Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. А. Вепринцев, Приближение в L_2 частичными интегралами многомерного преобразования Якоби, *Матем. заметки*, 2015, том 97, выпуск 6, 815–831

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10661>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.90.164.192

26 апреля 2023 г., 15:40:36

УДК 517.5

Приближение в L_2 частичными интегралами многомерного преобразования Якоби

Р. А. Вепринцев

В пространстве $L_2(\mathbb{R}_+^d)$ с гиперболическим весом доказано точное неравенство Джексона с оптимальным аргументом в модуле непрерывности. Оптимальный аргумент – это наименьшее значение аргумента в модуле непрерывности, при котором точная константа в неравенстве Джексона минимальна. Приближение осуществляется частичными интегралами многомерного преобразования Якоби. Оптимальный аргумент исследуется в зависимости от геометрии области в частичном интеграле и геометрии окрестности нуля в определении модуля непрерывности. Оптимальный аргумент найден в случае, когда первое тело есть l_p -шар при $1 \leq p \leq 2$, а второе – параллелепипед.

Библиография: 21 название.

DOI: 10.4213/mzm10661

1. Введение. В исследованиях, посвященных доказательствам точных неравенств Джексона между величиной наилучшего приближения и модулем непрерывности функции в пространстве L_2 , важной стала задача об оптимальном аргументе в модуле непрерывности.

Точная константа в неравенстве Джексона, зависящая от приближающего подпространства и модуля непрерывности, имеет глобальный минимум. Если фиксировать приближающее подпространство, то минимальное значение аргумента в модуле непрерывности, при котором константа Джексона становится наименьшей, называется *оптимальным аргументом*. В 1979 г. Черных [1] доказал, что аргумент в его точном неравенстве Джексона [2] для тора $\mathbb{T}$ является оптимальным. Наиболее полные результаты по оптимальным аргументам получены для евклидова пространства, в том числе и со степенным весом [3]–[10]. Авторы этих работ показали, что оптимальный аргумент зависит как от геометрии спектра приближающих целых функций, так и геометрии окрестности нуля в определении модуля непрерывности.

В [11] доказано точное неравенство Джексона с оптимальным аргументом в модуле непрерывности в пространстве $L_2(\mathbb{R})$ с гиперболическим весом.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 13-01-00045) и Министерства образования и науки РФ (госзадание № 1.1333.2014К).

В настоящей работе доказывается точное неравенство Джексона с оптимальным аргументом в модуле непрерывности в пространстве $L_2(\mathbb{R}_+^d)$ с многомерным гиперболическим весом (см. п. 3)

$$\Delta(t) = \prod_{j=1}^d \Delta_j(t_j) = \prod_{j=1}^d 2^{2\rho_j} (\operatorname{sh} t_j)^{2\alpha_j+1} (\operatorname{ch} t_j)^{2\beta_j+1}, \quad t = (t_1, \dots, t_d) \in \mathbb{R}_+^d, \quad (1.1)$$

где $\alpha_j \geq \beta_j \geq -1/2$, $\alpha_j > -1/2$, $\rho_j = \alpha_j + \beta_j + 1$, $j = 1, \dots, d$.

Приближение осуществляется частичными интегралами многомерного преобразования Якоби. Оптимальный аргумент исследуется в зависимости от геометрии области в частичных интегралах и геометрии окрестности нуля в определении модуля непрерывности. Оптимальный аргумент найден в случае, когда первое тело есть l_p -шар при $1 \leq p \leq 2$, а второе – параллелепипед.

2. Элементы гармонического анализа в пространствах с гиперболическим весом. Пусть $\mathbb{R}^d$ ($\mathbb{C}^d$) – d -мерное действительное (комплексное) пространство с евклидовой нормой $|x|$,

$$\mathbb{R}_+^d = \{x \in \mathbb{R}^d : x_j \geq 0, j = 1, \dots, d\},$$

$\Gamma(z)$ – гамма-функция, $F(a, b, c; z) = {}_2F_1(a, b, c; z)$ – гипергеометрическая функция Гаусса, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$, $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_d)$, $\rho = (\rho_1, \dots, \rho_d)$,

$$\alpha_j \geq \beta_j \geq -\frac{1}{2}, \quad \alpha_j > -\frac{1}{2}, \quad \rho_j = \alpha_j + \beta_j + 1,$$

$t \in \mathbb{R}^d$, $\lambda \in \mathbb{C}^d$,

$$\varphi_\lambda(t) = \varphi_\lambda^{(\alpha, \beta)}(t) = \prod_{j=1}^d \varphi_{\lambda_j}^{(\alpha_j, \beta_j)}(t_j) = \prod_{j=1}^d F\left(\frac{\rho_j + i\lambda_j}{2}, \frac{\rho_j - i\lambda_j}{2}; \alpha_j + 1; -(\operatorname{sh} t_j)^2\right)$$

– многомерная функция Якоби (см. [12]–[14]), $E^{a_1, \dots, a_d}$ – класс целых функций $g(\lambda)$ экспоненциального типа $(a_1, \dots, a_d)$, $a_j > 0$, удовлетворяющих оценке

$$|g(\lambda)| \leq c_g e^{a_1 |\operatorname{Im} \lambda_1| + \dots + a_d |\operatorname{Im} \lambda_d|}, \quad \lambda \in \mathbb{C}^d,$$

четных по каждой переменной.

Функция Якоби является собственной функцией задачи Штурма–Лиувилля

$$\sum_{j=1}^d \frac{\partial}{\partial t_j} \left(\Delta(t) \frac{\partial}{\partial t_j} \varphi_\lambda(t) \right) + (|\lambda|^2 + |\rho|^2) \Delta(t) \varphi_\lambda(t) = 0,$$

$$\varphi_\lambda(0) = 1, \quad \frac{\partial \varphi_\lambda}{\partial t_j}(0) = 0, \quad j = 1, \dots, d.$$

Функция Якоби четная по всем переменным t_j , λ_j , аналитическая на $\mathbb{R}^d$ по t и из класса $E^{|t_1|, \dots, |t_d|}$ по λ . Для нее также

$$|\varphi_\lambda(t)| \leq 1, \quad \varphi_0(t) > 0, \quad \lambda, t \in \mathbb{R}^d. \quad (2.1)$$

Для $j = 1, \dots, d$, $t_j > 0$, $\lambda_j \in \mathbb{C}$

$$\varphi_{\lambda_j}(t_j) = \varphi_{\lambda_j}^{(\alpha_j, \beta_j)}(t_j) = \varphi_0^{(\alpha_j, \beta_j)}(t_j) \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda_j^2}{\lambda_{jk}^2(t_j)}\right),$$

где $0 < \lambda_{j1}(t_j) < \dots < \lambda_{jk_j}(t_j) < \dots$ – положительные нули $\varphi_{\lambda_j}(t_j)$ по λ_j . Это разложение следует из общих свойств собственных функций задачи Штурма–Лиувилля (см., например, [15]). При этом $\lambda_{jk_j}(t_j) = t_{jk_j}^{-1}(t_j)$, где $t_{jk_j}(\lambda_j)$ – положительные нули функции $\varphi_{\lambda_j}(t_j)$ по $t_j > 0$. Нули $t_{jk_j}(\lambda_j)$ непрерывны и монотонно убывают при $\lambda_j > 0$ [15; гл. I, § 3]. Соответствующим образом ведут себя и нули $\lambda_{jk_j}(t_j)$.

Пусть $1 \leq p < \infty$,

$$d\mu(t) = \prod_{j=1}^d d\mu_j(t_j) = \prod_{j=1}^d \Delta_j(t_j) dt_j = \Delta(t) dt,$$

$L_p(\mathbb{R}_+^d, d\mu)$ – пространство комплексных измеримых по Лебегу функций $f(t)$ на $\mathbb{R}_+^d$ с конечной нормой

$$\|f\|_{p,\mu} = \left(\int_{\mathbb{R}_+^d} |f(t)|^p d\mu(t) \right)^{1/p} < \infty,$$

$L_p(\mathbb{R}_+^d, d\sigma)$ – пространство комплексных измеримых по Лебегу функций $f(\lambda)$ на $\mathbb{R}_+^d$ с конечной нормой

$$\|f\|_{p,\sigma} = \left(\int_{\mathbb{R}_+^d} |f(\lambda)|^p d\sigma(\lambda) \right)^{1/p} < \infty,$$

где

$$d\sigma(\lambda) = \prod_{j=1}^d d\sigma_j(\lambda_j) = \prod_{j=1}^d s_j(\lambda_j) d\lambda_j = s(\lambda) d\lambda, \quad s_j(\lambda_j) = (2\pi)^{-1} |c_j(\lambda_j)|^{-2},$$

$$c_j(\lambda_j) = \frac{2^{\rho_j - i\lambda_j} \Gamma(\alpha_j + 1) \Gamma(i\lambda_j)}{\Gamma((\rho_j + i\lambda_j)/2) \Gamma((\rho_j + i\lambda_j)/2 - \beta_j)}, \quad (2.2)$$

$L_\infty(\mathbb{R}_+^d)$ – пространство комплексных измеримых по Лебегу функций $f(x)$ на $\mathbb{R}_+^d$ с конечной нормой

$$\|f\|_\infty = \operatorname{vraisup}_{\mathbb{R}_+^d} |f(x)|.$$

Функции на $\mathbb{R}_+^d$ будем рассматривать и на $\mathbb{R}^d$, продолжая их по четности по каждой переменной. Пространство $L_2(\mathbb{R}_+^d, d\mu)$ – гильбертово со скалярным произведением

$$(f, g)_\mu = \int_{\mathbb{R}_+^d} f(t) \overline{g(t)} d\mu(t).$$

Гармонический анализ в $L_2(\mathbb{R}_+^d, d\mu)$ осуществляется с помощью многомерных прямого и обратного преобразований Якоби:

$$Jf(\lambda) = \int_{\mathbb{R}_+^d} f(t) \varphi_\lambda(t) d\mu(t), \quad J^{-1}g(t) = \int_{\mathbb{R}_+^d} g(\lambda) \varphi_\lambda(t) d\sigma(\lambda).$$

Если $f \in L_2(\mathbb{R}_+^d, d\mu)$, то

$$Jf \in L_2(\mathbb{R}_+^d, d\sigma), \quad J^{-1}(Jf) \in L_2(\mathbb{R}_+^d, d\mu)$$

и $f(t) = J^{-1}(Jf)(t)$ в среднеквадратичном смысле. При этом справедливо равенство Парсеваля

$$\int_{\mathbb{R}_+^d} |f(t)|^2 d\mu(t) = \int_{\mathbb{R}_+^d} |Jf(\lambda)|^2 d\sigma(\lambda). \quad (2.3)$$

Мы будем также рассматривать одномерные прямые и обратные преобразования Якоби

$$J_j f(\lambda_j) = \int_{\mathbb{R}_+} f(t_j) \varphi_{\lambda_j}(t_j) d\mu_j(t), \quad J_j^{-1} g(t_j) = \int_{\mathbb{R}_+} g(\lambda_j) \varphi_{\lambda_j}(t_j) d\sigma_j(\lambda_j)$$

в пространствах $L_2(\mathbb{R}_+, d\mu_j)$, $L_2(\mathbb{R}_+, d\sigma_j)$ соответственно.

В силу (2.1) в пространстве $L_2(\mathbb{R}_+^d, d\mu)$ действует оператор обобщенного сдвига

$$T^t f(x) = \int_{\mathbb{R}_+^d} \varphi_\lambda(t) Jf(\lambda) \varphi_\lambda(x) d\sigma(\lambda), \quad t, x \in \mathbb{R}_+^d. \quad (2.4)$$

Для него справедливо интегральное представление

$$T^t f(x) = \int_{\mathbb{R}_+^d} f(y) d\nu_{t,x}(y), \quad (2.5)$$

где $\nu_{t,x} = \prod_{j=1}^d \nu_{t_j, x_j}$, ν_{t_j, x_j} – одномерные вероятностные меры с носителями

$$\text{supp } \nu_{t_j, x_j} \subset [|x_j - t_j|, x_j + t_j],$$

симметричные относительно t_j , x_j [13].

Представление (2.5) позволяет распространить оператор обобщенного сдвига на пространства $L_p(\mathbb{R}_+^d, d\mu)$, $1 \leq p \leq \infty$, причем для любого $t \in \mathbb{R}_+^d$ имеем $\|T^t\|_{p \rightarrow p} = 1$.

Для оператора обобщенного сдвига справедливы следующие свойства:

$$\text{если } f(x) \geq 0, \quad \text{то } T^t f(x) \geq 0, \quad (2.6)$$

$$\text{функция } T^t f(x) \text{ четная по } t_j, x_j, \quad (2.7)$$

$$T^t \varphi_\lambda(x) = \varphi_\lambda(t) \varphi_\lambda(x), \quad J(T^t f)(\lambda) = \varphi_\lambda(t) Jf(\lambda), \quad (2.8)$$

$$T^t f(x) = T^x f(t), \quad T^t 1 = 1, \quad (2.9)$$

$$\text{если } \text{supp } f \subset \Pi_a \text{ (см. (3.4)), } t \in \Pi_\delta, \quad \text{то } \text{supp } T^t f \subset \Pi_{a+\delta}, \quad (2.10)$$

$$\text{если } f \in L_1(\mathbb{R}_+^d, d\mu), \quad \text{то } \int_{\mathbb{R}_+^d} T^t f(x) d\mu(x) = \int_{\mathbb{R}_+^d} f(x) d\mu(x). \quad (2.11)$$

3. Основной результат. Пусть $\sigma, \tau > 0$, V, U – выпуклые центрально-симметричные компактные тела в $\mathbb{R}^d$, инвариантные относительно ортогональной группы преобразований, состоящей из диагональных матриц с элементами ± 1 на главной диагонали, $|x|_V, |x|_U$ – нормы в $\mathbb{R}^d$, порождаемые этими телами. Они являются функциями, четными по каждой переменной. Через V^+ будем обозначать $V \cap \mathbb{R}_+^d$, а через $|x|_V^+$ – норму $|x|_V$ для $x \in \mathbb{R}_+^d$. Пусть $V^c = \mathbb{R}_+^d \setminus V$ – дополнение V в $\mathbb{R}_+^d$.

Для функции $f \in L_2(\mathbb{R}_+^d, d\mu)$

$$E(\sigma V, f)_{2,\mu} = \inf\{\|f - g\|_{2,\mu} : g \in L_2(\mathbb{R}_+^d, d\mu), \text{supp } Jg \subset \sigma V\} \quad (3.1)$$

– величина ее наилучшего приближения частичными интегралами преобразования Якоби по телу σV .

Модуль непрерывности функции $f \in L_2(\mathbb{R}_+^d, d\mu)$ определим равенством

$$\omega(\tau U, f)_{2,\mu} = \sup_{t \in \tau U} \left(2 \int_{\mathbb{R}_+^d} (1 - \varphi_\lambda(t)) |Jf(\lambda)|^2 d\sigma(\lambda) \right)^{1/2}. \quad (3.2)$$

В безвесовом случае (все $\alpha_j = \beta_j = -1/2$) получим обычный модуль непрерывности, определяемый с помощью первой разности. Применяя (2.9), (2.11), нетрудно убедиться, что

$$\omega(\tau U, f)_{2,\mu} = \sup_{t \in \tau U} \left(\int_{\mathbb{R}_+^d} \left(T_y^t |f(y) - f(x)|^2 \right) \Big|_{y=x} d\mu(x) \right)^{1/2}.$$

Константа Джексона

$$D(\sigma V, \tau U)_{2,\mu} = \sup \left\{ \frac{E(\sigma V, f)_{2,\mu}}{\omega(\tau U, f)_{2,\mu}} : f \in L_2(\mathbb{R}_+^d, d\mu) \right\}$$

есть наименьшая константа в неравенстве Джексона

$$E(\sigma V, f)_{2,\mu} \leq D\omega(\tau U, f)_{2,\mu}.$$

ЛЕММА 3.1. Для всех $\sigma, \tau > 0$

$$D(\sigma V, \tau U)_{2,\mu} \geq 2^{-1/2}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\varepsilon > 0$, $\chi_\varepsilon(x)$ – характеристическая функция εU . Согласно (2.6) имеем $(T^t \chi_\varepsilon, \chi_\varepsilon)_\mu \geq 0$ и, применяя (3.2), (2.3), (2.4), (2.8), получим

$$\omega^2(\tau U, \chi_\varepsilon)_{2,\mu} = 2 \sup_{t \in \tau U} \{ \|\chi_\varepsilon\|_{2,\mu}^2 - (T^t \chi_\varepsilon, \chi_\varepsilon)_\mu \} \leq 2 \|\chi_\varepsilon\|_{2,\mu}^2 = 2\mu(\varepsilon U^+). \quad (3.3)$$

В силу (2.1)

$$|J\chi_\varepsilon(\lambda)| \leq \int_{\mathbb{R}_+^d} |\chi_\varepsilon(t)| |\varphi_\lambda(t)| d\mu(t) \leq \mu(\varepsilon U^+),$$

поэтому из (2.3)

$$\begin{aligned} E^2(\sigma V, \chi_\varepsilon)_{2,\mu} &= \int_{(\sigma V)^c} |J\chi_\varepsilon(\lambda)|^2 d\sigma(\lambda) = \|\chi_\varepsilon\|_{2,\mu}^2 - \int_{\sigma V^+} |J\chi_\varepsilon(\lambda)|^2 d\sigma(\lambda) \\ &\leq \mu(\varepsilon U^+)(1 - \mu(\varepsilon U^+)\sigma(\sigma V^+)). \end{aligned}$$

Отсюда и из (3.3)

$$2D^2(\sigma V, \tau U)_{2,\mu} \geq \sup_{\varepsilon > 0} \frac{2E^2(\sigma V, \chi_\varepsilon)_{2,\mu}}{\omega^2(\tau U, \chi_\varepsilon)_{2,\mu}} \geq \sup_{\varepsilon > 0} (1 - \mu(\varepsilon U^+)\sigma(\sigma V^+)) = 1.$$

Лемма доказана.

Величину

$$\tau(\sigma V, U)_{2,\mu} = \inf\{\tau > 0: D(\sigma V, \tau U)_{2,\mu} = 2^{-1/2}\}$$

назовем *оптимальным аргументом*.

Пусть

$$|x|_p = \left(\sum_{j=1}^d |x_j|^p \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty, \quad |x|_\infty = \max_j |x_j|,$$

$$B_p^d = \{x \in \mathbb{R}^d: |x|_p \leq 1\}.$$

В качестве тел V будем рассматривать шары B_p^d , а в качестве тел U – параллелепипеды

$$\Pi_a = \prod_{j=1}^d [-a_j, a_j], \quad a = (a_1, \dots, a_d), \quad a_j > 0. \quad (3.4)$$

Так как нули $\lambda_{11}(a_1\tau), \dots, \lambda_{d1}(a_d\tau)$ непрерывны и убывают по τ , то уравнение

$$|(\lambda_{11}(a_1\tau), \dots, \lambda_{d1}(a_d\tau))|_p = \sigma \quad (3.5)$$

имеет единственное решение относительно τ , которое обозначим $\tau_{\sigma,a}^p$.

Сформулируем основной результат работы.

ТЕОРЕМА 3.1. *Если $\sigma > 0$, $1 \leq p \leq 2$, $\tau_{\sigma,a}^p$ определено в (3.5), то для произвольной функции $f \in L_2(\mathbb{R}_+^d, d\mu)$ справедливо неравенство Джексона*

$$E(\sigma B_p^d, f)_{2,\mu} \leq 2^{-1/2} \omega(2\tau_{\sigma,a}^p \Pi_a, f)_{2,\mu} \quad (3.6)$$

с точной константой $2^{-1/2}$ и оптимальным аргументом

$$\tau(\sigma B_p^d, \Pi_a)_{2,\mu} = 2\tau_{\sigma,a}^p. \quad (3.7)$$

Аналог теоремы 3.1 для пространства $L_2(\mathbb{R}^d)$ со степенным весом $\prod_{j=1}^d |x_j|^{2\alpha_j+1}$, $\alpha_j \geq -1/2$, установлен в [9].

4. Редукция к экстремальной задаче для целых функций экспоненциального типа. Пусть U^* – поляр U , $\tau > 0$, $S^+(\tau U^+)$ – множество вероятностных мер на τU^+ ,

$$K(\tau U) = \left\{ f(\lambda) = \int_{\tau U^+} \varphi_\lambda(t) d\nu(t): \nu \in S^+(\tau U^+) \right\}$$

– класс целых функций экспоненциального типа, для которых выполняется оценка

$$|f(\lambda)| \leq c_f e^{\tau |(\operatorname{Im} \lambda_1, \dots, \operatorname{Im} \lambda_d)|_{U^*}},$$

четных по каждой переменной,

$$\Gamma(\sigma V, \tau U) = \inf_{f \in K(\tau U)} \sup_{(\sigma V)^c} f(\lambda).$$

Отметим, что согласно (2.1) для $f \in K(\tau U)$

$$f(0) = \int_{\tau U^+} \varphi_0(t) d\nu(t) > 0.$$

ЛЕММА 4.1. Для всех $\sigma, \tau > 0$

$$2D^2(\sigma V, \tau U)_{2,\mu} = \frac{1}{1 - \Gamma(\sigma V, \tau U)}.$$

Существуют мера $\nu^* \in S^+(\tau U^+)$ и функция $f^* \in K(\tau U)$, для которых

$$\Gamma(\sigma V, \tau U) = \sup_{\lambda \in (\sigma V)^c} \int_{\tau U^+} \varphi_\lambda(t) d\nu^*(t) = \sup_{\lambda \in (\sigma V)^c} f^*(\lambda).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$D^2(\sigma V, \tau U)_{2,\mu} = \sup_{f \in L_2(\mathbb{R}_+^d, d\mu)} \frac{\int_{(\sigma V)^c} |Jf(\lambda)|^2 d\sigma(\lambda)}{\sup_{t \in \tau U} 2 \int_{(\sigma V)^c} (1 - \varphi_\lambda(t)) |Jf(\lambda)|^2 d\sigma(\lambda)}.$$

Если

$$L_1^+ = \left\{ f \in L_1(\mathbb{R}_+^d, d\sigma) : f(\lambda) \geq 0, \text{supp } f \subset (\sigma V)^c, \int_{(\sigma V)^c} f(\lambda) d\sigma(\lambda) = 1 \right\},$$

то

$$D^{-2}(\sigma V, \tau U)_{2,\mu} = 2 \inf_{f \in L_1^+} \sup_{t \in \tau U} \int_{(\sigma V)^c} (1 - \varphi_\lambda(t)) |Jf(\lambda)|^2 d\sigma(\lambda).$$

Множество функций

$$H = \left\{ g(t) = 2 \int_{(\sigma V)^c} (1 - \varphi_\lambda(t)) f(\lambda) d\sigma(\lambda) : f \in L_1^+ \right\}$$

является выпуклым подмножеством в $C(\tau U^+)$ и величина $D^{-2}(\sigma V, \tau U)_{2,\mu}$ равна величине наилучшего приближения нуля в $C(\tau U^+)$ выпуклым множеством H . По теореме двойственности [16] и в силу неотрицательности функций из H

$$D_M^{-2}(\sigma V, \tau U)_{2,\mu} = \sup_{\nu \in S^+(\tau U^+)} \inf_{g \in H} \int_{\tau U^+} g(t) d\nu(t) = \inf_{g \in H} \int_{\tau U^+} g(t) d\nu^*(t) \quad (4.1)$$

для некоторой меры $\nu^* \in S^+(\tau U^+)$.

Покажем, что для любой меры $\nu \in S^+(\tau U^+)$

$$\inf_{g \in H} \int_{\tau U^+} g(t) d\nu(t) = 2 \inf_{\lambda \in (\sigma V)^c} \int_{\tau U^+} (1 - \varphi_\lambda(t)) d\nu(t). \quad (4.2)$$

Действительно, для любой $g \in H$

$$\begin{aligned} \int_{\tau U^+} g(t) d\nu(t) &= 2 \int_{\tau U^+} \int_{(\sigma V)^c} (1 - \varphi_\lambda(t)) f(\lambda) d\sigma(\lambda) d\nu(t) \\ &= 2 \int_{(\sigma V)^c} f(\lambda) \int_{\tau U^+} (1 - \varphi_\lambda(t)) d\nu(t) d\sigma(\lambda) \\ &\geq 2 \inf_{\lambda \in (\sigma V)^c} \int_{\tau U^+} (1 - \varphi_\lambda(t)) d\nu(t). \end{aligned}$$

С другой стороны, если $B(\lambda, \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R}_+^d : |\lambda - x| \leq \varepsilon\}$, то для $\lambda \in (\sigma V)^c$

$$\begin{aligned} \inf_{g \in H} \int_{\tau U^+} g(t) d\nu(t) &\leq 2 \inf_{0 < \varepsilon < \varepsilon(\lambda)} \frac{1}{\int_{B(\lambda, \varepsilon)} d\sigma(\lambda)} \int_{B(\lambda, \varepsilon)} \int_{\tau U^+} (1 - \varphi_\lambda(t)) d\nu(t) d\sigma(\lambda) \\ &\leq 2 \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+0} \frac{1}{\int_{B(\lambda, \varepsilon)} d\sigma(\lambda)} \int_{B(\lambda, \varepsilon)} \int_{\tau U^+} (1 - \varphi_\lambda(t)) d\nu(t) d\sigma(\lambda) \\ &= 2 \int_{\tau U^+} (1 - \varphi_\lambda(t)) d\nu(t), \end{aligned}$$

поэтому

$$\inf_{g \in H} \int_{\tau U^+} g(t) d\nu(t) \leq 2 \inf_{(\sigma V)^c} \int_{\tau U^+} (1 - \varphi_\lambda(t)) d\nu(t).$$

Равенство (4.2) доказано.

Согласно (4.1), (4.2)

$$\begin{aligned} D^{-2}(\sigma V, \tau U)_{2, \mu} &= \sup_{\nu \in S^+(\tau U)} \inf_{\lambda \in (\sigma V)^c} \int_{\tau U^+} (1 - \varphi_\lambda(t)) d\nu(t) \\ &= 2 \sup_{\nu \in S^+(\tau U^+)} \inf_{\lambda \in (\sigma V)^c} \left(1 - \int_{\tau U^+} \varphi_\lambda(t) d\nu(t) \right) \\ &= 2 - 2 \inf_{\nu \in S^+(\tau U^+)} \sup_{\lambda \in (\sigma V)^c} \int_{\tau U^+} \varphi_\lambda(t) d\nu(t) = 2(1 - \Gamma(\sigma V, \tau U)), \\ \Gamma(\sigma V, \tau U) &= \sup_{\lambda \in (\sigma V)^c} \int_{\tau U^+} \varphi_\lambda(t) d\nu^*(t) = \sup_{\lambda \in (\sigma V)^c} f^*(\lambda). \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Из лемм 3.1, 4.1 вытекает, что $\Gamma(\sigma V, \tau U) \geq 0$ и $D(\sigma V, \tau U)_{2, \mu} = 2^{-1/2}$ только в случае, когда $\Gamma(\sigma V, \tau U) = 0$. В этом случае $f^*(\lambda) \leq 0$, $\lambda \in (\sigma V)^c$, для некоторой $f^* \in K(\tau U)$.

ЛЕММА 4.2. Если $f \in K(\tau U)$, $f(\lambda) \leq 0$ при $\lambda \in (\sigma V)^c$, то

$$f \in L_1(\mathbb{R}_+^d, d\sigma), \quad J^{-1}f(0) = \int_{\mathbb{R}_+^d} f d\sigma \geq 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\varepsilon > 0$, $\chi_\varepsilon(x)$ – характеристическая функция εU ,

$$\Psi_\varepsilon(t) = \frac{(T^t \chi_\varepsilon, \chi_\varepsilon)_\mu}{\mu^2(\varepsilon U^+)}.$$

Отметим свойства функции Ψ_ε . Согласно (2.1), (2.6), (2.8) для всех $t, \lambda \in \mathbb{R}_+^d$

$$\Psi_\varepsilon(t) \geq 0,$$

$$\begin{aligned} J\Psi_\varepsilon(\lambda) &= \mu^{-2}(\varepsilon U^+) \int_{\mathbb{R}_+^d} \chi_\varepsilon(x) \int_{\mathbb{R}_+^d} T^t \chi_\varepsilon(x) \varphi_\lambda(t) d\mu(t) d\mu(x) \\ &= \mu^{-2}(\varepsilon U^+) J\chi_\varepsilon(\lambda) \int_{\mathbb{R}_+^d} \chi_\varepsilon(x) \varphi_\lambda(x) d\mu(x) = \mu^{-2}(\varepsilon U^+) (J\chi_\varepsilon(\lambda))^2 \geq 0, \end{aligned}$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+0} J\Psi_\varepsilon(\lambda) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+0} \frac{1}{\mu^2(\varepsilon U^+)} \left(\int_{\varepsilon U^+} \varphi_\lambda(t) d\mu(t) \right)^2 = \varphi_\lambda^2(0) = 1, \quad |J\Psi_\varepsilon(\lambda)| \leq 1.$$

Так как $J\chi_\varepsilon \in L_2(\mathbb{R}_+^d, d\sigma)$, то $J\Psi_\varepsilon \in L_1(\mathbb{R}_+^d, d\sigma)$.

Если $f \in K(\tau U)$, то $|f(\lambda)| \leq 1$. Для всех $\varepsilon > 0$ интеграл

$$\int_{\mathbb{R}_+^d} f(\lambda) J\Psi_\varepsilon(\lambda) d\sigma(\lambda) = \int_{\varepsilon U^+} \int_{\mathbb{R}_+^d} J\Psi_\varepsilon(\lambda) \varphi_\lambda(t) d\sigma(\lambda) d\nu(t) = \int_{\varepsilon U^+} \Psi_\varepsilon(t) d\nu(t) \geq 0. \quad (4.3)$$

Отсюда и из неравенства $f(\lambda) \leq 0$ при $\lambda \in (\sigma V)^c$, а также из перечисленных свойств Ψ_ε следует, что

$$0 \leq \int_{\mathbb{R}_+^d} f(\lambda) J\Psi_\varepsilon(\lambda) d\sigma(\lambda) = \int_{\sigma V^+} f(\lambda) J\Psi_\varepsilon(\lambda) d\sigma(\lambda) - \int_{(\sigma V)^c} |f(\lambda)| J\Psi_\varepsilon(\lambda) d\sigma(\lambda),$$

поэтому

$$\int_{\mathbb{R}_+^d} |f(\lambda)| J\Psi_\varepsilon(\lambda) d\sigma(\lambda) \leq 2 \int_{\sigma V^+} |f(\lambda)| J\Psi_\varepsilon(\lambda) d\sigma(\lambda) \leq 2\sigma(\sigma V^+).$$

По лемме Фату при $\varepsilon \rightarrow 0+0$

$$\int_{\mathbb{R}_+^d} |f(\lambda)| d\sigma(\lambda) \leq 2\sigma(\sigma V^+).$$

Итак, $f \in L_1(\mathbb{R}_+^d, d\sigma)$ и в силу (4.3) имеем $J^{-1}f(0) \geq 0$.

Лемма доказана.

Для $d = 1$ леммы 3.1, 4.1, 4.2 доказаны в [17; гл. 1].

5. Нижняя оценка оптимального аргумента. Пусть $x \in \mathbb{R}_+$,

$$x^{(a,b)} = \begin{cases} x^a, & 0 \leq x \leq 1, \\ x^b, & x \geq 1, \end{cases}$$

– кусочно-степенная функция. Из асимптотики гамма-функции для весов (2.2) равномерно по $\lambda_j \in \mathbb{R}_+$ [18]

$$s_j(\lambda_j) \asymp \lambda_j^{(2, 2\alpha_j + 1)},$$

поэтому равномерно по $\lambda \in \mathbb{R}_+^d$

$$s(\lambda) \asymp \prod_{j=1}^d \lambda_j^{(2, 2\alpha_j + 1)}. \quad (5.1)$$

В [18] для функций Якоби равномерно по $t_j > 0$ доказаны асимптотики

$$\begin{aligned} \varphi_{\lambda_j}(t_j) &= \frac{1}{(\Delta(t_j)s(\lambda_j))^{1/2}} ((\lambda_j t_j)^{1/2} J_{\alpha_j}(\lambda_j t_j) + O(|\lambda_j|^{-1} e^{t_j |\operatorname{Im} \lambda_j|})) \\ &= \frac{(2/\pi)^{1/2}}{(\Delta(t_j)s(\lambda_j))^{1/2}} (\cos(\lambda_j t_j - a_{\alpha_j}) + e^{t_j |\operatorname{Im} \lambda_j|} O(|\lambda_j t_j|^{-1} + |\lambda_j|^{-1})), \end{aligned} \quad (5.2)$$

где $a_{\alpha_j} = \pi(\alpha_j + 1/2)/2$.

Согласно (5.2) для нулей функций Якоби справедливы свойства

$$\lambda_{jk_j}(t_j) \sim \frac{\pi k_j}{t_j}, \quad k_j \rightarrow \infty, \quad \inf_{k_j \in \mathbb{N}} (\lambda_{j(k_j+1)}(t_j) - \lambda_{jk_j}(t_j)) = \Delta_j > 0. \quad (5.3)$$

ЛЕММА 5.1 [11]. Если $\alpha \geq -1/2$, то существует четная целая функция $\omega_\alpha(z)$ экспоненциального типа 2, для которой равномерно по $x \in \mathbb{R}_+$

$$\omega_\alpha(x) \asymp x^{(2[\alpha+1/2]+2, 2\alpha+1)}. \quad (5.4)$$

ЛЕММА 5.2. Пусть

$$\tau = (\tau_1, \dots, \tau_d), \quad \tau_j > 0, \quad k = (k_1, \dots, k_d) \in \mathbb{N}^d, \quad \lambda_k(\tau) = (\lambda_{1k_1}(\tau_1), \dots, \lambda_{dk_d}(\tau_d)).$$

Если $a = (a_1, \dots, a_d)$, $a_j > 0$, $f \in E^{a_1, \dots, a_d} \cap L_1(\mathbb{R}_+^d, d\sigma)$, то

$$\sum_{k \in \mathbb{N}^d} s(\lambda_k(\tau)) |f(\lambda_k(\tau))| \ll \int_{\mathbb{R}_+^d} |f(\lambda)| d\sigma(\lambda). \quad (5.5)$$

Константа в неравенстве (5.5) не зависит от f .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применяя (5.1), лемму 5.1, получим

$$f(\lambda) \prod_{j=1}^d \omega_{\alpha_j}(\lambda_j) = f(\lambda) \omega_\alpha(\lambda) \in E^{a_1+2, \dots, a_d+2} \cap L_1(\mathbb{R}_+^d, d\lambda).$$

Согласно (5.1), (5.4)

$$\omega_\alpha(\lambda) \ll s(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{R}_+^d, \quad s(\lambda) \ll \omega_\alpha(\lambda), \quad \lambda_j \geq \delta_j > 0. \quad (5.6)$$

При выполнении условий (5.3) [19]

$$\sum_{k \in \mathbb{N}^d} |f(\lambda_k(\tau))| \omega_\alpha(\lambda_k(\tau)) \ll \int_{\mathbb{R}_+^d} |f(\lambda)| \omega_\alpha(\lambda) d\lambda.$$

Отсюда и из (5.3), (5.6)

$$\begin{aligned} \sum_{k \in \mathbb{N}^d} s(\lambda_k(\tau)) |f(\lambda_k(\tau))| &\ll \sum_{k \in \mathbb{N}^d} |f(\lambda_k(\tau))| \omega_\alpha(\lambda_k(\tau)) \\ &\ll \int_{\mathbb{R}_+^d} |f(\lambda)| \omega_\alpha(\lambda) d\lambda \ll \int_{\mathbb{R}_+^d} |f(\lambda)| d\sigma(\lambda). \end{aligned}$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 5.3. Если $\tau > 0$, $a \geq 0$, $f \in E^\tau \cap L_1(\mathbb{R}_+, \lambda^a d\lambda)$, $\delta = 1/(4\tau)$, то

$$\int_0^\delta |f(\lambda)| d\lambda \leq 2 \max(\delta^{-a}, 1) \int_\delta^\infty |f(\lambda)| \lambda^a d\lambda.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из условия $f \in L_1(\mathbb{R}_+, \lambda^a d\lambda) \cap E^\tau$ вытекает, что f — ограничена и $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} f(\lambda) = 0$ [19]. Пусть $\|f\|_\infty = |f(\lambda_0)|$. Применяя неравенство Бернштейна [20], получим

$$|f(\lambda) - f(\lambda_0)| \leq \|f'\|_\infty |\lambda - \lambda_0| \leq \tau \|f\|_\infty |\lambda - \lambda_0|.$$

Отсюда для $|\lambda - \lambda_0| \leq 1/(2\tau) = 2\delta$

$$|f(\lambda)| \geq |f(\lambda_0)| - \tau \|f\|_\infty |\lambda - \lambda_0| \geq \frac{1}{2} \|f\|_\infty.$$

Если $\delta \geq 1$, то

$$\int_\delta^\infty |f(\lambda)| \lambda^a d\lambda \geq \int_{x_0+\delta}^{x_0+2\delta} |f(\lambda)| d\lambda \geq \frac{\delta}{2} \|f\|_\infty,$$

поэтому

$$\int_0^\delta |f(\lambda)| d\lambda \leq \delta \|f\|_\infty \leq 2 \int_\delta^\infty |f(\lambda)| \lambda^a d\lambda.$$

Если $\delta \leq 1$, то

$$\int_\delta^\infty |f(\lambda)| \lambda^a d\lambda \geq \delta^a \int_{x_0+\delta}^{x_0+2\delta} |f(\lambda)| d\lambda \geq \frac{\delta^{a+1}}{2} \|f\|_\infty,$$

поэтому

$$\int_0^\delta |f(\lambda)| d\lambda \leq 2\delta^{-a} \int_\delta^\infty |f(\lambda)| \lambda^a d\lambda.$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 5.4. Пусть $a > 0$, $b > 0$, $\delta > 0$, $L > 0$, $s(\lambda) = \lambda^{(a,b)}$, для последовательности $\{\beta_n\}_{n=1}^\infty$ выполнены условия

$$\beta_n > 0, \quad \beta_{n+1} - \beta_n \geq \delta, \quad \left| \beta_n - \frac{\pi n}{a} \right| \leq L.$$

Если $0 < \tau < a$ и $f \in E^\tau$, то

$$\int_{\mathbb{R}_+} |f(\lambda)| s(\lambda) d\lambda \ll \sum_{n=1}^\infty s(\beta_n) |f(\beta_n)|.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При указанных условиях на последовательность $\{\beta_n\}$ для функции $f \in E^\tau$, $\tau < a$, в [19] доказано неравенство

$$\int_{\mathbb{R}_+} |f(\lambda)| \lambda^a d\lambda \ll \sum_{n=1}^\infty \beta_n^a |f(\beta_n)|.$$

Применяя лемму 5.3, получим

$$\int_{\mathbb{R}_+} |f(\lambda)| s(\lambda) d\lambda \ll \int_{\mathbb{R}_+} |f(\lambda)| \lambda^a d\lambda \ll \sum_{n=1}^\infty \beta_n^a |f(\beta_n)| \ll \sum_{n=1}^\infty s(\beta_n) |f(\beta_n)|.$$

Лемма доказана.

Пусть $\alpha \geq \beta \geq -1/2$, $\alpha > -1/2$, $\tau > 0$, одномерный вес $s(\lambda)$ определен в (2.2), $d\sigma(\lambda) = s(\lambda)d\lambda$. Тогда для произвольной функции $f \in E^{2\tau} \cap L_1(\mathbb{R}_+, d\sigma)$ справедлива квадратурная формула Гаусса [18], [17; гл. 5]

$$\int_{\mathbb{R}_+} f(\lambda) d\sigma(\lambda) = \sum_{k=1}^\infty \gamma_k(\tau) f(\lambda_k(\tau)), \quad (5.7)$$

где $\lambda_k(\tau)$ – положительные нули одномерной функции Якоби $\varphi_\lambda(\tau)$ веса $\gamma_k(\tau) > 0$,

$$\gamma_k(\tau) \asymp k^{2\alpha+1}, \quad k \rightarrow \infty, \quad (5.8)$$

а ряд сходится абсолютно.

Нам необходим многомерный вариант квадратурной формулы Гаусса (5.7). Пусть веса $s_j(\lambda_j)$, $s(\lambda)$ и меры $d\sigma_j$, $d\sigma$ определены в (2.2), пусть $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_d)$, $\tau_j > 0$, $k = (k_1, \dots, k_d) \in \mathbb{N}^d$, и

$$\lambda_k(\tau) = (\lambda_{1k_1}(\tau_1), \dots, \lambda_{dk_d}(\tau_d)), \quad \gamma_k(\tau) = \prod_{j=1}^d \gamma_{jk_j}(\tau_j).$$

ЛЕММА 5.5. Если $f \in E^{2\tau_1, \dots, 2\tau_d} \cap L_1(\mathbb{R}_+^d, d\sigma)$, то

$$\int_{\mathbb{R}_+^d} f(\lambda) d\sigma(\lambda) = \sum_{k \in \mathbb{N}^d} \gamma_k(\tau) f(\lambda_k(\tau)), \quad (5.9)$$

причем ряд в правой части сходится абсолютно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно (5.8), (5.1), (5.3)

$$\sum_{k \in \mathbb{N}^d} \gamma_k(\tau) |f(\lambda_k(\tau))| \ll \sum_{k \in \mathbb{N}^d} s(\lambda_k(\tau)) |f(\lambda_k(\tau))| \ll \int_{\mathbb{R}_+^d} |f(\lambda)| d\sigma(\lambda).$$

Остается доказать равенство (5.9). Применим индукцию по d . При $d = 1$ (5.9) совпадает с (5.7). По теореме Фубини для почти всех $\lambda_d \in \mathbb{R}_+$ существует интеграл

$$\int_{\mathbb{R}_+^{d-1}} |f(\lambda_1, \dots, \lambda_{d-1}, \lambda_d)| \prod_{j=1}^{d-1} s_j(\lambda_j) d\lambda_1 \dots d\lambda_{d-1},$$

поэтому по индуктивному предположению для почти всех $\lambda_d \in \mathbb{R}_+$

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}_+^{d-1}} f(\lambda_1, \dots, \lambda_{d-1}, \lambda_d) \prod_{j=1}^{d-1} s_j(\lambda_j) d\lambda_1 \dots d\lambda_{d-1} \\ &= \sum_{\substack{k_j \in \mathbb{N} \\ 1 \leq j \leq d-1}} \prod_{j=1}^{d-1} \gamma_{jk_j}(\tau_j) f(\lambda_{1k_1}(\tau_1), \dots, \lambda_{(d-1)k_{d-1}}(\tau_{d-1}), \lambda_d), \end{aligned} \quad (5.10)$$

причем для почти всех λ_d ряд (5.10) сходится абсолютно. Предположим, что ряд (5.10) можно почленно проинтегрировать. Тогда согласно (5.7) получим (5.9):

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}_+^d} f(\lambda) s(\lambda) d\lambda \\ &= \sum_{k_j \in \mathbb{N}, 1 \leq j \leq d-1} \prod_{j=1}^{d-1} \gamma_{jk_j}(\tau_j) \int_{\mathbb{R}_+} f(\lambda_{1k_1}(\tau_1), \dots, \lambda_{(d-1)k_{d-1}}(\tau_{d-1}), \lambda_d) s_d(\lambda_d) d\lambda_d \\ &= \sum_{k \in \mathbb{N}^d} \gamma_k(\tau) f(\lambda_k(\tau)). \end{aligned}$$

Для возможности почленного интегрирования достаточно показать, что функция

$$g(\lambda_d) = \sum_{k_j \in \mathbb{N}, 1 \leq j \leq d-1} \prod_{j=1}^{d-1} \gamma_{jk_j}(\tau_j) |f(\lambda_{1k_1}(\tau_1), \dots, \lambda_{(d-1)k_{d-1}}(\tau_{d-1}), \lambda_d)| \in L_1(\mathbb{R}_+, d\sigma_d). \quad (5.11)$$

Функция $f(\lambda_{1k_1}(\tau_1), \dots, \lambda_{(d-1)k_{d-1}}(\tau_{d-1}), \lambda_d)$ имеет тип τ_d по переменной λ_d . Если $a_d > \tau_d$, то согласно (5.3) и лемме 5.4

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}_+} |f(\lambda_{1k_1}(\tau_1), \dots, \lambda_{(d-1)k_{d-1}}(\tau_{d-1}), \lambda_d)| s_d(\lambda_d) d\lambda_d \\ \ll \sum_{k_d \in \mathbb{N}} s_d(\lambda_{dk_d}(a_d)) |f(\lambda_{1k_1}(\tau_1), \dots, \lambda_{(d-1)k_{d-1}}(\tau_{d-1}), \lambda_{dk_d}(a_d))|. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Если $\tau' = (\tau_1, \dots, \tau_{d-1}, a_d)$, то из (5.11), (5.12) и (5.3), (5.8) получаем

$$\int_{\mathbb{R}_+} |g(\lambda_d)| s_d(\lambda_d) d\lambda_d \ll \sum_{k \in \mathbb{N}^d}^{\infty} \gamma_k(\tau') |f(\lambda_k(\tau'))|.$$

Так как $f \in L_1(\mathbb{R}_+^d, d\sigma)$, то в силу леммы 5.2 последний ряд сходится.

Лемма доказана.

ЛЕММА 5.6. Если $\sigma > 0$, норма $|(x_1, \dots, x_d)|_V$ – функция, четная по каждой переменной, Π_a – параллелепипед (3.4), $\tau_{\sigma,a}^V$ – единственное решение уравнения

$$|(\lambda_{11}(a_1\tau), \dots, \lambda_{d1}(a_d\tau))|_V = \sigma,$$

то

$$\tau(\sigma V, \Pi_a)_{2,\mu} \geq 2\tau_{\sigma,a}^V.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим $\tau_{\sigma,a}^V = \tau_\sigma$. Предположим, что

$$\tau(\sigma V, \Pi_a)_{2,\mu} < 2\tau' < 2\tau_\sigma.$$

Согласно леммам 4.1, 4.2 существует функция $f^* \in K(2\tau'\Pi_a)$, обладающая свойствами

$$f^* \in L_1(\mathbb{R}_+^d, d\sigma), \quad J^{-1}f^*(0) \geq 0, \quad f^*(\lambda) \leq 0, \quad |\lambda|_V \geq \sigma, \quad f^*(0) > 0. \quad (5.13)$$

Из свойств нулей функций Якоби для некоторого $\varepsilon > 0$ и произвольного $k \in \mathbb{N}^d$ параллелепипеды

$$\Pi_{k,\varepsilon} = \prod_{j=1}^d [\lambda_{j1}(a_j(\tau' + \varepsilon)), \lambda_{j1}(a_j\tau')] \subset (\sigma V)^c.$$

Если $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_d) \in \prod_{j=1}^d [a_j\tau', a_j(\tau' + \varepsilon)]$, то $f^* \in E^{2\tau_1, \dots, 2\tau_d} \cap L_1(\mathbb{R}_+^d, d\sigma)$ и применяя (5.13) и лемму 5.5, получим

$$0 \leq J^{-1}f^*(0) = \int_{\mathbb{R}_+^d} f^*(\lambda) d\sigma(\lambda) = \sum_{k \in \mathbb{N}^d}^{\infty} \gamma_k(\tau) f^*(\lambda_k(\tau)) \leq 0.$$

Следовательно, на параллелепипедах $\Pi_{k,\varepsilon}$ функция $f^*(\lambda) = 0$, поэтому $f^*(\lambda) \equiv 0$. Это противоречит условию $f^*(0) > 0$ (см. (5.13)).

Лемма доказана.

6. Верхняя оценка оптимального аргумента. В соответствии с леммой 4.1 для оценки оптимального аргумента сверху необходимо построить специальную целую функцию экспоненциального типа.

ЛЕММА 6.1. Пусть $\sigma > 0$, $1 \leq p \leq 2$, Π_a – параллелепипед (3.4), $\tau = \tau_{\sigma,a}^p$ (3.5). Для целой функции экспоненциального типа

$$F_p(x) = \left(\sigma^p - \sum_{j=1}^d (\lambda_{j1}(\tau a_j))^{p-2} \lambda_j^2 \right) \prod_{j=1}^d \frac{\varphi_{\lambda_j}^2(\tau a_j)}{(\lambda_j^2 - \lambda_{j1}^2(\tau a_j))^2} \in E^{2\tau a_1, \dots, 2\tau a_d} \quad (6.1)$$

выполнены следующие свойства:

$$\begin{aligned} F_p &\in L_1(\mathbb{R}_+^d, d\sigma), & F_p(\lambda) &\leq 0, & |\lambda|_p &\geq \sigma, \\ \text{supp } J^{-1}F_p &\subset 2\tau\Pi_a, & J^{-1}F_p(t) &\geq 0, & t &\in \mathbb{R}_+^d. \end{aligned} \quad (6.2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Принадлежность $F_p \in L_1(\mathbb{R}_+^d, d\sigma)$ вытекает из асимптотики (5.2). Включение $\text{supp } J^{-1}F_p \subset 2\tau\Pi_a$ следует из теоремы Пэли–Винера [14], но его мы получим позже и без ее применения. Пусть

$$\mu_j = (\lambda_{j1}(\tau a_j))^{p-2}.$$

Если $\sigma^p - \sum_{j=1}^d \mu_j \lambda_j^2 > 0$, то, применяя неравенство Гёльдера и (3.5), получим

$$|\lambda|_p = \sum_{j=1}^d \mu_j^{p/2} |\lambda_j|^p \mu_j^{-p/2} \leq \left(\sum_{j=1}^d \mu_j \lambda_j^2 \right)^{p/2} \left(\sum_{j=1}^d \mu_j^{-p/(2-p)} \right)^{1-p/2} < \sigma^{p^2/2} \sigma^{p(1-p/2)} = \sigma^p,$$

поэтому $F_p(\lambda) \leq 0$ при $|\lambda|_p \geq \sigma$. Остается доказать, что $J^{-1}F_p(t) \geq 0$ при $t \in \mathbb{R}_+^d$.

Для удобства записи введем обозначения

$$\varphi_{\lambda_j}(t_j) = \varphi_j(t_j, \lambda_j), \quad \varphi_{\lambda}(t) = \varphi(t, \lambda).$$

Рассмотрим функции

$$u_j(x_j) = \begin{cases} \varphi_j(x_j, \lambda_{j1}(\tau a_j)), & |x_j| \leq \tau a_j, \\ 0, & |x_j| > \tau a_j, \end{cases} \quad u(x) = \prod_{j=1}^d u_j(x_j).$$

Согласно (2.6), (2.8), (2.10) для $t \in \mathbb{R}^d$, $t^+ = (|t_1|, \dots, |t_d|)$,

$$\begin{aligned} u(x) &\geq 0, & \text{supp } u &\subset \tau\Pi_a, & T^t u(x) &\geq 0, & \text{supp } T^t u &\subset \Pi_{\tau a+t^+}, \\ JT^t u(\lambda) &= \varphi(t, \lambda) Ju(\lambda) = \prod_{j=1}^d \varphi_j(t_j, \lambda_j) J_j u_j(\lambda_j). \end{aligned} \quad (6.3)$$

Используя дифференциальное уравнение

$$\frac{d}{dx_j} \left(\Delta(x_j) \frac{d}{dx_j} \varphi_j(x_j, \lambda_j) \right) + (\lambda_j^2 + \rho_j^2) \Delta(x_j) \varphi_j(x_j, \lambda_j) = 0,$$

нетрудно показать (см. [17; гл. 1]), что

$$J_j u_j(\lambda_j) = \int_0^{\tau a_j} \varphi_j(x_j, \lambda_j) \varphi_j(x_j, \lambda_{j1}(\tau a_j)) d\mu(x_j) = b_j \frac{\varphi_j(\tau a_j, \lambda_j)}{\lambda_{j1}^2(\tau a_j) - \lambda_j^2}, \quad (6.4)$$

где

$$b_j = -\Delta(\tau a_j) \frac{d}{dt_j} \varphi_j(\tau a_j, \lambda_{j1}(\tau a_j)) > 0,$$

так как $\varphi_j(0, \lambda_{j1}(\tau a_j)) = 1$ и τa_j – первый простой нуль функции $\varphi_j(x_j, \lambda_{j1}(\tau a_j))$.

Следуя [7], [21], рассмотрим функцию

$$G(x) = - \int_{\partial(\tau \Pi_a)} T^t u(x) \frac{\partial u(t)}{\partial n} h(t) \Delta(t) dS(t), \quad (6.5)$$

где $\partial(\tau \Pi_a)$ – граница параллелепипеда $\tau \Pi_a$, $\partial u(t)/\partial n$ – производная по направлению внешней нормали к $\partial(\tau \Pi_a)$, $h(t) = \mu_j$, если $t_j = \pm \tau a_j$, $j = 1, \dots, d$, $dS(t)$ – элемент площади поверхности на $\partial(\tau \Pi_a)$.

Так как

$$\left. \frac{\partial u(t)}{\partial n} \right|_{t_j = \pm \tau a_j} = \frac{d}{dt_j} \varphi_j(\tau a_j, \lambda_{j1}(\tau a_j)) \prod_{i \neq j} u_i(t_i) \leq 0, \quad (6.6)$$

то в силу (6.3) $G(x) \geq 0$, $\text{supp } G \subset 2\tau \Pi_a$ и

$$\begin{aligned} JG(\lambda) &= - \int_{\partial(\tau \Pi_a)} \frac{\partial u(t)}{\partial n} h(t) J(T^t u)(\lambda) \Delta(t) dS(t) \\ &= - \int_{\partial(\tau \Pi_a)} \frac{\partial u(t)}{\partial n} h(t) \varphi(t, \lambda) \Delta(t) dS(t) Ju(\lambda). \end{aligned} \quad (6.7)$$

Если $(\tau \Pi_a)^j = \prod_{i \neq j} [-\tau a_i, \tau a_i]$, то согласно (6.7), (6.4)

$$\begin{aligned} g(\lambda) &= - \int_{\partial(\tau \Pi_a)} \frac{\partial u(t)}{\partial n} h(t) \varphi(t, \lambda) \Delta(t) dS(t) \\ &= -2 \sum_{j=1}^d \frac{d}{dt_j} \varphi_j(\tau a_j, \lambda_{j1}(\tau a_j)) \mu_j \varphi_j(\tau a_j, \lambda_j) \Delta_j(\tau a_j) \\ &\quad \times \int_{(\tau \Pi_a)^j} \prod_{i \neq j} u_i(t_i) \varphi_i(t_i, \lambda_i) \prod_{i \neq j} d\mu_i(t_i) \\ &= -2 \sum_{j=1}^d \frac{d}{dt_j} \varphi_j(\tau a_j, \lambda_{j1}(\tau a_j)) \mu_j \varphi_j(\tau a_j, \lambda_j) \Delta_j(\tau a_j) \prod_{i \neq j} J_i u_i(\lambda_i) \\ &= -2 Ju(\lambda) \sum_{j=1}^d \frac{d}{dt_j} \varphi_j(\tau a_j, \lambda_{j1}(\tau a_j)) \mu_j \varphi_j(\tau a_j, \lambda_j) \Delta_j(\tau a_j) (J_j u_j(\lambda_j))^{-1} \\ &= 2 Ju(\lambda) \sum_{j=1}^d \mu_j (\lambda_{j1}^2(\tau a_j) - \lambda_j^2) = 2 Ju(\lambda) \left(\sigma^p - \sum_{j=1}^d \mu_j \lambda_j^2 \right). \end{aligned}$$

Отсюда и из (6.7)

$$JG(\lambda) = 2(Ju(\lambda))^2 \left(\sigma^p - \sum_{j=1}^d \mu_j \lambda_j^2 \right).$$

С учетом (6.4), (6.1) приходим к выводу, что целая функция $F_p(\lambda) = cJG(\lambda)$, $c > 0$, поэтому $J^{-1}F_p(t) = cG(t) \geq 0$, $\text{supp } J^{-1}F_p \subset 2\tau\Pi_a$, и для некоторого $c_1 > 0$ функция $c_1F_p \in K(2\tau\Pi_a)$.

Лемма доказана.

Из лемм 4.1, 6.1 вытекает верхняя оценка оптимального аргумента:

$$\tau(\sigma B_p^d, \Pi_a)_{2,\mu} \leq 2\tau_{\sigma,a}^p.$$

С учетом леммы 5.6 теорема 3.1 полностью доказана.

Асимптотики функций Якоби (5.2) для оптимального аргумента при $\sigma \rightarrow \infty$ дают следующую эквивалентность:

$$\sigma \tau(\sigma B_p^d, \Pi_a)_{2,\mu} \sim \left| \left(\frac{2q_{\alpha_1}}{a_1}, \dots, \frac{2q_{\alpha_d}}{a_d} \right) \right|_p,$$

где q_{α_j} — наименьший положительный нуль функции Бесселя $J_{\alpha_j}(z)$. Она совпадает с оптимальным аргументом в [9].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] V. V. Arestov, N. I. Chernykh, “On the L_2 -approximation of periodic functions by trigonometric polynomials”, *Approximation and Function Spaces*, North-Holland, Amsterdam, 1981, 25–43.
- [2] Н. И. Черных, “О неравенстве Джексона в L_2 ”, *Приближение функций в среднем*, Сборник работ, Тр. МИАН СССР, **88**, 1967, 71–74.
- [3] Е. Е. Бердышева, “Две взаимосвязанные экстремальные задачи для целых функций многих переменных”, *Матем. заметки*, **66**:3 (1999), 336–350.
- [4] Д. В. Горбачев, “Экстремальные задачи для целых функций экспоненциального сферического типа”, *Матем. заметки*, **68**:2 (2000), 179–187.
- [5] А. В. Иванов, “Некоторые экстремальные задачи для целых функций в весовых пространствах”, *Изв. ТулГУ. Естественные науки*, 2010, № 1, 26–44.
- [6] А. В. Иванов, В. И. Иванов, “Теорема Джексона в пространстве $L_2(\mathbb{R}^d)$ со степенным весом”, *Матем. заметки*, **88**:1 (2010), 148–151.
- [7] А. В. Иванов, В. И. Иванов, “Теория Данкля и теорема Джексона в пространстве $L_2(\mathbb{R}^d)$ со степенным весом”, Тр. ИММ УрО РАН, **16**, 2010, 180–192.
- [8] А. В. Иванов, “Задача Логана для целых функций многих переменных и константы Джексона в весовых пространствах”, *Изв. ТулГУ. Естественные науки*, 2011, № 2, 29–58.
- [9] А. В. Иванов, В. И. Иванов, “Оптимальные аргументы в неравенстве Джексона в пространстве $L_2(\mathbb{R}^d)$ со степенным весом”, *Матем. заметки*, **94**:3 (2013), 338–348.
- [10] В. И. Иванов, А. В. Иванов, “Оптимальные аргументы в неравенстве Джексона–Стечкина в $L_2(\mathbb{R}^d)$ с весом Данкля”, *Матем. заметки*, **96**:5 (2014), 674–686.
- [11] D. V. Gorbachev, V. I. Ivanov, R. A. Veprintsev, “Optimal Argument in the Sharp Jackson Inequality in the Space L_2 with Hyperbolic Weight”, *Math. Notes*, **96**:6 (2014), 904–913.
- [12] M. Flensted-Jensen, T. H. Koornwinder, “The convolution structure for Jacobi function expansions”, *Ark. Mat.*, **11** (1973), 245–262.

- [13] M. Flensted-Jensen, T. H. Koornwinder, “Jacobi functions: The addition formula and the positivity of dual convolution structure”, *Ark. Mat.*, **17** (1979), 139–151.
- [14] T. Koornwinder, “A new proof of a Paley–Wiener type theorem for the Jacobi transform”, *Ark. Mat.*, **13** (1975), 145–159.
- [15] Б. М. Левитан, И. С. Саргсян, *Операторы Штурма–Лиувилля и Дирака*, Наука, М., 1988.
- [16] Н. П. Корнейчук, *Экстремальные задачи теории приближения*, М., Наука, 1976.
- [17] Д. В. Горбачев, *Избранные задачи теории функций и теории приближений*, Гриф и К, Тула, 2005.
- [18] Д. В. Горбачев, В. И. Иванов, “Квадратурные формулы Гаусса и Маркова по нулям функций Якоби”, *Современные проблемы математики, механики, информатики*, ТулГУ, Тула, 2014, 31–37.
- [19] В. И. Иванов, Юнпин Лю, О. И. Смирнов, “О некоторых классах целых функций экспоненциального типа в пространствах $L_p(\mathbb{R}^d)$ со степенным весом”, *Изв. ТулГУ. Естественные науки*, 2011, № 2, 70–80.
- [20] Н. И. Ахиезер, *Лекции по теории аппроксимации*, Наука, М., 1965.
- [21] В. А. Юдин, “Многомерная теорема Джексона в L_2 ”, *Матем. заметки*, **29**:2 (1981), 309–315.

Р. А. Вепринцев

Тульский государственный университет

E-mail: veprintsevroma@gmail.com

Поступило

13.12.2014