых в работах [2] и [3], в которых изучены вопросы сходимости методов приближения и эквивалентность их аппроксимационной ошибки K -функционалам в непериодическом случае. Заметим, что данная задача не является тривиальной из-за бесконечности меры области определения функций, а также замены в определении модуля гладкости бесконечных сумм и коэффициентов Фурье на преобразование Фурье, что приводит к вопросам корректности таких определений и требует привлечения аппарата обобщенных функций.

Перейдем к точным формулировкам. Рассматриваются пространства $L_p(\mathbb{R})$ при $1 \leq p \leq +\infty$. В случае $p = +\infty$ рассматривается класс $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ ограниченных равномерно непрерывных функций, для которых

$$\|f\|_{\mathcal{C}} = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)| < +\infty.$$

Следуя [2], обозначим символом B_{σ}^p пространства Бернштейна, состоящие, по определению, из функций, принадлежащих $L_p(\mathbb{R})$, которые являются сужением на $\mathbb{R}$ целых функций экспоненциального типа порядка $\leq \sigma$, определенных на $\mathbb{C}$, т.е.

$$B_{\sigma}^p = \{f = F|_{\mathbb{R}} \in L_p(\mathbb{R}) : F \text{ аналитична на } \mathbb{C}, |F(x + iy)| \leq A \cdot e^{\sigma|y|}\},$$

где $A > 0$ не зависит от $z = x + iy$.

Как обычно, наилучшее приближение функции $f \in L_p(\mathbb{R})$ порядка $\sigma > 0$ задается

$$E_{\sigma}(f)_p = \inf_{g \in B_{\sigma}^p} \|f - g\|_p.$$

Символами S и S' будем обозначать пространство Шварца и его двойственное соответственно. Прямое и обратное преобразования Фурье для $g \in S'$ задаются как обычно:

$$\begin{aligned} \langle Fg, \varphi \rangle &= \langle g, F\varphi \rangle, & \varphi \in S, \\ \langle F^{-1}g, \varphi \rangle &= \langle g, F^{-1}\varphi \rangle, & \varphi \in S. \end{aligned}$$

Нам будет удобно работать с эквивалентным определением пространств Бернштейна. В силу теоремы Пэли–Винера–Шварца [8; с. 181] пространства B_σ^p также могут быть описаны в терминах преобразования Фурье:

$$\begin{aligned} B_\sigma^p &= \{f \in L_p(\mathbb{R}), \supp F^{-1}f \subset [-\sigma, \sigma]\}, & 1 \leq p < +\infty, \\ B_\sigma^p &= \{f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}), \supp F^{-1}f \subset [-\sigma, \sigma]\}, & p = +\infty. \end{aligned}$$

Благодаря указанному свойству, класс функций B_σ^p часто называют функциями с ограниченным спектром.

Сверточные интегралы $\mathcal{M}_\sigma^{(\phi)}$, являющиеся аналогом средних Фурье в периодическом случае (см. [2], [9], [10]), определяются как свертка функции $f \in L_p(\mathbb{R})$ с ядром

$$K_\sigma^\phi = F \left[\phi \left(\frac{\cdot}{\sigma} \right) \right] (x) \in B_{r(\phi)\sigma}^1, \quad \sigma > 0,$$

где генератор метода ϕ , является непрерывной комплекснозначной функцией, имеющей компактный носитель ($r(\phi) = \sup\{|\xi| : \xi \in \supp \phi\} < +\infty$) такой, что $\phi(-\xi) = \overline{\phi(\xi)}$ для всех $\xi \in \mathbb{R}$ и $\phi(0) = 1$. Класс функций, удовлетворяющих описанным выше условиям для генератора метода ϕ , обозначим символом $\mathcal{K}$. Норма линейного ограниченного оператора $\mathcal{A}$ в $L_p(\mathbb{R})$ будет обозначаться символом $\|\mathcal{A}\|_{(p)}$.

Следуя [7], обозначим символом G класс непрерывных комплекснозначных 2π -периодических функций θ таких, что $\theta(-\xi) = \overline{\theta(\xi)}$ для всех $\xi \in \mathbb{R}$ и

$$\sigma(\theta) \equiv \|\{\theta^\wedge(\nu)\}_{\nu \in \mathbb{Z}}\|_{l_1} = \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} |\theta^\wedge(\nu)| < +\infty.$$

Символом G_1 обозначим подмножество G , состоящее из функций, которые дополнительно удовлетворяют условиям $\theta(0) = 0$ и $\theta^\wedge(0) = -1$.

Пусть $f \in L_p(\mathbb{R})$, где $1 \leq p \leq +\infty$. Если $\theta \in G_1$, то общий модуль гладкости определяется следующим образом:

$$\omega_\theta(f, \delta)_p = \sup_{0 \leq h \leq \delta} \left\| \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} \theta^\wedge(\nu) f(x + \nu h) \right\|_p, \quad \delta \geq 0.$$

Заметим, что данное определение корректно, так как $\omega_\theta(f, \delta)_p \leq \sigma(\theta) \|f\|_p < +\infty$ для $f \in L_p(\mathbb{R})$ и $\delta \geq 0$ в силу $\sigma(\theta) < +\infty$.

Рассмотрим оператор сдвига $T_h^{(\theta)}$ и оператор разности $\Delta_h^{(\theta)}$, задающиеся следующим образом:

$$\begin{aligned} T_h^{(\theta)} f(x) &= \sum_{\nu \neq 0} \theta^\wedge(\nu) f(x + \nu h), & h \geq 0, \\ \Delta_h^{(\theta)} f(x) &= T_h^{(\theta)} f(x) - f(x) = \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} \theta^\wedge(\nu) f(x + \nu h), & h \geq 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Тогда определение общего модуля гладкости может быть записано в виде

$$\omega_\theta(f, \delta)_p = \sup_{0 \leq h \leq \delta} \|\Delta_h^{(\theta)} f(x)\|_p, \quad \delta \geq 0.$$

Перечислим некоторые элементарные свойства $\omega_\theta(f, \delta)_p$.

ЛЕММА 1. Пусть $\theta \in G_1$, $1 \leq p \leq +\infty$ и $f \in L_p(\mathbb{R})$. Тогда

- (i) для любого $h \geq 0$ $T_h^{(\theta)}$ и $\Delta_h^{(\theta)}$ являются линейными ограниченными операторами в $L_p(\mathbb{R})$ и

$$\|T_h^{(\theta)}\|_{(p)} \leq \sigma(\theta) - 1, \quad \|\Delta_h^{(\theta)}\|_{(p)} \leq \sigma(\theta);$$

- (ii) $\omega_\theta(f, \delta)_p$ как функция δ возрастает на $[0; +\infty)$ и $\omega_\theta(f, 0) = 0$;

(iii) если $f_1, f_2 \in L_p(\mathbb{R})$ и $\delta \geq 0$, то

$$\omega_\theta(f_1 + f_2, \delta)_p \leq \omega_\theta(f_1, \delta)_p + \omega_\theta(f_2, \delta)_p.$$

Следующая лемма показывает, что оператор разности $\Delta_h^{(\theta)}$ является оператором мультипликаторного типа.

ЛЕММА 2. Пусть $1 \leq p \leq +\infty$, $\theta \in G_1$, $f \in \mathcal{S}$. Тогда

$$\sum_{\nu \in \mathbb{Z}} \theta^\wedge(\nu) f(x + \nu h) = F[\theta(h \cdot) F^{-1}[f](\cdot)](x), \quad h \in \mathbb{R}.$$

Лемма 2 устанавливает двойственную природу оператора $\Delta_h^{(\theta)}$: с одной стороны $\Delta_h^{(\theta)}$ является линейной комбинацией операторов сдвига и выражается посредством функционального ряда, с другой стороны, $\Delta_h^{(\theta)}$ – оператор мультипликаторного типа. Опираясь на это наблюдение, получаем свойство о вынесении константы из-под знака модуля. Для формулировки данного свойства введем в рассмотрение функцию $\Theta_2(\xi) = \theta(2\xi)/\theta(\xi)$. Условие $\Theta_2(\xi) \in G$ означает, что $\Theta_2(\xi)$ может быть доопределена по непрерывности в точках ξ таких, что $\theta(\xi) = 0$, и полученная таким путем функция удовлетворяет описанным выше условиям.

ЛЕММА 3. Пусть $\theta \in G_1$, $1 \leq p \leq +\infty$, $f \in L_p(\mathbb{R})$, $\Theta_2 \in G$. Тогда для $\delta, t \geq 0$

$$\omega_\theta(f, t\delta)_p \leq c\sigma(\Theta_2)(t+1)^{\log_2 \sigma(\Theta_2)} \omega_\theta(f, \delta)_p.$$

Доказательство прямой оценки типа Джексона базируется на развитии идей Джексона [11] и Стечкина [12], [13] и проводится по схеме, разработанной Руновским в [14] и [7] для периодического случая. Более точно, мы получим представление для $\mathcal{M}_\sigma^{(\phi)}$, содержащее в своей структуре оператор сдвига $T_h^{(\theta)}$ при подходящем выборе генератора.

Используя элементарные свойства преобразования Фурье, получим следующее представление для сверточных интегралов.

ЛЕММА 4. Пусть $\phi \in \mathcal{K}$. Тогда для $f \in L_p(\mathbb{R})$ и $\sigma > 0$

$$\mathcal{M}_\sigma^{(\phi)}(f; x) = (2\pi)^{-1} \int_{\mathbb{R}} f(x - \sigma^{-1}h) \overline{F[\phi](h)} dh. \quad (2)$$

Для заданных генераторов ϕ и θ построим новый генератор сверточных интегралов по правилу

$$\Phi(\xi) = \sum_{\nu \neq 0} \theta^\wedge(\nu) \phi(\nu\xi). \quad (3)$$

Очевидно, что $\Phi \in \mathcal{K}$ и $r(\Phi) = r(\phi)$. Используя (2) и (3), устанавливается следующая

ЛЕММА 5. Пусть $\phi \in \mathcal{K}$. Тогда для $f \in L_p(\mathbb{R})$ и $\sigma > 0$

$$\mathcal{M}_\sigma^{(\Phi)}(f; x) = (2\pi)^{-1} \int_{\mathbb{R}} T_{-\sigma^{-1}h}^{(\theta)} f(x) \overline{F[\phi](h)} dh. \quad (4)$$

Таким образом, $\mathcal{M}_\sigma^{(\Phi)}$, порожденные генератором $\Phi(\xi)$, содержат оператор $T_h^{(\theta)}$ в своей конструкции и являются подходящим инструментом для доказательства основного результата данного сообщения.

ТЕОРЕМА 6 (прямая оценка типа Джексона). Пусть $\theta \in G_1$, $1 \leq p \leq +\infty$, $f \in L_p(\mathbb{R})$, $\Theta_2 \in G$. Тогда

$$E_\sigma(f)_p \leq c\omega_\theta(f, \sigma^{-1})_p, \quad \sigma > 0, \quad (5)$$

где положительная константа c не зависит от f и σ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим вещественнозначную четную бесконечно дифференцируемую функцию ϕ с компактным носителем на $[-1, 1]$. Очевидно, что

$$|F[\phi](h)| \leq c(1 + |h|)^{-\log_2 \sigma(\Theta_2)-2}, \quad h \in \mathbb{R}. \quad (6)$$

Применяя (1), (6), лемму 3 и (4), получаем для $f \in L_p(\mathbb{R})$ и $\sigma > 0$

$$\begin{aligned} E_\sigma(f)_p &\leq \|f - \mathcal{M}_\sigma^{(\Phi)}(f)\|_p \leq (2\pi)^{-1} \int_{\mathbb{R}} \|T_{-\sigma^{-1}h}^{(\theta)} f(x) - f(x)\|_p |F[\phi](h)| dh \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} \omega_\theta(f, \sigma^{-1}|h|)_p |F[\phi](h)| dh \leq c\sigma(\Theta_2) \omega_\theta(f, \sigma^{-1})_p \int_{\mathbb{R}} (1 + |h|)^{\log_2 \sigma(\Theta_2)} |F[\phi](h)| dh \\ &\leq c\sigma(\Theta_2) \omega_\theta(f, \sigma^{-1})_p \int_{\mathbb{R}} (1 + |h|)^{-2} dh \leq c' \omega_\theta(f, \sigma^{-1})_p, \end{aligned}$$

что завершает доказательство (5).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Н. И. Ахиезер, *Лекции по теории аппроксимации*, Наука, М., 1965. [2] Z. Burinska, K. Runovski, H.-J. Schmeisser, *Sampl. Theory Signal Image Process.*, **5:1** (2006), 59–87. [3] Z. Burinska, K. Runovski, H.-J. Schmeisser, *Sampl. Theory Signal Image Process.*, **8:2** (2009), 105–126. [4] P. L. Butzer, W. Splettstösser, R. L. Stens, *Jahresber. Deutsch. Math.-Verein.*, **90:1** (1988), 1–70. [5] H.-J. Schmeisser, W. Sickel, *Applied Mathematicks Reviews*, Vol. 1, World Sci., Singapore, 2000, 205–284. [6] А. Ф. Тиман, *Теория приближения функций действительного переменного*, Физматлит, М., 1960. [7] К. В. Руновский, *Матем. заметки*, **95:6** (2014), 899–910. [8] L. Hörmander, *The Analysis of Linear Partial Differential Operators. I. Distribution Theory and Fourier Analysis*, Grundlehren Math. Wiss., **256**, Springer-Verlag, Berlin, 1983. [9] K. Runovski, H.-J. Schmeisser, *Eurasian Math. J.*, **2:3** (2011), 98–124. [10] R. A DeVore, G. G. Lorentz, *Constructive Approximation*, Grundlehren Math. Wiss., **303**, Springer-Verlag, Berlin, 1993. [11] D. Jackson, *Über die Genauigkeit der Annäherung stetiger Funktionen durch ganze rationale Funktionen gegebenen Grades und trigonometrische Summen gegebener Ordnung*, Diss., Göttingen, 1911. [12] С. Б. Стечкин, *Докл. АН СССР*, **65:2** (1949), 135–137. [13] С. Б. Стечкин, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **15:3** (1951), 219–242. [14] K. Runovski, H.-J. Schmeisser, *On Modulus of Continuity Related to Riesz Derivative*, Preprint, 2011.

С. Ю. Артамонов

Черноморский филиал

Московского государственного университета

им. М. В. Ломоносова, г. Севастополь

E-mail: sergei.artamonov@gmail.com,

sartr14@yandex.ru

Поступило

04.11.2014