Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Р. Чехлов, О прямой сумме неприводимых групп, *Матем. заметки*, 2015, том 97, выпуск 5, 798–800

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10657>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.73.141

26 апреля 2023 г., 10:14:10

О прямой сумме неприводимых групп

А. Р. Чехлов

Все группы в заметке предполагаются абелевыми. Через $E(A)$ обозначается кольцо эндоморфизмов группы A . Напомним, что подгруппа G группы A называется *чистой*, если $G \cap nA = nG$ для всех целых чисел n . Группа называется *неприводимой*, если она не имеет собственных чистых вполне инвариантных подгрупп. Неприводимые группы изучались в [1], [2] и в др. работах; подробно с приведением литературы они рассматриваются в [3]. Поскольку ядро всякого центрального эндоморфизма вполне инвариантно, все ненулевые центральные эндоморфизмы неприводимой группы без кручения являются мономорфизмами.

Группу без кручения A назовем *qft-группой* (*квази вполне транзитивной*), если для любых элементов $0 \neq a, b \in A$ условие на типы $t(a) \leq t(b)$ влечет существование $f \in E(A)$ и натурального числа k со свойством $f(a) = kb$. Если для любых $0 \neq a, b \in A$ условие на характеристики $\chi(a) \leq \chi(b)$ (соответственно, $\chi(a) = \chi(b)$) влечет существование $f \in E(A)$ (соответственно, автоморфизма f группы A) со свойством $f(a) = b$, то группа A называется *вполне транзитивной* (соответственно, *транзитивной*). Вполне транзитивным и близким к ним классам групп без кручения (транзитивным, сильно однородным и др.) посвящена глава VII книги [3]. Легко видеть, что группа без кручения неприводима тогда и только тогда, когда она является однородной qft-группой; qft-группы можно рассматривать как обобщение неприводимых групп и вполне транзитивных групп без кручения.

Напомним, что кольцо R с единицей называется *Е-кольцом* [4], если $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, R) = \text{Hom}_R(R, R)$, где $\mathbb{Z}$ – кольцо целых чисел. Будем говорить, что кольцо S *обладает свойством $(*)$* , если его аддитивная группа S^+ есть редуцированная группа без кручения и факторкольцо S/pS не имеет делителей нуля для каждого простого числа p такого, что $pS \neq S$; согласно [3; лемма 44.6] в группе S^+ такого кольца S для любых $a, b \in S^+$ имеет место равенство $\chi(ab) = \chi(a) + \chi(b)$.

ЛЕММА 1. Пусть R есть Е-кольцо со свойством $(*)$. Тогда эквивалентны следующие условия:

- (1) группа R^+ неприводима;
- (2) каждый элемент кольца R есть целое кратное обратимого;
- (3) R^+ – однородная вполне транзитивная группа.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) $\Rightarrow$ (2) Так как группа R^+ неприводима, она однородна, и поскольку характеристика $\chi(1)$ наименьшая, то тип группы R^+ идемпотентный. Пусть $I = xR$ – главный идеал, $x = nx_0$, где $\chi(x_0) = \chi(1)$, $J = x_0R$. Если $y = x_0z \in J$, где $z \in R$, то

$$\chi(y) = \chi(x_0) + \chi(z) = \chi(z),$$

так как характеристика $\chi(x_0)$ состоит только из 0 и ∞ и символ ∞ у $\chi(x_0)$ и $\chi(z)$ встречается на одних и тех же местах. Поэтому если $p^k t = y$, то $z \in p^k R$ и $y \in p^k J$, т.е. J^+ – чистая вполне инвариантная (так как R – Е-кольцо) подгруппа в R^+ . Следовательно, $J = R$; в частности, элемент x_0 обратим.

(2) $\Rightarrow$ (3) Так как каждый элемент из R является целым кратным обратимого, то группа R^+ однородна идемпотентного типа. Пусть теперь $0 \neq a, b \in R$ и $\chi(b) \geq \chi(a)$ в группе R^+ , и пусть $na_0 = a$, где a_0 обратим. Тогда $nb_0 = b$ для некоторого $b_0 \in R$ и $b_0 a_0^{-1}(a) = b$.

Импликация (3) $\Rightarrow$ (1) очевидна.

DOI: 10.4213/mzm10657

Кольцо R с условием (2) леммы 1 называется *сильно однородным*, каждый его идеал является главным и имеет вид nR , где n – некоторое целое число [3; § 19]. Каждое из утверждений леммы эквивалентно тому, что R^+ является однородной транзитивной группой. Напомним, что группа A называется *эндоконечной* [3; определение 8.3], если она является конечно порожденным $E(A)$ -модулем.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Счетная неприводимая эндоконечная группа без кручения A , у которой центр C кольца $E(A)$ есть кольцо главных идеалов со свойством $(*)$, является вполне транзитивной и транзитивной группой.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно [3; теорема 8.7] C является E -кольцом, а по следствию 8.6 из [3] A есть свободный C -модуль. Как прямое слагаемое группа C^+ также неприводима; значит, кольцо C удовлетворяет условиям леммы 1; осталось сослаться на следствие 40.5 из [3].

СЛЕДСТВИЕ 1. *Неприводимая эндоконечная группа без кручения A конечного ранга, у которой центр C кольца $E(A)$ есть кольцо со свойством $(*)$, является вполне транзитивной и транзитивной группой.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно следствию 8.8 из [3] C есть E -кольцо и A квазиизоморфна C^n для некоторого n . Как квазислагаемое в A группа C^+ также является неприводимой. Осталось сослаться на лемму 1 и предложение 1.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть $A_i \neq 0, i \in I$, – неприводимые группы без кручения и $|I| \geq 2$. Группа $A = \bigoplus_{i \in I} A_i$ является неприводимой тогда и только тогда, когда $\text{Hom}(A_i, A_j) \neq 0$ для каждой пары $i, j \in I$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. *Необходимость.* Допустим, что $\varphi(a) = 0$ для некоторого $0 \neq a \in A_i$ и для каждого $\varphi \in \text{Hom}(A_i, A_j)$. Положим $B = \bigoplus_{k \in I \setminus \{j\}} A_k$ и $C = A_j$. Тогда

$$a \in H = \bigcap_{f \in \text{Hom}(B, C)} \ker f,$$

H является чистой вполне инвариантной подгруппой группы A . Имеем

$$H = \bigoplus_{i \in I} (H \cap A_i),$$

где $H \cap A_i$ – чистая вполне инвариантная подгруппа в A_i . Следовательно, $H \cap A_i = A_i$, если $H \cap A_i \neq 0$. Значит, H является вполне инвариантным прямым слагаемым группы A , что противоречит ее неприводимости.

Достаточность. Если $H \neq 0$ – чистая вполне инвариантная подгруппа группы A , то $H \cap A_i \neq 0$ (значит, $H \cap A_i = A_i$) хотя бы для одного $i \in I$. Условие $\text{Hom}(A_i, A_j) \neq 0$ для каждой пары $i, j \in I$ и qft-транзитивность групп A_i влечет, что $H \cap A_i \neq 0$ (значит, $H \cap A_i = A_i$) для каждого $i \in I$. Откуда $H = A$.

Будем говорить, что упорядоченная пара (B, G) групп без кручения B и G удовлетворяет *правому qft-условию*, если для любых $0 \neq b \in B, 0 \neq g \in G$ таких, что $t(b) \leq t(g)$ найдутся $f \in \text{Hom}(B, G)$ и натуральное k со свойством $f(b) = kg$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Пусть $A_i \neq 0 (i \in I)$ – неприводимые группы без кручения и $|I| \geq \aleph_0$. Группа $A = \prod_{i \in I} A_i$ является неприводимой тогда и только тогда, когда $\text{Hom}(A_i, A_j) \neq 0$ для каждой пары $i, j \in I$, все A_i – однородные группы одного и того же идемпотентного типа и хотя бы для одного $i \in I$ пара (A_i, G_i) , где $(G_i = \prod_{j \in I \setminus \{i\}} A_j)$, удовлетворяет правому qft-условию.*

Доказательство. Если группа A неприводима, то она однородна, поэтому все A_i имеют один и тот же идемпотентный тип [5; доказательство леммы 96.4]; необходимость оставшихся утверждений очевидна.

Достаточность. Пусть $H \neq 0$ – чистая вполне инвариантная подгруппа группы A . Тогда $\pi_i(H) \neq 0$ хотя бы для одной проекции $\pi_i: A \rightarrow A_i$ и, значит, $H \cap A_i \neq 0$. Как чистая вполне инвариантная подгруппа неприводимой группы $H \cap A_i$ совпадает с A_i . Поскольку $\text{Hom}(A_i, A_j) \neq 0$ для каждой пары $i, j \in I$, отсюда следует, что

$$\bigoplus_{i \in I} A_i \subseteq A,$$

а правое qft-условие пары (A_i, G_i) влечет существенность подгруппы $H \cap G_i$ в G_i ; ее чистота дает равенство $H \cap G_i = G_i$. Откуда $H = A$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] J. D. Reid, *Topics in Abelian Groups*, Scott, Foresman and Co., Chicago, IL, 1963, 51–58.
 [2] П. А. Крылов, *Абелевы группы и модули*, 1986, № 4, 73–100. [3] П. А. Крылов, А. В. Михалев, А. А. Туганбаев, *Абелевы группы и их кольца эндоморфизмов*, Факториал Пресс, М., 2006. [4] P. Schultz, *J. Austral. Math. Soc.*, **15** (1973), 60–69. [5] Л. Фукс, *Бесконечные абелевы группы*, Т. 2, Мир, М., 1977.

А. Р. Чехлов

Томский государственный университет
 E-mail: cheklov@math.tsu.ru

Поступило

01.12.2014