Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. К. Дурдиев, Ж. Ш. Сафаров, Обратная задача об определении одномерного ядра уравнения вязкоупругости в ограниченной области, *Матем. заметки*, 2015, том 97, выпуск 6, 855–867

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10659>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 14:46:26

Обратная задача об определении одномерного ядра уравнения вязкоупругости в ограниченной области

Д. К. Дурдиев, Ж. Ш. Сафаров

Рассматривается одномерное интегродифференциальное уравнение, возникающее в теории вязкоупругости с постоянными плотностью и коэффициентами Ламе. Прямая задача заключается в определении функции смещений из начально-краевой задачи для этого уравнения. При этом начальные условия равны нулю. Пространственную область представляет отрезок $[0, l]$, и в качестве граничного условия задана функция напряжений на левом конце этого отрезка в виде сосредоточенного источника возмущений, а на правом – нуль. Для прямой задачи изучается обратная задача об определении ядра, входящего в интегральный член уравнения. Для отыскания его задается дополнительное условие относительно функции смещений при $x = 0$. Обратная задача заменяется эквивалентной системой интегральных уравнений для неизвестных функций. К последней в пространстве непрерывных функций с весовыми нормами применяется принцип сжатых отображений. Доказана теорема глобальной однозначной разрешимости.

Библиография: 16 названий.

DOI: 10.4213/mzm10659

1. Введение. Задачи восстановления свойств среды по данным, полученным в результате измерения свойств рассеянного излучения на границе, возникают во многих разделах естественной науки. В последнее время наблюдается повышенный интерес к задачам определения предыстории среды, в которой протекает тот или иной волновой процесс. По-видимому, это вызвано в более точной степени моделированием каких-либо физических полей, процессов, или явлений (электромагнитных, акустических, сейсмических, тепловых и т.п.).

Обратные задачи для интегродифференциальных уравнений гиперболического типа – сравнительно молодое направление в теории обратных задач, возникшее в конце 80-х годов прошлого столетия. При определенных условиях в уравнения распространения упругих и (или) электромагнитных волн добавляются вольтерровы операторы типа свертки, которые описывают явления “запаздывания” или памяти. Первые результаты для обратных задач для таких уравнений в основном представлены в работах итальянского математика Лоренци [1]–[3]. В его работах изучены задачи об определении ядра интегро-дифференциальных уравнений гиперболического и параболического типов с распределенными источниками возмущений.

В настоящее время эта тематика является предметом научных интересов многих математиков [4]–[14].

Одномерная обратная задача о нахождении ядра из одного уравнения вязкоупругости в ограниченной области с распределенными источниками возмущений рассмотрена в [8]. Методом Фурье задача сведена к системе интегральных уравнений вольтерровского типа относительно неизвестных функций, зависящих от временной переменной. Однако в приложениях наиболее интересными являются обратные задачи, когда данные прямой задачи представляют собой сингулярные обобщенные функции. Одна из таких задач рассматривается в данной работе. Как и в [15; с. 53–59], здесь обратная задача с помощью метода характеристик приведена к замкнутой системе интегральных уравнений второго рода вольтерровского типа. Далее, к этой системе применен принцип сжатых отображений в пространстве непрерывных функций с экспоненциальным весом [8]. Получена теорема однозначной разрешимости решения обратной задачи для произвольного отрезка задания функции.

2. Постановка задачи и основной результат. Рассмотрим одномерное дифференциальное уравнение вязкоупругости в ограниченной по переменной x области $D := \{(x, t) : 0 < x < l, t > 0\}$

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = \frac{\partial T(x, t)}{\partial x} \quad (2.1)$$

при следующих начальных и граничных условиях:

$$u|_{t=0} \equiv 0, \quad 0 \leq x \leq l, \quad (2.2)$$

$$T(x, t)|_{x=0} = \delta(t), \quad T(x, t)|_{x=l} = 0, \quad (2.3)$$

где $u(x, t)$ – функция смещений, $\delta(t)$ – дельта-функция Дирака, T – функция напряжений:

$$T(x, t) = \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} + \int_0^t k(t - \tau) \frac{\partial u(x, \tau)}{\partial x} d\tau. \quad (2.4)$$

Уравнение (2.1) возникает в теории вязкоупругих сред с постоянными плотностью и коэффициентами Ламе в одномерном случае. При этом соотношение (2.4) согласно модели Больцмана [16] для линейной неупругой среды описывает связь между напряжением и смещением точек среды.

Обратная задача заключается в определении ядра $k(t)$, $t > 0$, входящего в (2.1) посредством формулы (2.4), если относительно решения задачи (2.1)–(2.4) известна дополнительная информация

$$u(0, t) = f(t), \quad t > 0, \quad (2.5)$$

$f(t)$ – заданная функция.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Функция $k(t) \in C^2[0, \infty)$ (из класса дважды непрерывно дифференцируемых функций) называется *решением обратной задачи* (2.1)–(2.5), если соответствующее ей решение задачи (2.1)–(2.4) $u(x, t) \in D'(D)$ (из класса обобщенных функции) удовлетворяет (2.5) при $f(t) \in D'[0, \infty)$.

Основным результатом настоящей работы является следующая теорема глобальной однозначной разрешимости обратной задачи.

ТЕОРЕМА. Пусть $f(t) \in C^3[0, 2l]$ и $f(+0) = -1$. Тогда существует единственное решение обратной задачи (2.1)–(2.5) $k(t) \in C^2[0, 2l]$ для любого $l > 0$.

Доказательство теоремы приводится в п. 5.

3. Предварительные построения. Введем в рассмотрение новую функцию $v(x, t)$, определив ее равенством

$$v(x, t) := \left[u(x, t) + \int_0^t k(t - \tau) u(x, \tau) d\tau \right] \exp\left(-k(0)\frac{t}{2}\right).$$

Тогда, как нетрудно проверить, функция $u(x, t)$ через $v(x, t)$ выражается по формуле

$$u(x, t) = \exp\left(k(0)\frac{t}{2}\right) v(x, t) + \int_0^t r(t - \tau) \exp\left(k(0)\frac{\tau}{2}\right) v(x, \tau) d\tau,$$

где

$$r(t) = -k(t) - \int_0^t k(t - \tau) r(\tau) d\tau. \quad (3.1)$$

Относительно новых функций $v(x, t)$ и $r(t)$ уравнения (2.1)–(2.3) с учетом (2.4) принимают вид

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + r_0 v - \int_0^t h(t - \tau) v(x, \tau) d\tau, \quad (x, t) \in D, \quad (3.2)$$

$$v|_{t < 0} \equiv 0, \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{x=0} = \delta(t), \quad \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{x=l} = 0, \quad (3.4)$$

где

$$r_0 := \frac{r^2(0)}{4} - r'(0), \quad h(t) := r''(t) \exp\left(r(0)\frac{t}{2}\right).$$

Дополнительное условие (2.5) выглядит как

$$v(0, t) = f_0(t) + \int_0^t k_0(t - \tau) f_0(\tau) d\tau. \quad (3.5)$$

В (3.5) введены обозначения

$$f_0(t) := f(t) \exp\left(r(0)\frac{t}{2}\right), \quad k_0(t) := k(t) \exp\left(r(0)\frac{t}{2}\right).$$

ЛЕММА 1. Пусть $k(t) \in C^2[0, \infty)$. Тогда

$$v(x, t) \equiv 0 \quad (3.6)$$

для $(x, t) \in D_1 := \{(x, t) : 0 < x < l, 0 < t < x\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для

$$(x, t) \in D_0 := \left\{ (x, t) : 0 < x < l, 0 < t < \frac{l}{2} - \left| x - \frac{l}{2} \right| \right\} \subset D_1$$

равенство (3.6) следует из формулы Даламбера для решения однородного уравнения (3.2) с нулевыми начальными данными (3.3).

Далее, рассмотрим пучок характеристик оператора $\partial/\partial t + \partial/\partial x$, проходящий через отрезок $(0, l)$ оси x . Он отсекает на правой границе области D отрезок $(0, l)$. Представляя волновой оператор в виде произведения

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \right)$$

и интегрируя равенство (3.2) вдоль отрезка фиксированной характеристики пучка, заключенного в D , найдем, используя условие (3.3), что

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \right) v|_{x=l} = \int_{t/2}^t \left[r_0 v(\tau - t + l, \tau) - \int_0^\tau h(\tau - \alpha) v(\tau - t + l, \alpha) d\alpha \right] d\tau,$$

где $t \in (0, l)$. С учетом граничного условия (3.4) при $x = l$, из этого равенства находим

$$v(l, t) = \int_0^t \int_{\tau/2}^{\tau_1} \left[r_0 v(\tau_1 - \tau + l, \tau_1) - \int_0^{\tau_1} h(\tau_1 - \alpha) v(\tau_1 - \tau + l, \alpha) d\alpha \right] d\tau_1 d\tau,$$

где $t \in (0, l)$. Произведя замену переменной τ_1 на ξ по формуле $\tau_1 - \tau + l = \xi$ во внутреннем интеграле, последнее уравнение перепишем в виде

$$v(l, t) = \int_0^t \int_{l-\tau/2}^l \left[r_0 v(\xi, \tau - l + \xi) - \int_0^{\tau-l+\xi} h(\tau - l + \xi - \alpha) v(\xi, \alpha) d\alpha \right] d\xi d\tau, \quad (3.7)$$

где $t \in (0, l)$.

Интегрируя уравнение (3.2) вдоль характеристики $dx/dt = 1$, получаем

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \right) v(x, t) \\ &= \int_{(l+x-t)/2}^x \left[r_0 v(\xi, \xi + t - x) - \int_0^{\xi+t-x} h(\xi + t - x - \alpha) v(\xi, \alpha) d\alpha \right] d\xi, \end{aligned}$$

где $(x, t) \in D_1 \setminus D_0$.

Далее, используя формулу (3.7), находим уравнение для $v(x, t)$ в области $D_1 \setminus D_0$:

$$\begin{aligned} v(x, t) &= \int_0^{t+x-l} \int_{l-\tau/2}^l \left[r_0 v(\xi, \tau - l + \xi) - \int_0^{\tau-l+\xi} h(\tau - l + \xi - \alpha) v(\xi, \alpha) d\alpha \right] d\xi d\tau \\ &+ \int_{t+x-l}^t \int_{(l+t+x-2\tau)/2}^{t+x-\tau} \left[r_0 v(\xi, \xi + 2\tau - t - x) \right. \\ &\quad \left. - \int_0^{\xi+2\tau-t-x} h(\xi + 2\tau - t - x - \alpha) v(\xi, \alpha) d\alpha \right] d\xi d\tau. \end{aligned}$$

При выполнении условий леммы последнее уравнение является однородным уравнением вольтерровского типа с непрерывным ядром. Отсюда

$$v(x, t) \equiv 0, \quad (x, t) \in D_1 \setminus D_0,$$

и формула (3.6) установлена.

Рассмотрим область

$$D_2 := \{(x, t) : 0 < x < l, x < t < 2l - x\}.$$

Интегрируя (3.2) вдоль соответствующей характеристики, находим

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\right)v|_{x=0} = - \int_0^{t/2} \left[r_0 v(\xi, t - \xi) - \int_0^{\tau-2\xi} h(\alpha) v(\xi, t - \xi - \alpha) d\alpha \right] d\xi,$$

где $t \in (0, 2l)$. В сочетании с граничным условием (3.3) при $x = 0$ это равенство позволяет вычислить $v(x, t)$ при $x = 0$:

$$v(0, t) = -1 - \int_0^t \int_0^{\tau/2} \left[r_0 v(\xi, \tau - \xi) - \int_0^{\tau-2\xi} h(\alpha) v(\xi, \tau - \xi - \alpha) d\alpha \right] d\xi d\tau,$$

где $t \in (0, 2l)$.

Используя последнее равенство, получаем для $v(x, t)$ интегральное уравнение

$$\begin{aligned} v(x, t) = & -1 - \int_0^{t-x} \int_0^{\tau/2} \left[r_0 v(\xi, \tau - \xi) - \int_0^{\tau-2\xi} h(\alpha) v(\xi, \tau - \xi - \alpha) d\alpha \right] d\xi d\tau \\ & - \int_{t-x}^t \int_{\tau-t+x}^{(2\tau-t+x)/2} \left[r_0 v(\xi, 2\tau - t + x - \xi) \right. \\ & \left. - \int_0^{2\tau-t+x-2\xi} h(\alpha) v(\xi, 2\tau - t + x - \xi - \alpha) d\alpha \right] d\xi d\tau, \end{aligned} \quad (3.8)$$

где $(x, t) \in D_2$.

Переходя в этом уравнении к пределу при $t \rightarrow x + 0$, заметим прежде всего, что

$$v(x, x + 0) = -1, \quad x \in (0, l). \quad (3.9)$$

Это значит, что решение задачи (3.2), (3.3) терпит разрыв первого рода при переходе через характеристическую линию $t = x$. При этом скачок функции равен -1 . Уравнение (3.8) является в области D_2 уравнением вольтерровского типа. Поэтому решение его единственно в классе функций, принадлежащих пространству $C(D_2)$, и может быть получено методом последовательных приближений. Существование решения в этом классе вытекает из принадлежности $k(t)$ классу $C^2[0, 2l]$. Более того, непосредственным дифференцированием уравнения (3.8) нетрудно убедиться, что его решение принадлежит классу $C^2(D_2)$.

4. Сведение обратной задачи к эквивалентной системе интегральных уравнений.

ЛЕММА 2. При выполнении условий теоремы обратная задача (2.2)–(2.5) для $(x, t) \in D_2$ эквивалентна задаче нахождения вектор-функций

$$v(x, t), \quad v_t(x, t), \quad v_{tt}(x, t), \quad h(t), \quad k_0(t), \quad k'_0(t), \quad k''_0(t)$$

из системы, составленной из равенства (3.8) и следующих уравнений:

$$\begin{aligned} v_t(x, t) = & \frac{r_0 x}{2} - \int_0^{(t-x)/2} \left[r_0 v(\xi, t-x-\xi) - \int_0^{t-x-2\xi} h(\alpha) v(\xi, t-x-\xi-\alpha) d\alpha \right] d\xi \\ & - \int_0^x \int_{x-\beta}^{(t+x-2\beta)/2} \left[r_0 v_t(\xi, t+x-2\beta-\xi) + h(t+x-2\beta-2\xi) \right. \\ & \left. - \int_0^{t+x-2\beta-2\xi} h(\alpha) v_t(\xi, t+x-2\beta-\xi-\alpha) d\alpha \right] d\xi d\beta, \end{aligned} \quad (4.1)$$

$$\begin{aligned} v_{tt}(x, t) = & \frac{r_0}{2} - \frac{r_0^2 t x}{8} + \frac{x}{2} h(t-x) - \int_0^{(t-x)/2} \left[r_0 v_t(\xi, t-x-\xi) + h(t-x-2\xi) \right. \\ & \left. - \int_0^{t-x-2\xi} h(\alpha) v_t(\xi, t-x-\xi-\alpha) d\alpha \right] d\xi \\ & - \int_0^x \int_{x-\beta}^{(t+x-2\beta)/2} \left[r_0 v_{tt}(\xi, t+x-2\beta-\xi) - \frac{r_0 \xi}{2} h(t+x-2\beta-2\xi) \right. \\ & \left. - \int_0^{t+x-2\beta-2\xi} h(\alpha) v_{tt}(\xi, t+x-2\beta-\xi-\alpha) d\alpha \right] d\xi d\beta, \end{aligned} \quad (4.2)$$

$$\begin{aligned} h(t) = & -\frac{r_0^2 t}{4} - 2f_0'''(t) - 2[f''(0) - 3[f'(0)]^2]k_0(t) - 4f'(0)k'_0(t) + 2k''_0(t) \\ & - 2 \int_0^t k_0(\tau) f_0''(t-\tau) d\tau - 2 \int_0^{t/2} \left[r_0 v_{tt}(\xi, t-\xi) - \frac{r_0 \xi}{2} h(t-2\xi) \right. \\ & \left. - \int_0^{t-2\xi} h(\alpha) v_{tt}(\xi, t-\xi-\alpha) d\alpha \right] d\xi, \end{aligned} \quad (4.3)$$

$$k_0(t) = -r(0) + \left(\frac{r^2(0)}{2} - r'(0) \right) t + \int_0^t (t-\tau) k''_0(\tau) d\tau, \quad (4.4)$$

$$k'_0(t) = \frac{r^2(0)}{2} - r'(0) + \int_0^t k''_0(\tau) d\tau, \quad (4.5)$$

$$k''_0(t) = -h(t) + \left(\frac{r^2(0)}{4} - r'(0) \right) k_0(t) - \int_0^t h(t-\tau) k_0(\tau) d\tau. \quad (4.6)$$

Неизвестные числа в этих равенствах выражаются через значения в нуле заданной функции $f(t)$ и ее производных, понимаемые как правый предел, следующим образом:

$$r(0) = -2f'(0), \quad r'(0) = \frac{1}{2}[[f'(0)]^2 - f''(0)], \quad r_0 = \frac{1}{2}f''(0). \quad (4.7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства леммы заметим, что интегральное уравнение (3.8) выведено из соотношений (3.2)–(3.4). Заменяя во внешнем интеграле последнего слагаемого в (3.8) переменную интегрирования τ на β по формуле $t - \tau = \beta$ и дифференцируя (3.8) после этого последовательно два раза по переменной t , получим соответственно уравнения (4.1), (4.2). При этом для получения уравнения (4.1) использовано соотношение (3.9), а для (4.2) – соотношение (3.9) и равенство $v_t(x, x) = r_0 x/2$, вытекающее из (4.1). Далее, в уравнении (3.8) положим $x = 0$ и воспользуемся условием (3.5). Тогда имеем

$$\begin{aligned} f_0(t) + \int_0^t k_0(\tau) f_0(t - \tau) d\tau \\ = -1 - \int_0^t \int_0^{\tau/2} \left[r_0 v(\xi, \tau - \xi) - \int_0^{\tau - 2\xi} h(\alpha) v(\xi, \tau - \xi - \alpha) d\alpha \right] d\xi d\tau, \end{aligned}$$

где $t \in (0, 2l)$. Отсюда, в частности, следует необходимое условие разрешимости обратной задачи

$$f(+0) = -1.$$

Дифференцируя предыдущее интегральное уравнение, находим

$$\begin{aligned} f'_0(t) - k_0(t) + \int_0^t k_0(\tau) f'_0(t - \tau) d\tau \\ = - \int_0^{t/2} \left[r_0 v(\xi, t - \xi) - \int_0^{t - 2\xi} h(\alpha) v(\xi, t - \xi - \alpha) d\alpha \right] d\xi, \end{aligned} \quad (4.8)$$

где $t \in (0, 2l)$. Полагая здесь $t = 0$ и используя равенство $r(0) = -k(0)$, вытекающее из (3.1), получаем $r(0) = -2f'(0)$. Дифференцируя (4.8), имеем

$$\begin{aligned} f''_0(t) + k_0(t) f'_0(0) - k'_0(t) + \int_0^t k_0(\tau) f''_0(t - \tau) d\tau \\ = \frac{r_0}{2} - \int_0^{t/2} \left[r_0 v_t(\xi, t - \xi) + h(t - 2\xi) - \int_0^{t - 2\xi} h(\alpha) v_t(\xi, t - \xi - \alpha) d\alpha \right] d\xi, \end{aligned} \quad (4.9)$$

где $t \in (0, 2l)$. В этом равенстве, также полагая $t = 0$ и произведя элементарные вычисления, выразим сначала $r'(0)$, а затем и r_0 через известные числа по формулам (4.7). Нетрудно заметить, что уравнение (4.3) получится в результате дифференцирования равенства (4.9). Для замыкания системы интегральных уравнений (3.8), (4.1)–(4.3) используются очевидные равенства (4.4)–(4.6). При выполнении условий теоремы справедливость обратных преобразований устанавливается обычным приемом [12].

Тем самым, лемма 2 доказана.

5. Доказательство теоремы. Запишем систему уравнений (3.8) и (4.1)–(4.6) в виде операторного уравнения

$$\varphi = A\varphi, \quad (5.1)$$

где

$$\varphi = [\varphi_1(x, t), \varphi_2(x, t), \varphi_3(x, t), \varphi_4(t), \varphi_5(t), \varphi_6(t), \varphi_7(t)]$$

$$= \left[v(x, t), v_t(x, t), v_{tt}(x, t) - \frac{x}{2} h(t - x), h(t) + 2[f''(0) - 3[f'(0)]^2] k_0(t) \right. \\ \left. + 4f'(0)k'_0(t) - 2k''_0(t), k_0(t), k'_0(t), k''_0(t) + h(t) - r_0 k_0(t) \right]$$

– векторная функция с компонентами $\varphi_i, i = 1, \dots, 7$, а оператор A определен на множестве функций $\varphi \in C[D_2]$ и в соответствии с равенствами (3.8) и (4.1)–(4.6) имеет вид $A = (A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7)$, где

$$A_1 \varphi = \varphi_{01} - \int_0^{t-x} \int_0^{\tau/2} \left[r_0 \varphi_1(\xi, t - \xi) \right. \\ \left. - \frac{1}{3} \int_0^{t-2\xi} [2\varphi_7(\alpha) + \varphi_4(\alpha) + 3q_{00}\varphi_5(\alpha) - 4f'(0)\varphi_6(\alpha)] \right. \\ \left. \times \varphi_1(\xi, t - \xi - \alpha) d\alpha \right] d\xi d\tau \\ - \int_{t-x}^t \int_{\tau-t+x}^{(2\tau-t+x)/2} \left[r_0 \varphi_1(\xi, 2\tau - t + x - \xi) \right. \\ \left. - \frac{1}{3} \int_0^{2\tau-t+x-2\xi} [2\varphi_7(\alpha) + \varphi_4(\alpha) + 3q_{00}\varphi_5(\alpha) - 4f'(0)\varphi_6(\alpha)] \right. \\ \left. \times \varphi_1(\xi, 2\tau - t + x - \xi - \alpha) d\alpha \right] d\xi d\tau, \quad (5.2)$$

$$A_2 \varphi = \varphi_{02} - \int_0^{(t-x)/2} \left[r_0 \varphi_1(\xi, t - x - \xi) \right. \\ \left. - \frac{1}{3} \int_0^{t-x-2\xi} [2\varphi_7(\alpha) + \varphi_4(\alpha) + 3q_{00}\varphi_5(\alpha) - 4f'(0)\varphi_6(\alpha)] \right. \\ \left. \times \varphi_1(\xi, t - x - \xi - \alpha) d\alpha \right] d\xi \\ - \int_0^x \int_{x-\beta}^{(t+x-2\beta)/2} \left[r_0 \varphi_2(\xi, t + x - 2\beta - \xi) - \frac{1}{3} [2\varphi_7(t + x - 2\beta - 2\xi) \right. \\ \left. + \varphi_4(t + x - 2\beta - 2\xi) + 3q_{00}\varphi_5(t + x - 2\beta - 2\xi) - 4f'(0)\varphi_6(t + x - 2\beta - 2\xi)] \right. \\ \left. - \frac{1}{3} \int_0^{t+x-2\beta-2\xi} [2\varphi_7(\alpha) - \varphi_4(\alpha) - 2r_0\varphi_5(\alpha) - 4f'(0)\varphi_6(\alpha)] \right. \\ \left. \times \varphi_2(\xi, t + x - 2\beta - \xi - \alpha) d\alpha \right] d\xi d\beta, \quad (5.3)$$

$$A_3 \varphi = \varphi_{03} - \int_0^{(t-x)/2} \left[r_0 \varphi_2(\xi, t - x - \xi) - \frac{1}{3} [2\varphi_7(t - x - 2\xi) + \varphi_4(t - x - 2\xi) \right. \\ \left. + 3q_{00}\varphi_5(t - x - 2\xi) - 4f'(0)\varphi_6(t - x - 2\xi)] \right. \\ \left. - \frac{1}{3} \int_0^{t-x-2\xi} [2\varphi_7(\alpha) + \varphi_4(\alpha) + 3q_{00}\varphi_5(\alpha) - 4f'(0)\varphi_6(\alpha)] \right. \\ \left. \times \varphi_2(\xi, t - x - \xi - \alpha) d\alpha \right] d\xi$$

$$\begin{aligned}
& - \int_0^x \int_{x-\beta}^{(t+x-2\beta)/2} \left[r_0 \varphi_2(\xi, t+x-2\beta-\xi) + r_0 \frac{\xi}{6} [2\varphi_7(t+x-2\beta-2\xi) \right. \\
& + \varphi_4(t+x-2\beta-2\xi) + 3q_{00}\varphi_5(t+x-2\beta-2\xi) - 4f'(0)\varphi_6(t+x-2\beta-2\xi)] \\
& - \frac{r_0\xi}{3} [2\varphi_7(t+x-2\beta-\xi) + \varphi_4(t+x-2\beta-\xi) \\
& + 3q_{00}\varphi_5(t+x-2\beta-\xi) - 4f'(0)\varphi_6(t+x-2\beta-\xi)] \\
& - \frac{1}{3} \int_0^{t+x-2\beta-2\xi} [2\varphi_7(\alpha) + \varphi_4(\alpha) + 3q_{00}\varphi_5(\alpha) - 4f'(0)\varphi_6(\alpha)] \\
& \quad \times \left[\varphi_3(\xi, t+x-2\beta-\xi-\alpha) + \frac{\xi}{6} [2\varphi_7(t+x-2\beta-2\xi-\alpha) \right. \\
& + \varphi_4(t+x-2\beta-2\xi-\alpha) + 3q_{00}\varphi_5(t+x-2\beta-2\xi-\alpha) \\
& \left. \left. - 4f'(0)\varphi_6(t+x-2\beta-2\xi-\alpha) \right] d\alpha \right] d\xi d\beta, \tag{5.4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_4\varphi &= \varphi_{04} + 2 \int_0^t \varphi_5(\tau) f_0''(t-\tau) d\tau + 2 \int_0^{t/2} \left[\varphi_3(\xi, t-\xi) \right. \\
& + \frac{\xi}{6} [2\varphi_7(t-2\xi) + \varphi_4(t-2\xi) + 3q_{00}\varphi_5(t-2\xi) - 4f'(0)\varphi_6(t-2\xi)] \\
& - \frac{r_0\xi}{3} [2\varphi_7(t-2\xi) + \varphi_4(t-2\xi) + 3q_{00}\varphi_5(t-2\xi) - 4f'(0)\varphi_6(t-2\xi)] \\
& - \frac{1}{3} \int_0^{t-2\xi} [2\varphi_7(\alpha) - \varphi_4(\alpha) - 2r_0\varphi_5(\alpha) - 4f'(0)\varphi_6(\alpha)] \\
& \quad \times \left[\varphi_3(\xi, t-\xi-\alpha) + \frac{\xi}{6} [2\varphi_7(t-2\xi-\alpha) - \varphi_4(t-2\xi-\alpha) \right. \\
& \left. \left. - 2r_0\varphi_5(t-2\xi-\alpha) - 4f'(0)\varphi_6(t-2\xi-\alpha) \right] d\alpha \right] d\xi, \tag{5.5}
\end{aligned}$$

$$A_5\varphi = \varphi_{05} + \frac{1}{3} \int_0^t (t-\tau) [\varphi_7(\tau) - \varphi_4(\tau) + q_0\varphi_5(\tau) + 4f'(0)\varphi_6(\tau)] d\tau, \tag{5.6}$$

$$A_6\varphi = \varphi_{06} + \frac{1}{3} \int_0^t [\varphi_7(\tau) - \varphi_4(\tau) + q_0\varphi_5(\tau) + 4f'(0)\varphi_6(\tau)] d\tau, \tag{5.7}$$

$$A_7\varphi = \varphi_{07} - \frac{1}{3} \int_0^t [2\varphi_7(t-\tau) + \varphi_4(t-\tau) + 3q_{00}\varphi_5(t-\tau) - 4f'(0)\varphi_6(t-\tau)] \varphi_5(\tau) d\tau, \tag{5.8}$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned}
\varphi_0(x, t) &= (\varphi_{01}, \varphi_{02}, \varphi_{03}, \varphi_{04}, \varphi_{05}, \varphi_{06}, \varphi_{07}) \\
&:= \left[-1, \frac{r_0x}{2}, \frac{r_0}{2} - \frac{r_0^2tx}{8}, -\frac{r_0^2t}{4} - 2f_0'''(t), \right. \\
&\quad \left. -r(0) + \left(\frac{r^2(0)}{2} - r'(0) \right) t, \frac{r^2(0)}{2} - r'(0), 0 \right], \\
q_0 &:= \frac{5}{2} f''(0) - 6[f'(0)]^2, \quad q_{00} := -\frac{1}{3} f''(0) + 2[f'(0)]^2.
\end{aligned}$$

Обозначим через C_σ банахово пространство непрерывных функций, порожденных семейством весовых норм

$$\|\varphi\|_\sigma = \max \left\{ \sup_{(x,t) \in D_2} |\varphi_i(x,t)e^{-\sigma t}|, i = 1, 2, 3, \sup_{t \in [0,T]} |\varphi_j(t)e^{-\sigma t}|, j = 4, \dots, 7 \right\},$$

$\sigma \geq 0$.

Очевидно, что при $\sigma = 0$ это пространство является пространством непрерывных функций с обычной нормой. Эту норму будем обозначать далее $\|\varphi\|$. В силу неравенства

$$e^{-\sigma t} \|\varphi\| \leq \|\varphi\|_\sigma \leq \|\varphi\|,$$

нормы $\|\varphi\|_\sigma$ и $\|\varphi\|$ эквивалентны для любого фиксированного $T \in (0, \infty)$. Число σ будем выбирать позже. Пусть

$$Q_\sigma(\varphi_0, \|\varphi_0\|) := \{\varphi : \|\varphi - \varphi_0\| \leq \|\varphi_0\|\}$$

– шар радиуса $\|\varphi_0\|$ с центром в точке φ_0 некоторого весового пространства C_σ , $\sigma \geq 0$, в котором

$$\|\varphi_0\| = \max(\|\varphi_{01}\|, \|\varphi_{02}\|, \|\varphi_{03}\|, \|\varphi_{04}\|, \|\varphi_{05}\|, \|\varphi_{06}\|, \|\varphi_{07}\|).$$

Нетрудно заметить, что для $Q_\sigma(\varphi_0, \|\varphi_0\|)$ имеет место оценка

$$\|\varphi\|_\sigma \leq \|\varphi_0\|_\sigma + \|\varphi_0\| \leq 2\|\varphi_0\|.$$

Пусть $\varphi(x, t) \in Q_\sigma(\varphi_0, \|\varphi_0\|)$. Покажем, что при подходящем выборе $\sigma > 0$ оператор A переводит шар в шар, т.е. $A\varphi \in Q_\sigma(\varphi_0, \|\varphi_0\|)$. На самом деле, с помощью равенств (5.2)–(5.8) составляя норму разностей, для $(x, t) \in D_2$ имеем

$$\begin{aligned} \|A_1\varphi - \varphi_{01}\| &= \sup_{(x,t) \in D_2} |(A_1\varphi - \varphi_{01})e^{-\sigma t}| \\ &= \sup_{(x,t) \in D_2} \left| - \int_0^{t-x} \int_0^{\tau/2} \left[r_0\varphi_1(\xi, t-\xi)e^{-\sigma(t-\xi)}e^{-\sigma\xi} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \int_0^{t-2\xi} [2\varphi_7(\alpha) - \varphi_4(\alpha) - 2r_0\varphi_5(\alpha) - 4f'(0)\varphi_6(\alpha)]e^{-\sigma\alpha} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \times \varphi_1(\xi, t-\xi-\alpha)e^{-\sigma(t-\xi-\alpha)}e^{-\sigma\xi} d\alpha \right] d\xi d\tau \right. \\ &\quad \left. - \int_{t-x}^t \int_{\tau-t+x}^{(2\tau-t+x)/2} \left[r_0\varphi_1(\xi, 2\tau-t+x-\xi)e^{-\sigma(2\tau-t+x-\xi)} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \times e^{-\sigma(\xi-2\tau-x)} - \int_0^{2\tau-t+x-2\xi} [2\varphi_7(\alpha) - \varphi_4(\alpha) - 2r_0\varphi_5(\alpha) - 4f'(0)\varphi_6(\alpha)] \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \times e^{-\sigma\alpha}\varphi_1(\xi, 2\tau-t+x-\xi-\alpha)e^{-\sigma(2\tau-t+x-\xi-\alpha)}e^{-\sigma(2t+\xi-2\tau-x)} d\alpha \right] d\xi d\tau \right| \\ &\leq \frac{2\|\varphi_0\|}{\sigma} l \left[\frac{5r_0}{2} + 4\|\varphi_0\|(3+2q_{00}+4|f'(0)|)l \right] =: \frac{\|\varphi_0\|}{\sigma} \alpha_1, \\ \|A_2\varphi - \varphi_{02}\| &= \sup_{(x,t) \in D_2} |(A_2\varphi - \varphi_{02})e^{-\sigma t}| \\ &\leq \frac{2\|\varphi_0\|}{\sigma} \left[r_0 \left(1 + \frac{l}{2} \right) + \frac{3+3q_{00}+4|f'(0)|}{3} \left(\frac{1}{4} + \|\varphi_0\|(4+3l) \right) l \right] =: \frac{\|\varphi_0\|}{\sigma} \alpha_2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\|A_3\varphi - \varphi_{03}\| &= \sup_{(x,t) \in D_2} |(A_3\varphi - \varphi_{03})e^{-\sigma t}| \\
&\leq \frac{2\|\varphi_0\|}{\sigma} \left[r_0 \left(1 + \frac{l}{2} \right) + (3 + 3q_{00} + 4|f'(0)|) \right. \\
&\quad \times \left. \left(\frac{1}{6} + \frac{5r_0 l^2}{24} + 2\|\varphi_0\| l \left(\frac{1}{3} + \frac{3l}{2} + (3 + 3q_{00} + 4|f'(0)|) \frac{l}{4} \right) \right) \right] =: \frac{\|\varphi_0\|}{\sigma} \alpha_3, \\
\|A_4\varphi - \varphi_{04}\| &= \sup_{t \in [0; 2l]} |(A_4\varphi - \varphi_{04})e^{-\sigma t}| \\
&\leq \frac{2\|\varphi_0\|}{\sigma} \left[2(F_0 + 1) + \frac{l}{6}(3 + 3q_{00} + 4|f'(0)|) \right. \\
&\quad \times \left. \left(1 + r_0 + 8 \left(2 + \frac{l}{6}(3 + 3q_{00} + 4|f'(0)|)l\|\varphi_0\| \right) \right) \right] =: \frac{\|\varphi_0\|}{\sigma} \alpha_4, \\
\|A_5\varphi - \varphi_{05}\| &= \sup_{t \in [0; 2l]} |(A_5\varphi - \varphi_{05})e^{-\sigma t}| \leq \frac{2\|\varphi_0\|}{\sigma} \frac{(4 + 2q_0 + 8|f'(0)|)l}{3} =: \frac{\|\varphi_0\|}{\sigma} \alpha_5, \\
\|A_6\varphi - \varphi_{06}\| &= \sup_{t \in [0; 2l]} |(A_6\varphi - \varphi_{06})e^{-\sigma t}| \leq \frac{2\|\varphi_0\|}{\sigma} \frac{(2 + q_0 + 4|f'(0)|)l}{3} =: \frac{\|\varphi_0\|}{\sigma} \alpha_6, \\
\|A_7\varphi - \varphi_{07}\| &= \sup_{t \in [0; 2l]} |(A_7\varphi - \varphi_{07})e^{-\sigma t}| \\
&\leq \frac{2\|\varphi_0\|}{\sigma} \left[\frac{(r(0) + 2r_{00}l)(3 + 2q_0 + 4)}{3} + \frac{2}{9}l^2\|\varphi_0\|(3 + 2q_0 + 4)(2 + q_0 + 4) \right] \\
&=: \frac{\|\varphi_0\|}{\sigma} \alpha_7,
\end{aligned}$$

где

$$F_0 = \max_{t \in [0; 2l]} |f_0''(t)|, \quad r_{00} = \frac{r^2(0)}{2} - r'(0).$$

Выбирая $\sigma \geq \alpha_0 := \max(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7)$, получим, что A переводит шар $Q_\sigma(\varphi_0, \|\varphi_0\|)$ в шар $Q_\sigma(\varphi_0, \|\varphi_0\|)$.

Пусть теперь φ^1, φ^2 любые два элемента из $Q_\sigma(\varphi_0, \|\varphi_0\|)$. Тогда, используя вспомогательные неравенства вида

$$|\varphi_i^1 \varphi_j^1 - \varphi_i^2 \varphi_j^2| e^{-\sigma t} \leq |\varphi_i^1| |\varphi_j^1 - \varphi_j^2| e^{-\sigma t} + |\varphi_j^2| |\varphi_i^1 - \varphi_i^2| e^{-\sigma t} \leq 4\|\varphi_0\| \|\varphi^1 - \varphi^2\|_\sigma$$

для $(x, t) \in D_2$, получим

$$\begin{aligned}
\|(A\varphi^1 - A\varphi^2)_1\|_\sigma &= \sup_{(x,t) \in D_2} |(A\varphi^1 - A\varphi^2)_1 e^{-\sigma t}| \\
&\leq \frac{\|\varphi^1 - \varphi^2\|_\sigma}{\sigma} \left[\frac{5r_0}{2} + 8\|\varphi_0\|(3 + 2q_{00} + 4|f'(0)|)l \right] =: \frac{\|\varphi^1 - \varphi^2\|_\sigma}{\sigma} \beta_1, \\
\|(A\varphi^1 - A\varphi^2)_2\|_\sigma &= \sup_{(x,t) \in D_2} |(A\varphi^1 - A\varphi^2)_2 e^{-\sigma t}| \\
&\leq \frac{\|\varphi^1 - \varphi^2\|_\sigma}{\sigma} \left[r_0 \left(1 + \frac{l}{2} \right) + \frac{3 + 3q_{00} + 4|f'(0)|}{3} \left(\frac{1}{4} + \|\varphi_0\|(8 + 6l) \right) \right] \\
&=: \frac{\|\varphi^1 - \varphi^2\|_\sigma}{\sigma} \beta_2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\|(A\varphi^1 - A\varphi^2)_3\|_\sigma &= \sup_{(x,t) \in D_2} |(A\varphi^1 - A\varphi^2)_1 e^{-\sigma t}| \\
&\leq \frac{\|\varphi^1 - \varphi^2\|_\sigma}{\sigma} \left[r_0 \left(1 + \frac{l}{2} \right) + (3 + 3q_{00} + 4|f'(0)|) \right. \\
&\quad \times \left. \left(\frac{1}{6} + \frac{5r_0 l^2}{24} + 4\|\varphi_0\| l \left(\frac{1}{3} + \frac{3l}{2} + (3 + 3q_{00} + 4|f'(0)|) \frac{l}{4} \right) \right) \right] \\
&=: \frac{\|\varphi^1 - \varphi^2\|_\sigma}{\sigma} \beta_3, \\
\|(A\varphi^1 - A\varphi^2)_4\|_\sigma &= \sup_{t \in [0; 2l]} |(A\varphi^1 - A\varphi^2)_1 e^{-\sigma t}| \\
&\leq \frac{\|\varphi^1 - \varphi^2\|_\sigma}{\sigma} \left[2(F_0 + 1) + \frac{l}{6} (3 + 3q_{00} + 4|f'(0)|) \right. \\
&\quad \times \left. \left(1 + r_0 + 8 \left(4 + \frac{l}{3} (3 + 3q_{00} + 4|f'(0)|) l \|\varphi_0\| \right) \right) \right] \\
&=: \frac{\|\varphi^1 - \varphi^2\|_\sigma}{\sigma} \beta_4, \\
\|(A\varphi^1 - A\varphi^2)_5\|_\sigma &= \sup_{t \in [0; 2l]} |(A\varphi^1 - A\varphi^2)_1 e^{-\sigma t}| \leq \frac{\|\varphi^1 - \varphi^2\|_\sigma}{\sigma} \frac{(4 + 2q_0 + 8|f'(0)|)}{3} l \\
&=: \frac{\|\varphi^1 - \varphi^2\|_\sigma}{\sigma} \beta_5, \\
\|(A\varphi^1 - A\varphi^2)_6\|_\sigma &= \sup_{t \in [0; 2l]} |(A\varphi^1 - A\varphi^2)_1 e^{-\sigma t}| \leq \frac{\|\varphi^1 - \varphi^2\|_\sigma}{\sigma} (2 + 2r_0 + 4|f'(0)|) \\
&=: \frac{\|\varphi^1 - \varphi^2\|_\sigma}{\sigma} \beta_6, \\
\|(A\varphi^1 - A\varphi^2)_7\|_\sigma &= \sup_{t \in [0; 2l]} |(A\varphi^1 - A\varphi^2)_1 e^{-\sigma t}| \\
&\leq \frac{\|\varphi^1 - \varphi^2\|_\sigma}{\sigma} \left[\frac{(r(0) + 2r_{00}l)(3 + 2q_0 + 4)}{3} + \frac{4}{9} l^2 \|\varphi_0\| (3 + 2q_0 + 4)(2 + q_0 + 4) \right] \\
&=: \frac{\|\varphi^1 - \varphi^2\|_\sigma}{\sigma} \beta_7.
\end{aligned}$$

Пусть $\beta_0 := \max(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5, \beta_6, \beta_7)$. Как следует из проделанных оценок, если число σ выбрано из условия $\sigma > \max(\alpha_0, \beta_0)$, то оператор A является сжимающим на $Q_\sigma(\varphi_0, \|\varphi_0\|)$. Тогда согласно принципу Банаха уравнение (4.1) имеет и притом единственное решение в $Q_\sigma(\varphi_0, \|\varphi_0\|)$ при любом фиксированном $T > 0$.

Так как $k_0(t) := k(t) \exp(r(0)t/2)$, то по найденной функции $k_0(t)$ функция $k(t)$ находится по формуле

$$k(t) := k_0(t) \exp\left(-r(0) \frac{t}{2}\right).$$

Теорема доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] A. Lorenzi, E. Paparoni, "Direct and inverse problems in the theory of materials with memory", *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova*, 1992, №87, 105–138.

- [2] A. Lorenzi, “An identification problem related to a nonlinear hyperbolic integro-differential equation”, *Nonlinear Anal.: Theory Methods Appl.*, **22** (1994), 297–321.
- [3] A. Lorenzi, V. I. Priimenko, “Identification problems related to electro-magneto-elastic interactions”, *J. Inverse Ill-Posed Probl.*, **4**:2 (1996), 115–143.
- [4] A. L. Bukhgeim, “Inverse problems of memory reconstruction”, *J. Inverse Ill-Posed Probl.*, **1**:3 (1993), 193–205.
- [5] Л. Бухгейм, Г. В. Дятлов, “Единственность в одной обратной задаче определения памяти”, *Сиб. матем. журн.*, **37**:3 (1996), 526–533.
- [6] А. Л. Бухгейм, Н. И. Калинина, “Глобальная сходимость метода Ньютона в обратных задачах восстановления памяти”, *Сиб. матем. журн.*, **38**:5 (1997), 1018–1033.
- [7] А. Л. Бухгейм, Г. В. Дятлов, В. М. Исаков, “Устойчивость восстановления памяти по оператору Дирихле–Неймана”, *Сиб. матем. журн.*, **38**:4 (1997), 738–749.
- [8] J. Janno, L. Von Wolfersdorf, “Inverse problems for identification of memory kernels in viscoelasticity”, *Math. Methods Appl. Sci.*, **20**:4 (1997), 291–314.
- [9] А. Л. Бухгейм, Н. И. Калинина, В. Б. Кардаков, “Два метода в обратной задаче определения памяти”, *Сиб. матем. журн.*, **41**:4 (2000), 767–776.
- [10] A. Lorenzi, F. Messina, V. G. Romanov, “Recovering a Lamé kernel in a viscoelastic system”, *Appl. Anal.*, **86**:11 (2007), 1375–1395.
- [11] Д. К. Дурдиев, “Глобальная разрешимость одной обратной задачи для интегродифференциального уравнения электродинамики”, *Дифференц. уравнения*, **44**:7 (2008), 867–873.
- [12] Д. К. Дурдиев, “Обратная задача определения двух коэффициентов в одном интегродифференциальном волновом уравнении”, *Сиб. журн. индустр. матем.*, **12**:3 (2009), 28–40.
- [13] A. Lorenzi, V. G. Romanov, “Recovering two Lamé kernels in a viscoelastic system”, *Inverse. Probl. Imaging*, **5**:2 (2011), 431–464.
- [14] Д. К. Дурдиев, Ж. Д. Тотиева, “Задача об определении одномерного ядра уравнения вязкоупругости”, *Сиб. журн. индустр. матем.*, **16**:2 (2013), 72–82.
- [15] В. Г. Романов, *Обратные задачи математической физики*, Наука, М., 1984.
- [16] А. С. Алексеев, В. И. Добринский, “Некоторые вопросы приложения обратной динамической задачи сейсмологии”, *Математические проблемы геофизики*, **6**, № 2, Изд-во ВЦ СО АН СССР, Новосибирск, 1975, 7–53.

Д. К. Дурдиев

Бухарский государственный университет,
Узбекистан

E-mail: durdiev65@mail.ru

Поступило

17.03.2014

Исправленный вариант

12.05.2014

Ж. Ш. Сафаров

Ташкентский университет информационных
технологий, Узбекистан

E-mail: jurabek_safarov65@mail.ru