Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Н. Феллер, Краевые задачи для нелинейного гиперболического уравнения с переменными коэффициентами и лапласианом Леви. II, *Матем. заметки*, 2015, том 97, выпуск 6, 917–924

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10660>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.130.99

26 апреля 2023 г., 13:34:46

УДК 517.9

Краевые задачи для нелинейного гиперболического уравнения с переменными коэффициентами и лапласианом Леви. II

М. Н. Феллер

Для нелинейного гиперболического уравнения с переменными коэффициентами и бесконечномерным лапласианом Леви Δ_L

$$\left(\sqrt{2}\|x\|_H \frac{\partial U(t, x)}{\partial t} \ln \frac{1}{\sqrt{2}\|x\|_H (\partial U(t, x)/\partial t)} \right)^{-1} \frac{\partial^2 U(t, x)}{\partial t^2} - \alpha(U(t, x)) \left[\frac{\partial U(t, x)}{\partial t} \right]^2 = \Delta_L U(t, x)$$

получены формулы решения краевой задачи

$$U(0, x) = u_0, \quad U(t, 0) = u_1$$

и краевой внешней задачи

$$U(0, x) = v_0, \quad U(t, x)|_\Gamma = v_1, \quad \lim_{\|x\|_H \rightarrow \infty} U(t, x) = v_2.$$

Библиография: 9 названий.

DOI: 10.4213/mzm10660

1. Введение. Бесконечномерный лапласиан ввел Леви в 1922 г. [1]. Теория линейных эллиптических и параболических уравнений с лапласианом Леви изложена в монографии Феллера [2].

Теории линейных гиперболических уравнений с лапласианом Леви посвящены работы [3]–[5]. Нелинейные гиперболические уравнения с лапласианом Леви встречаются в статьях [6]–[8].

Эта статья продолжает нашу работу [8].

В настоящей статье получены формулы решения краевой задачи для нелинейного гиперболического уравнения с переменными коэффициентами и с лапласианом Леви

$$\left(\sqrt{2}\|x\|_H \frac{\partial U(t, x)}{\partial t} \ln \frac{1}{\sqrt{2}\|x\|_H (\partial U(t, x)/\partial t)} \right)^{-1} \frac{\partial^2 U(t, x)}{\partial t^2} - \alpha(U(t, x)) \left[\frac{\partial U(t, x)}{\partial t} \right]^2 = \Delta_L U(t, x), \quad t > 0, \quad x \in H, \\ U(0, x) = u_0, \quad U(t, 0) = u_1$$

и формула решения краевой внешней задачи для нелинейного гиперболического уравнения с переменными коэффициентами и с лапласианом Леви

$$\begin{aligned} & \left(\sqrt{2} \|x\|_H \frac{\partial U(t, x)}{\partial t} \ln \frac{1}{\sqrt{2} \|x\|_H (\partial U(t, x) / \partial t)} \right)^{-1} \frac{\partial^2 U(t, x)}{\partial t^2} - \alpha(U(t, x)) \left[\frac{\partial U(t, x)}{\partial t} \right]^2 \\ & = \Delta_L U(t, x), \quad t > 0, \quad x \in \Omega', \\ & U(0, x) = v_0, \quad U(t, x)|_\Gamma = v_1, \quad \lim_{\|x\|_H \rightarrow \infty} U(t, x) = v_2, \end{aligned}$$

где $\Gamma \cup \Omega' = \{x \in H : \|x\|_H^2 \geq R^2\}$.

2. Предварительные сведения. Пусть H – счетномерное вещественное гильбертово пространство. Рассмотрим скалярные функции $F(x)$ на H , $x \in H$.

Для функции $F(x)$, дважды сильно дифференцируемой в точке x_0 , лапласиан Леви в этой точке определяется, если он существует, формулой

$$\Delta_L F(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (F''(x_0) f_k, f_k)_H, \quad (1)$$

где $F''(x)$ – гессиан функции $F(x)$, $\{f_k\}_1^\infty$ – выбранный ортонормированный базис в H .

Приведем свойство лапласиана Леви (1), полученное в [1], которое понадобится в дальнейшем (см. также [2]). Пусть функция

$$F(x) = f(V_1(x), \dots, V_m(x)),$$

где $f(v_1, \dots, v_m)$ – дважды непрерывно дифференцируемая функция m переменных в области значений $\{V_1(x), \dots, V_m(x)\} \subset \mathbb{R}^m$. Пусть $V_k(x)$ – дважды сильно дифференцируемые функции и $\Delta_L V_k(x)$, $k = 1, \dots, m$, существует. Тогда $\Delta_L F(x)$ существует и

$$\Delta_L F(x) = \sum_{k=1}^m \frac{\partial f}{\partial v_k} \Big|_{v_k=V_k(x)} \Delta_L V_k(x). \quad (2)$$

Обозначим через C^{sh} *шиловский класс* функций – совокупность функций вида

$$F(x) = f\left((a_1, x)_H, \dots, (a_m, x)_H, \frac{\|x\|_H^2}{2}\right),$$

где $a_1, \dots, a_m$ – некоторые элементы пространства H , $f(\xi_1, \dots, \xi_m, \zeta)$ – функция $m+1$ переменных, определенная и непрерывная в области $\mathbb{R}^{m+1}$.

Обозначим через C^* подмножество функции из C^{sh} , дважды непрерывно дифференцируемых по аргументу $\|x\|_H^2/2$.

Для $F(x) \in C^*$ имеет место формула [9]

$$\Delta_L F(x) = \frac{\partial f((a_1, x)_H, \dots, (a_m, x)_H, \zeta)}{\partial \zeta} \Big|_{\zeta=\|x\|_H^2/2}. \quad (3)$$

Лапласиан Леви (1) в шиловском классе функций не зависит от выбора базиса.

Обозначим через $\bar{\Omega} = \{x \in H : \|x\|_H^2 \leq R^2\}$ шар, а через Ω' – множество точек, внешних по отношению к шару:

$$\Omega' = \{x \in H : \|x\|_H^2 > R^2\}, \quad \Gamma = \{x \in H : \|x\|_H^2 = R^2\}.$$

Введем функцию

$$S(x) = \frac{\|x\|_H^2 - R^2}{2}.$$

Функция $S(x)$ обладает такими свойствами:

$$S(x) > 0 \quad \text{при } x \in \Omega', \quad S(x) = 0 \quad \text{при } x \in \Gamma, \quad \Delta_L S(x) = 1.$$

3. Краевая задача. Рассмотрим задачу

$$\begin{aligned} & \left(\sqrt{2}\|x\|_H \frac{\partial U(t, x)}{\partial t} \ln \frac{1}{\sqrt{2}\|x\|_H (\partial U(t, x)/\partial t)} \right)^{-1} \frac{\partial^2 U(t, x)}{\partial t^2} - \alpha(U(t, x)) \left[\frac{\partial U(t, x)}{\partial t} \right]^2 \\ & = \Delta_L U(t, x), \quad t > 0, \quad x \in H, \end{aligned} \quad (4)$$

$$U(0, x) = u_0, \quad U(t, 0) = u_1, \quad (5)$$

где $\alpha(\xi)$ – заданная функция на $\mathbb{R}^1$, числа u_0, u_1 заданы.

ТЕОРЕМА 1. Пусть функция $\alpha(\xi)$ такая, что функция $\exp(\exp(-\int_{u_0}^s \alpha(\xi) d\xi))$ интегрируема. Тогда решение задачи (4), (5) (в неявном виде) дается формулой

$$\begin{aligned} & \int_{u_0}^{U(t, x)} \exp \left(\exp \left(- \int_{u_0}^s \alpha(\xi) d\xi \right) \right) ds \left[\int_{u_0}^{u_1} \exp \left(\exp \left(- \int_{u_0}^s \alpha(\xi) d\xi \right) \right) ds \right]^{-1} \\ & = \frac{1}{c_0} \int_0^{(t/2)\sqrt{\|x\|_H^2/2}} \exp(-\exp(p^2)) dp, \end{aligned} \quad (6)$$

где $c_0 = \int_0^\infty \exp(-\exp(p^2)) dp$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно формуле (3) уравнение (4) и условия (5) принимают вид

$$\begin{aligned} & \left(2\sqrt{\varsigma} \frac{\partial u(t, \varsigma)}{\partial t} \ln \frac{1}{2\sqrt{\varsigma} (\partial u(t, \varsigma)/\partial t)} \right)^{-1} \frac{\partial^2 u(t, \varsigma)}{\partial t^2} - \alpha(u(t, \varsigma)) \left[\frac{\partial u(t, \varsigma)}{\partial t} \right]^2 \\ & = \frac{\partial u(t, \varsigma)}{\partial \varsigma} \Big|_{\varsigma=\|x\|_H^2/2}, \end{aligned} \quad (7)$$

$$u(0, \varsigma) = u_0, \quad u(t, 0) = u_1. \quad (8)$$

Уравнение (7) не изменяется при преобразовании переменных $\bar{t} = ct, \bar{\varsigma} = c^2\varsigma$ при любых t, ς, c (см. также [8; с. 442–443]). Действительно, с одной стороны,

$$\frac{\partial u(t, \varsigma)}{\partial t} = c \frac{\partial u(t, \varsigma)}{\partial \bar{t}}, \quad \frac{\partial u(t, \varsigma)}{\partial \varsigma} = c^2 \frac{\partial u(t, \varsigma)}{\partial \bar{\varsigma}}, \quad \frac{\partial^2 u(t, \varsigma)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u(t, \varsigma)}{\partial \bar{t}^2}$$

и из (7) имеем

$$\begin{aligned} & \left(2\sqrt{\frac{\bar{\varsigma}}{c^2}} c \frac{\partial u(t, \varsigma)}{\partial \bar{t}} \ln \frac{1}{2\sqrt{\bar{\varsigma}/c^2} c (\partial u(t, \varsigma)/\partial \bar{t})} \right)^{-1} c^2 \frac{\partial^2 u(t, \varsigma)}{\partial \bar{t}^2} - \alpha(u(t, \varsigma)) \left[c \frac{\partial u(t, \varsigma)}{\partial \bar{t}} \right]^2 \\ & = c^2 \frac{\partial u(t, \varsigma)}{\partial \bar{\varsigma}}. \end{aligned}$$

Сокращая на c^2 , получим

$$\left(\sqrt{\varsigma} \frac{\partial u(t, \varsigma)}{\partial \bar{t}} \ln \frac{1}{\sqrt{\varsigma}(\partial u(t, \varsigma)/\partial \bar{t})} \right)^{-1} \frac{\partial^2 u(t, \varsigma)}{\partial \bar{t}^2} - \alpha(u(t, \varsigma)) \left[\frac{\partial u(t, \varsigma)}{\partial \bar{t}} \right]^2 = \frac{\partial u(t, \varsigma)}{\partial \varsigma}. \quad (9)$$

С другой стороны, уравнение (7) имеет место для любых t, ς , а значит, и для $\bar{t}, \bar{\varsigma}$, поэтому

$$\left(\sqrt{\bar{\varsigma}} \frac{\partial u(\bar{t}, \bar{\varsigma})}{\partial \bar{t}} \ln \frac{1}{\sqrt{\bar{\varsigma}}(\partial u(\bar{t}, \bar{\varsigma})/\partial \bar{t})} \right)^{-1} \frac{\partial^2 u(\bar{t}, \bar{\varsigma})}{\partial \bar{t}^2} - \alpha(u(\bar{t}, \bar{\varsigma})) \left[\frac{\partial u(\bar{t}, \bar{\varsigma})}{\partial \bar{t}} \right]^2 = \frac{\partial u(\bar{t}, \bar{\varsigma})}{\partial \bar{\varsigma}}. \quad (10)$$

Не изменяются и условия (8).

Сравнивая равенства (9) и (10), имеем, что $u(t, \varsigma) = u(\bar{t}, \bar{\varsigma})$, т.е.

$$u(t, \varsigma) = u(ct, c^2\varsigma).$$

Полагая $c = 1/(2\sqrt{\varsigma})$, получим, что

$$u(t, \varsigma) = u\left(\frac{t}{2\sqrt{\varsigma}}, \frac{1}{4}\right) = \varphi\left(\frac{t}{2\sqrt{\varsigma}}\right) = \varphi(z), \quad z = \frac{t}{2\sqrt{\varsigma}}, \quad \varsigma = \frac{\|x\|_H^2}{2}. \quad (11)$$

То есть $u(t, \varsigma)$ зависит только от аргумента $z = t/(2\sqrt{\varsigma})$.

Из (11) имеем, что

$$\frac{\partial u(t, \varsigma)}{\partial t} = \frac{1}{2\sqrt{\varsigma}} \frac{d\varphi(z)}{dz}, \quad \frac{\partial^2 u(t, \varsigma)}{\partial t^2} = \frac{1}{4\varsigma} \frac{d^2\varphi(z)}{dz^2}, \quad \frac{\partial u(t, \varsigma)}{\partial \varsigma} = -\frac{z}{2\varsigma} \frac{d\varphi(z)}{dz}.$$

Подставляя эти выражения в уравнение (7) и сокращая на $1/(4\varsigma)$, получим для функции $\varphi(z)$ обыкновенное дифференциальное нелинейное уравнение второго порядка

$$\left(\frac{d\varphi(z)}{dz} \ln \frac{dz}{d\varphi} \right)^{-1} \frac{d^2\varphi(z)}{dz^2} - \alpha(\varphi(z)) \left[\frac{d\varphi(z)}{dz} \right]^2 + 2z \frac{d\varphi(z)}{dz} = 0, \quad (12)$$

а из условий (8) (поскольку $z = t/(2\sqrt{\varsigma})$, $\varsigma = \|x\|_H^2/2$) вытекают условия

$$\varphi(0) = u_0, \quad \varphi(z)|_{z=\infty} = u_1. \quad (13)$$

Поделив уравнение (12) на $\varphi'(z)$ и проинтегрировав, получим обыкновенное дифференциальное нелинейное уравнение первого порядка

$$\int \frac{d\varphi'}{(\varphi')^2 \ln(dz/d\varphi)} - \int \alpha(\varphi) d\varphi + \int 2z dz = \ln \ln c_0.$$

Поскольку

$$\int \frac{d\varphi'}{(\varphi')^2 \ln(dz/d\varphi)} = -\ln \ln \frac{dz}{d\varphi},$$

то задача (12), (13) принимает вид

$$\ln \ln \frac{dz}{d\varphi} = - \int \alpha(\varphi) d\varphi + z^2 + \ln \ln c_0, \quad (14)$$

$$\varphi(0) = u_0, \quad \varphi(z)|_{z=\infty} = u_1.$$

Из (14) имеем

$$dz = c_0 \exp \left(\exp \left(- \int \alpha(\varphi) d\varphi + z^2 \right) \right) d\varphi.$$

Умножив слева и справа на $\exp(-\exp(z^2))$ и интегрируя, получаем, что

$$\int \exp(-\exp(z^2)) dz = c_0 \int \exp \left(\exp \left(- \int \alpha(\varphi) d\varphi \right) \right) d\varphi + c_1.$$

С учетом краевых условий (13) имеем

$$\begin{aligned} & \int_{u_0}^{\varphi(z)} \exp \left(\exp \left(- \int_{u_0}^s \alpha(\xi) d\xi \right) \right) ds \left[\int_{u_0}^{u_1} \exp \left(\exp \left(- \int_{u_0}^s \alpha(\xi) d\xi \right) \right) ds \right]^{-1} \\ &= \frac{1}{c_0} \int_0^z \exp(-\exp(p^2)) dp, \end{aligned} \quad (15)$$

где

$$c_0 = \int_0^\infty \exp(-\exp(p^2)) dp.$$

Теперь, поскольку

$$\varphi(z) = u(t, \varsigma), \quad z = \frac{t}{2\sqrt{\varsigma}}, \quad \varsigma = \frac{\|x\|_H^2}{2}, \quad u(t, \varsigma)|_{\varsigma=\|x\|_H^2/2} = U(t, x),$$

то из формулы (15) получаем, что решение задачи (4), (5) (в неявном виде) равно (6):

$$\begin{aligned} & \int_{u_0}^{U(t,x)} \exp \left(\exp \left(- \int_{u_0}^s \alpha(\xi) d\xi \right) \right) ds \left[\int_{u_0}^{u_1} \exp \left(\exp \left(- \int_{u_0}^s \alpha(\xi) d\xi \right) \right) ds \right]^{-1} \\ &= \frac{1}{c_0} \int_0^{(t/2)\sqrt{\|x\|_H^2/2}} \exp(-\exp(p^2)) dp. \end{aligned}$$

Полагая в (6) $t = 0$, получаем $U(0, x) = u_0$, а полагая $x = 0$, имеем $U(t, 0) = u_1$.

4. Краевая задача (внешняя). Рассмотрим задачу

$$\begin{aligned} & \left(\sqrt{2}\|x\|_H \frac{\partial U(t, x)}{\partial t} \ln \frac{1}{\sqrt{2}\|x\|_H (\partial U(t, x)/\partial t)} \right)^{-1} \frac{\partial^2 U(t, x)}{\partial t^2} - \alpha(U(t, x)) \left[\frac{\partial U(t, x)}{\partial t} \right]^2 \\ &= \Delta_L U(t, x), \quad t > 0, \quad x \in \Omega', \end{aligned} \quad (16)$$

$$U(0, x) = v_0, \quad U(t, x)|_\Gamma = v_1, \quad \lim_{\|x\|_H \rightarrow \infty} U(t, x) = v_2, \quad (17)$$

где $\alpha(\xi)$ – заданная функция на $\mathbb{R}^1$, числа v_0, v_1, v_2 заданы, а $\Gamma \cup \Omega' = \{x \in H : \|x\|_H^2 \geq R^2\}$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть функция $\alpha(\xi)$ такая, что функция $\exp(\exp(-\int_{v_0}^s \alpha(\xi) d\xi))$ интегрируема.

Тогда решение задачи (16), (17) (в неявном виде) дается формулой

$$\begin{aligned} & \int_{v_0}^{U(t,x)} \exp \left(\exp \left(- \int_{v_0}^s \alpha(\xi) d\xi \right) \right) ds \left[\int_{v_0}^{v_1} \exp \left(\exp \left(- \int_{v_0}^s \alpha(\xi) d\xi \right) \right) ds \right]^{-1} \\ &= \frac{1}{c_0} \int_0^{t/(2\sqrt{S(x)})} \exp(-\exp(p^2)) dp, \end{aligned} \quad (18)$$

зде

$$c_0 = \int_0^\infty \exp(-\exp(p^2)) dp, \quad S(x) = \frac{\|x\|_H^2 - R^2}{2}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно формуле (2) при $m = 1$ уравнение (16) принимает вид

$$\begin{aligned} & \left(2\sqrt{\eta} \frac{\partial u(t, \eta)}{\partial t} \ln \frac{1}{2\sqrt{\eta}(\partial u(t, \eta)/\partial t)} \right)^{-1} \frac{\partial^2 u(t, \eta)}{\partial t^2} - \alpha(u(t, \eta)) \left[\frac{\partial u(t, \eta)}{\partial t} \right]^2 \\ & = \frac{\partial u(t, \eta)}{\partial \eta} \Big|_{\eta=S(x)} \Delta_L S(x). \end{aligned}$$

Но $S(x) = (\|x\|_H^2 - R^2)/2$ и, значит,

$$\Delta_L S(x) = \frac{\Delta_L \|x\|_H^2}{2} = 1.$$

Поэтому имеем

$$\left(2\sqrt{\eta} \frac{\partial u(t, \eta)}{\partial t} \ln \frac{1}{2\sqrt{\eta}(\partial u(t, \eta)/\partial t)} \right)^{-1} \frac{\partial^2 u(t, \eta)}{\partial t^2} - \alpha(u(t, \eta)) \left[\frac{\partial u(t, \eta)}{\partial t} \right]^2 = \frac{\partial u(t, \eta)}{\partial \eta}, \quad (19)$$

$$u(0, \eta) = v_0, \quad u(t, 0) = v_1. \quad (20)$$

Уравнение (19) и условия (20) не изменяются при преобразовании переменных $\bar{t} = ct$, $\bar{\eta} = c^2\eta$ при любых t, η, c . Поэтому

$$u(t, \eta) = u(ct, c^2\eta).$$

Полагая $c = 1/(2\sqrt{\eta})$, получим

$$u(t, \eta) = u\left(\frac{t}{2\sqrt{\eta}}, \frac{1}{4}\right) = \varphi\left(\frac{t}{2\sqrt{\eta}}\right) = \varphi(w), \quad w = \frac{t}{2\sqrt{\eta}}, \quad \eta = S(x). \quad (21)$$

Из (21) имеем

$$\frac{\partial u(t, \eta)}{\partial t} = \frac{1}{2\sqrt{\eta}} \frac{d\varphi(w)}{dw}, \quad \frac{\partial^2 u(t, \eta)}{\partial t^2} = \frac{1}{4\eta} \frac{d^2\varphi(w)}{dw^2}, \quad \frac{\partial u(t, \eta)}{\partial \eta} = -\frac{w}{2\eta} \frac{d\varphi(w)}{dw}.$$

Подставляя эти выражения в уравнение (19) и условия (20) и сокращая на $1/(4\eta)$, получим для функции $\varphi(w)$ обыкновенное дифференциальное нелинейное уравнение второго порядка

$$\left(\frac{d\varphi(w)}{dw} \ln \frac{dw}{d\varphi} \right)^{-1} \frac{d^2\varphi(w)}{dw^2} - \alpha(\varphi(w)) \left[\frac{d\varphi(w)}{dw} \right]^2 + 2w \frac{d\varphi(w)}{dw} = 0. \quad (22)$$

Из условий (20) (поскольку $w = t/(2\sqrt{\eta})$, $\eta = S(x)$, а $S(x)|_\Gamma = 0$) следуют условия

$$\varphi(0) = v_0, \quad \varphi(w)|_{w=\infty} = v_1. \quad (23)$$

Поделив уравнение (22) на $\varphi'(w)$ и проинтегрировав, получим обыкновенное дифференциальное нелинейное уравнение первого порядка

$$\int \frac{d\varphi'}{(\varphi')^2 \ln(dw/d\varphi)} - \int \alpha(\varphi) d\varphi + \int 2w dw = \ln \ln c_0.$$

Поскольку

$$\int \frac{d\varphi'}{(\varphi')^2 \ln(dw/d\varphi)} = -\ln \ln \left(\frac{dw}{d\varphi} \right),$$

то задача (22), (23) принимает вид

$$\begin{aligned} \ln \ln \frac{dw}{d\varphi} &= -\int \alpha(\varphi) d\varphi + w^2 + \ln \ln c_0, \\ \varphi(0) &= v_0, \quad \varphi(w)|_{w=\infty} = v_1. \end{aligned} \quad (24)$$

Из (24) имеем

$$dw = c_0 \exp \left(\exp \left(-\int \alpha(\varphi) d\varphi + w^2 \right) \right) d\varphi.$$

Отсюда, умножив справа и слева на $\exp(-\exp(w^2))$ и интегрируя, получаем, что

$$\int \exp(-\exp(w^2)) dw = c_0 \int \exp \left(\exp \left(-\int \alpha(\varphi) d\varphi \right) \right) d\varphi + c_1.$$

С учетом краевых условий (23) имеем

$$\begin{aligned} &\int_{v_0}^{\varphi(w)} \exp \left(\exp \left(-\int_{v_0}^s \alpha(\xi) d\xi \right) \right) ds \left[\int_{v_0}^{v_1} \exp \left(\exp \left(-\int_{u_0}^s \alpha(\xi) d\xi \right) \right) ds \right]^{-1} \\ &= \frac{1}{c_0} \int_0^w \exp(-\exp(p^2)) dp, \end{aligned} \quad (25)$$

где

$$c_0 = \int_0^\infty \exp(-\exp(p^2)) dp.$$

Наконец, поскольку имеем

$$\varphi(w) = u(t, \eta), \quad w = \frac{t}{(2\sqrt{\eta})}, \quad \eta = S(x), \quad u(t, \eta)|_{\eta=S(x)} = U(t, x),$$

то из формулы (25) получаем, что решение задачи (16), (17) (в неявном виде) равно (18):

$$\begin{aligned} &\int_{v_0}^{U(t,x)} \exp \left(\exp \left(-\int_{v_0}^s \alpha(\xi) d\xi \right) \right) ds \left[\int_{v_0}^{v_1} \exp \left(\exp \left(-\int_{v_0}^s \alpha(\xi) d\xi \right) \right) ds \right]^{-1} \\ &= \frac{1}{c_0} \int_0^{t/(2\sqrt{S(x)})} \exp(-\exp(p^2)) dp. \end{aligned}$$

Полагая в (18) $t = 0$, получаем $U(0, x) = v_0$. На поверхности Γ $S(x) = 0$ и из (18) имеем $U(t, x)|_\Gamma = v_1$. Поскольку $S(x) = (\|x\|_H^2 - R^2)/2$, то из (18) следует, что

$$\lim_{\|x\|_H \rightarrow \infty} U(t, x) = v_2, \quad v_2 = v_0.$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] P. Lévy, *Problèmes concrets d'analyse fonctionnelle*, Gauthier–Villars, Paris, 1951.
- [2] M. N. Feller, *The Lévy Laplacian*, Cambridge Tracts in Math., **166**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2005.
- [3] М. Н. Феллер, “Краевые задачи для волнового уравнения с лапласианом Леви в классе Гато”, *Укр. матем. журн.*, **61**:11 (2009), 1564–1574.
- [4] S. Albeverio, Ya. I. Belopolskaya, M. N. Feller, “Boundary problems for the wave equation with the Lévy Laplacian in Shilov’s class”, *Methods Funct. Anal. Topology*, **16**:3 (2010), 197–202.
- [5] С. А. Альбеверио, Я. И. Белопольская, М. Н. Феллер, “Задача Коши для волнового уравнения с лапласианом Леви”, *Матем. заметки*, **87**:6 (2010), 803–813.
- [6] М. Н. Феллер, “Краевые задачи для нелинейного гиперболического уравнения с дивергентной частью и с лапласианом Леви”, *Укр. матем. журн.*, **64**:2 (2012), 237–244.
- [7] И. И. Ковтун, М. Н. Феллер, “Краевые задачи для нелинейного гиперболического уравнения с лапласианом Леви”, *Укр. матем. журн.*, **64**:11 (2013), 1492–1499.
- [8] М. Н. Феллер, “Краевые задачи для нелинейного гиперболического уравнения с переменными коэффициентами и лапласианом Леви”, *Матем. заметки*, **96**:3 (2014), 440–449.
- [9] Г. Е. Шилов, “О некоторых вопросах анализа в гильбертовом пространстве, Γ ”, *Функц. анализ и его прил.*, **1**:2 (1967), 81–90.

М. Н. Феллер

Украинский научно-исследовательский институт

“Ресурс”, г. Киев

E-mail: feller@otblesk.com

Поступило

07.08.2014