Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Е. Чанга, О количестве чисел специального вида в зависимости от четности числа их различных простых делителей, *Матем. заметки*, 2015, том 97, выпуск 6, 930–935

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10658>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.73.141

26 апреля 2023 г., 07:01:23

О количестве чисел специального вида в зависимости от четности числа их различных простых делителей

М. Е. Чанга

Рассматриваются натуральные числа, все простые делители которых принадлежат специальным множествам, причем количество этих простых делителей четно (нечетно). Доказано, что числа с нечетным количеством различных простых делителей преобладают, точнее, разность между количествами тех и других, не превосходящих заданного x , стремится к бесконечности с ростом x .

Библиография: 7 названий.

DOI: 10.4213/mzm10658

Пусть E – бесконечное множество простых чисел, причем при $x \rightarrow +\infty$ справедливо равенство

$$\pi(x, E) = \sum_{p \leq x, p \in E} 1 = c_E \pi(x) + O(x^{1-\Delta}),$$

где Δ – некоторое положительное число, $\pi(x)$ – количество простых чисел, не превосходящих x , а c_E – положительная постоянная, $0 < c_E < 1$. Например, можно взять в качестве E все простые числа, принадлежащие множеству

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} [(Dn + l - 1)^{1/a}, (Dn + l)^{1/a}),$$

где a – нецелое положительное число, D и l – натуральные числа, причем $D \geq 2$, $l \leq D$. Соответствующая формула для величины $\pi(x, E)$ в случае $0 < a < 1$ доказана в работе [1], а для нецелых a , больших единицы, – например, в работе [2]. Другой (тривиальный) вариант выбора множества E – занумеровав простые числа подряд по возрастанию, считать принадлежащим E каждое D -е простое число, $D \geq 2$. В последние годы появилась возможность рассматривать в качестве E множество простых чисел, содержащих четное число единиц в своей двоичной записи. Справедливость соответствующей асимптотической формулы для $\pi(x, E)$ установлена в работе [3].

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (грант № 14-11-00433 “Комбинаторные, геометрические и аналитические проблемы теории чисел”).

Пусть M – множество натуральных чисел, все простые делители которых принадлежат E , M_0 и M_1 – подмножества M , состоящие из чисел, имеющих четное и нечетное количество различных простых делителей соответственно. Возникает вопрос, одинаково ли часто встречаются среди чисел множества M числа с четным и нечетным количеством различных простых делителей, или же одни количественно преобладают над другими?

Пусть $\nu(n)$ обозначает количество различных простых делителей числа n . Хорошо известно, что

$$\sum_{n \leq x} (-1)^{\nu(n)} = O(xe^{-c\sqrt{\ln x}}),$$

где c – положительная постоянная. Отсюда следует, что среди всех натуральных чисел числа с четным и нечетным количеством различных простых делителей встречаются одинаково часто. А именно, количества тех и других чисел, не превосходящих x , с хорошей точностью совпадают – их разность растет не быстрее $x \ln^{-A} x$, где A – сколь угодно большое положительное число. Для того чтобы ответить на поставленный выше вопрос, введем следующие функции:

$$n_1(x) = \sum_{n \leq x, n \in M_1} 1, \quad n_0(x) = \sum_{n \leq x, n \in M_0} 1.$$

Нас интересует асимптотическая формула для разности $n_1(x) - n_0(x)$, в то время как сумма этих функций имеет смысл количества чисел множества M , не превосходящих x , и будет обозначена нами через $n(x)$. Оказывается, упомянутая разность, хотя и является бесконечно малой по сравнению с $n(x)$, что означает асимптотическое равенство величин $n_1(x)$ и $n_0(x)$, тем не менее знакоопределена и, более того, стремится к бесконечности с ростом x как $x \ln^{-c} x$ с некоторым положительным c . Отметим, что подобную задачу для чисел с четным и нечетным количеством всех простых делителей, учитывая кратность вхождения последних в каноническое разложение указанных чисел, впервые поставил и решил Карацуба в работах [4] и [5].

Основным результатом настоящей работы является следующая

ТЕОРЕМА. При $x \rightarrow +\infty$ справедлива асимптотическая формула

$$n_1(x) - n_0(x) = \frac{Cn(x)}{\ln^{2c_E} x} \left(1 + O\left(\frac{1}{\ln x}\right) \right) = \frac{C_1 x}{\ln^{c_E+1} x} \left(1 + O\left(\frac{1}{\ln x}\right) \right),$$

где C, C_1 – положительные постоянные.

В полуплоскости $\operatorname{Re} s > 1$ определим функцию

$$F(s) = \sum_{n \in M} \frac{1}{n^s} = \prod_{p \in E} \left(1 - \frac{1}{p^s} \right)^{-1},$$

где $s = \sigma + it$ обозначает комплексное переменное. Последнее равенство следует из тождества Эйлера для производящих рядов Дирихле мультипликативных функций.

Доказательство теоремы мы будем проводить методом комплексного интегрирования, для чего нам понадобятся три вспомогательных утверждения, известных из литературы. В дальнейшем $c_1, c_2, \dots$ обозначают положительные постоянные, а запись $A \ll B$ означает, что существует такое $c > 0$, что $|A| \leq cB$.

ЛЕММА 1. В области $\operatorname{Re} s > 1 - \Delta$, разрезанной вдоль горизонтальных отрезков, имеющих правым концом точку $s = 1$ или нетривиальный нуль дзета-функции Римана, справедливо равенство

$$F(s) = \zeta^{c_E}(s) e^{G(s)},$$

где $\zeta^{c_E}(s)$ положительна при вещественных $s > 1$, а функция

$$G(s) = s \int_2^\infty \frac{\pi(u, E) - c_E \pi(u)}{u(u^s - 1)} du$$

аналитична в области $\operatorname{Re} s > 1 - \Delta$. Кроме того, при $T \geq 10$ в области $\sigma \geq 1 - c_1/\ln T$, $|t| \leq T$, нет нулей дзета-функции Римана, а на границе этой области имеет место оценка

$$\ln^{-c_2} T \ll |F(s)| \ll \ln^{c_2} T.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО приведено в работе [6] с точностью до замены $1/D$ на c_E .

ЛЕММА 2 (формула Перрона). Пусть

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(n)}{n^s},$$

причем ряд абсолютно сходится при $\operatorname{Re} s > a \geq 0$, и пусть при $\sigma \rightarrow a + 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a(n)|}{n^\sigma} \ll (\sigma - a)^{-\alpha}$$

с некоторым $\alpha > 0$. Тогда при любых $b > a$, $x \geq 2$, $T \geq 2$ имеет место формула

$$\sum_{n \leq x} a(n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{b-iT}^{b+iT} F(s) \frac{x^s}{s} ds + R(x),$$

где

$$R(x) \ll \frac{x^b}{T(b-a)^\alpha} + 2^b \left(\frac{x \ln x}{T} + \ln \frac{T}{b} + 1 \right) \max_{x/2 \leq n \leq 3x/2} |a(n)|.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО приведено, например, в [7; с. 20].

ЛЕММА 3. Пусть функция $H(s)$ аналитична в круге $|s| < \Delta$ и A_k обозначает ее k -й коэффициент Тейлора в этом круге. Пусть контур Γ начинается в точке $-(\ln x)^{-1/2} - i0$, обходит начало координат против часовой стрелки и заканчивается в точке $-(\ln x)^{-1/2} + i0$. Пусть

$$I(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} x^s s^{-\alpha} H(s) ds,$$

где α — фиксированное вещественное число и $s^{-\alpha}$ положительно при вещественных $s > 0$. Тогда имеет место асимптотическая формула

$$I(x) = \sum_{0 \leq n \leq \sqrt{\ln x}} A_n \frac{(\ln x)^{\alpha-n-1}}{\Gamma(\alpha-n)} + O(e^{-c_3 \sqrt{\ln x}}).$$

Кроме того, при любом фиксированном целом N

$$\sum_{N \leq n \leq \sqrt{\ln x}} \left| \frac{A_n}{\Gamma(\alpha - n)} \right| (\ln x)^{\alpha - n - 1} \ll (\ln x)^{\alpha - N - 1}.$$

Доказательство приведено в работе [6]. Отметим, что в упомянутой работе лемма сформулирована для рациональных α , однако последнее обстоятельство, как легко убедиться, нигде в доказательстве не используется.

Доказательство теоремы. Согласно лемме 1 при достаточно малом c_1 и $T \geq 10$ функция $F(s)$ аналитически продолжается в область $\operatorname{Re} s \geq 1 - c_1/\ln T$, $|\operatorname{Im} s| \leq T$ с разрезом вдоль горизонтального отрезка, имеющего правым концом точку $s = 1$, причем соответствующая функция $G(s)$ аналитична в указанной области без разреза, а на границе последней справедливы оценки

$$\ln^{-c_2} T \ll |F(s)| \ll \ln^{c_2} T.$$

Далее, в полуплоскости $\operatorname{Re} s > 1$ определим функцию

$$F_1(s) = \sum_{n \in M} \frac{(-1)^{\nu(n)}}{n^s} = \prod_{p \in E} \left(1 - \frac{1}{p^s - 1} \right) = F^{-1}(s) \prod_{p \in E} \left(1 - \frac{1}{(p^s - 1)^2} \right).$$

Легко видеть, что последнее произведение по простым числам представляет аналитическую и ограниченную в области $\operatorname{Re} s \geq 1 - c_1/\ln T$, $|\operatorname{Im} s| \leq T$ функцию.

Применяя к введенным функциям лемму 2, получим

$$\begin{aligned} n(x) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{b-iT}^{b+iT} F(s) \frac{x^s}{s} ds + O(xe^{-c_4\sqrt{\ln x}}), \\ n_0(x) - n_1(x) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{b-iT}^{b+iT} F_1(s) \frac{x^s}{s} ds + O(xe^{-c_4\sqrt{\ln x}}), \end{aligned}$$

где $b = 1 + 1/\ln x$, $T = e^{c_1\sqrt{\ln x}}$. Выберем параметр $\beta = 1 - c_1/\ln T = 1 - (\ln x)^{-1/2}$ и рассмотрим контур C , состоящий из отрезков, последовательно соединяющих точки $b - iT$, $\beta - iT$ и $\beta - i0$, петли Γ , обходящей точку $s = 1$ против часовой стрелки, и отрезков, последовательно соединяющих точки $\beta + i0$, $\beta + iT$ и $b + iT$. Поскольку обе подынтегральные функции не имеют особенностей в области, ограниченной контуром C и вертикальным отрезком с концами в точках $b \pm iT$, в силу интегральной теоремы Коши соответствующие интегралы по границе этой области равны нулю. Отсюда, обозначая через $R_1(x)$ и $R_3(x)$ интегралы по горизонтальным, а через $R_2(x)$ и $R_4(x)$ – интегралы по вертикальным сторонам контура C , находим

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{b-iT}^{b+iT} F(s) \frac{x^s}{s} ds &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} F(s) \frac{x^s}{s} ds + R_1(x) + R_2(x), \\ \frac{1}{2\pi i} \int_{b-iT}^{b+iT} F_1(s) \frac{x^s}{s} ds &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} F_1(s) \frac{x^s}{s} ds + R_3(x) + R_4(x). \end{aligned}$$

Оценка остаточных членов проводится тривиально с использованием оценок модуля $F(s)$ сверху и снизу. Имеем

$$R_1(x), R_3(x) = O\left(\frac{x^b}{T} \ln^{c_2} T\right) = O(xe^{-c_5\sqrt{\ln x}}),$$

$$R_2(x), R_4(x) = O(x^\beta \ln^{c_2+1} T) = O(xe^{-c_5\sqrt{\ln x}}).$$

Используя явный вид аналитического продолжения $F(s)$ из леммы 1, находим

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} F(s) \frac{x^s}{s} ds = x \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma'} x^s s^{-c_E} H(s) ds,$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} F_1(s) \frac{x^s}{s} ds = x \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma'} x^s s^{c_E} H_1(s) ds,$$

где Γ' – контур, получаемый из контура Γ параллельным переносом на единицу влево вдоль вещественной оси, что соответствует замене s на $s+1$, а

$$H(s) = (s\zeta(s+1))^{c_E} \frac{e^{G(s+1)}}{s+1},$$

$$H_1(s) = (s\zeta(s+1))^{-c_E} \frac{e^{-G(s+1)}}{s+1} \prod_{p \in E} \left(1 - \frac{1}{(p^{s+1}-1)^2}\right).$$

Для вычисления полученных интегралов воспользуемся леммой 3. Удерживая лишь первые члены получающихся асимптотических формул и собирая все полученные оценки, имеем

$$n(x) = H(0) \frac{x \ln^{c_E-1} x}{\Gamma(c_E)} + O(x \ln^{c_E-2} x),$$

$$n_1(x) - n_0(x) = -H_1(0) \frac{x \ln^{-c_E-1} x}{\Gamma(-c_E)} + O(x \ln^{-c_E-2} x).$$

Так как по условию $0 < c_E < 1$, значение $\Gamma(-c_E)$ будет отрицательным, а значение $\Gamma(c_E)$ – положительным, следовательно,

$$C_1 = -\frac{H(0)}{\Gamma(-c_E)} = -\frac{e^{-G(1)}}{\Gamma(-c_E)} \prod_{p \in E} \left(1 - \frac{1}{(p-1)^2}\right) > 0.$$

Наконец, деля одну асимптотическую формулу на другую, получим

$$C = -\frac{H_1(0)\Gamma(c_E)}{H(0)\Gamma(-c_E)} = -\frac{\Gamma(c_E)}{\Gamma(-c_E)} e^{-2G(1)} \prod_{p \in E} \left(1 - \frac{1}{(p-1)^2}\right) > 0,$$

что и завершает доказательство.

Заметим, что в ходе доказательства мы получили также асимптотическую формулу для количества $n(x)$ чисел множества M , не превосходящих x , которая представляет и самостоятельный интерес. Из доказанной теоремы следует, что величины $n_1(x)$ и $n_0(x)$ асимптотически равны, но при этом их разность положительна и стремится к бесконечности как $x \ln^{-c_E-1} x$. Таким образом, среди чисел множества M несколько больше тех, что имеют нечетное число различных простых делителей, нежели тех, что имеют четное число таковых.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] И. М. Виноградов, “Некоторое общее свойство распределения простых чисел”, *Матем. сб.*, **7**:2 (1940), 365–372.
- [2] М. Е. Чанга, “Простые числа в специальных промежутках и аддитивные задачи с такими числами”, *Матем. заметки*, **73**:3 (2003), 423–436.
- [3] С. Mauduit, J. Rivat, “Sur un problème de Gelfond: la somme des chiffres des nombres premiers”, *Ann. of Math.* (2), **171**:3 (2010), 1591–1646.
- [4] А. А. Карацуба, “Об одном свойстве множества простых чисел”, *УМН*, **66**:2 (2011), 3–14.
- [5] А. А. Карацуба, “Об одном свойстве множества простых чисел как мультипликативного базиса натурального ряда”, *Докл. РАН*, **439**:2 (2011), 159–162.
- [6] М. Е. Чанга, “О числах, все простые делители которых лежат в специальных промежутках”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **67**:4 (2003), 213–224.
- [7] М. Е. Чанга, *Методы аналитической теории чисел*, НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, М.-Ижевск, 2013.

М. Е. Чанга

Московский государственный университет геодезии
и картографии

E-mail: maris_changa@mail.ru

Поступило

02.10.2014