Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Владимиров, Е. С. Карулина, О нижней априорной оценке минимального собственного значения одной задачи Штурма–Лиувилля с граничными условиями второго типа, *Матем. заметки*, 2015, том 97, выпуск 6, 832–840

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10662>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.55.26

26 апреля 2023 г., 10:53:48

О нижней априорной оценке минимального собственного значения одной задачи Штурма–Лиувилля с граничными условиями второго типа

А. А. Владимиров, Е. С. Карулина

Устанавливается достижимость точной нижней грани m_γ минимальных собственных значений граничных задач

$$\begin{aligned} -y'' + qy &= \lambda y, \\ y'(0) &= y'(1) = 0 \end{aligned}$$

при пробегании неотрицательным потенциалом $q \in L_1[0, 1]$ единичной сферы пространства $L_\gamma[0, 1]$, где $\gamma \in (0, 1)$. Также устанавливается справедливость равенства $m_\gamma = 1$ при $\gamma \leq 1 - 2\pi^{-2}$ и неравенства $m_\gamma < 1$ в противном случае.

Библиография: 8 названий.

DOI: 10.4213/mzm10662

1. Введение. Рассмотрим задачу Штурма–Лиувилля

$$\begin{aligned} -y'' + qy &= \lambda y, \\ y'(0) &= y'(1) = 0, \end{aligned} \tag{1}$$

где $y \in W_1^2[0, 1]$, равенство (1) понимается в смысле обобщенного дифференцирования, а потенциал q пробегает множество

$$A_\gamma \Leftarrow \left\{ q \in L_1[0, 1] : q(x) \stackrel{\text{п.в.}}{\geq} 0, \int_0^1 q^\gamma dx = 1 \right\}.$$

Целью настоящей статьи является уточнение некоторых свойств точной нижней грани

$$m_\gamma \Leftarrow \inf_{q \in A_\gamma} \lambda_1(q)$$

собственных значений задачи (1), (2) в случае $\gamma \in (0, 1)$. А именно, нами будут установлены следующие два предложения.

Работа первого автора выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 13-01-00705). Работа обоих авторов выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 14-01-31423) и Российского научного фонда (грант № 14-11-00754).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. При всяком $\gamma \in (0, 1)$ существует потенциал $q_* \in A_\gamma$, удовлетворяющий равенству $\lambda_1(q_*) = m_\gamma$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. При всяком $\gamma \in (0, 1 - 2\pi^{-2}]$ выполняется равенство $m_\gamma = 1$, а при всяком $\gamma \in (1 - 2\pi^{-2}, 1)$ выполняется неравенство $m_\gamma < 1$.

Все рассматриваемые в тексте функциональные пространства предполагаются вещественными.

Отметим ряд известных в литературе результатов для оптимизационных проблем, подобных рассматриваемой нами. В работе [1] было исследовано при всех $\gamma \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ поведение величины m_γ , отвечающей первой граничной задаче для уравнения

$$-y'' = \lambda qy. \quad (3)$$

Та же проблема в случае второй и третьей граничных задач для уравнения (3) изучена в работе [2]. Случай первой граничной задачи для уравнения (1) рассмотрен в работе [3]. В тех же работах для рассматриваемых в них граничных задач изучено поведение не рассматриваемой нами величины

$$M_\gamma \equiv \sup_{q \in A_\gamma} \lambda_1(q).$$

Поведение последней при $\gamma \geq 1$ в первой граничной задаче для уравнения (1) рассматривалось также в работе [4], а при $\gamma = 1$ – в работе [5].

В случае $\gamma \geq 1$ рассматриваемая в настоящей статье задача изучалась, в частности, в работах [6], [7].

2. Переформулировка задачи. Далее мы всегда будем исходить из факта равносильности (см., например, [7]) граничной задачи (1), (2) спектральной задаче для операторного пучка $T_q: \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{B}(W_2^1[0, 1], W_2^{-1}[0, 1])$ вида

$$\langle T_q(\lambda)y, y \rangle \equiv \int_0^1 [|y'|^2 + (q - \lambda)y^2] dx.$$

Введем в рассмотрение параметризованное значениями $\zeta > 0$ семейство множеств

$$M_\zeta \equiv \{y \in W_2^1[0, 1] : y(x) \geq \zeta \text{ для всех } x \in [0, 1]\}.$$

При этом множество M всех равномерно положительных функций класса $W_2^1[0, 1]$ очевидным образом допускает представление

$$M = \bigcup_{\zeta > 0} M_\zeta.$$

Введем также в рассмотрение функционалы $J_\gamma: M \rightarrow \mathbb{R}$ и $G_\gamma: M \rightarrow \mathbb{R}$ вида

$$J_\gamma(y) \equiv \int_0^1 (y')^2 dx + \left(\int_0^1 y^{2\gamma/(\gamma-1)} dx \right)^{(\gamma-1)/\gamma}, \quad G_\gamma(y) \equiv J_\gamma(y) \cdot \|y\|_{L_2[0,1]}^{-2}.$$

Имеет место следующий факт.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Справедливо равенство $m_\gamma = \inf_{y \in M} G_\gamma(y)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно неравенству Гёльдера для любых $q \in A_\gamma$ и $y \in M$ справедливы соотношения

$$1 = \left(\int_0^1 q^\gamma dx \right)^{1/\gamma} \leq \left[\left(\int_0^1 q y^2 dx \right)^\gamma \cdot \left(\int_0^1 y^{2\gamma/(\gamma-1)} dx \right)^{1-\gamma} \right]^{1/\gamma},$$

влекущие независимо от выбора $\lambda \in \mathbb{R}$ оценку

$$\langle T_q(\lambda)y, y \rangle \geq J_\gamma(y) - \lambda \|y\|_{L_2[0,1]}^2.$$

Соответственно, зафиксировав (в согласии с теорией Штурма) в качестве $y \in M$ собственную функцию пучка T_q , отвечающую его наименьшему собственному значению $\lambda_1(q)$, устанавливаем справедливость соотношений

$$G_\gamma(y) \leq \langle T_q(\lambda_1(q))y, y \rangle \cdot \|y\|_{L_2[0,1]}^{-2} + \lambda_1(q) = \lambda_1(q).$$

Ввиду произвольности выбора потенциала $q \in A_\gamma$ это означает справедливость оценки

$$m_\gamma \geq \inf_{y \in M} G_\gamma(y).$$

Далее, при любом выборе функции $y \in M$ для потенциала

$$q_* = \left(\int_0^1 y^{2\gamma/(\gamma-1)} dx \right)^{-1/\gamma} \cdot y^{2/(\gamma-1)} \in A_\gamma$$

справедливы равенства

$$\langle T_{q_*}(G_\gamma(y))y, y \rangle = J_\gamma(y) - G_\gamma(y)\|y\|_{L_2[0,1]}^2 = 0,$$

а тогда и оценка $\lambda_1(q_*) \leq G_\gamma(y)$. Произвольность выбора функции $y \in M$ означает поэтому справедливость оценки

$$m_\gamma \leq \inf_{y \in M} G_\gamma(y).$$

3. Доказательство предложения 1. Имеет место следующий факт.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Пусть $\varepsilon \in (0, 1)$, и пусть $y \in M$ удовлетворяет неравенству

$$G_\gamma(y) < \frac{\pi^2}{4} \cdot (1 - \varepsilon)^2. \quad (4)$$

Тогда независимо от выбора точки $x \in [0, 1]$ справедлива оценка

$$y(x) > \varepsilon \|y\|_{L_2[0,1]}. \quad (5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что некоторая точка $a \in [0, 1]$ удовлетворяет неравенству $y(a) \leq \varepsilon \|y\|_{L_2[0,1]}$. Рассмотрим принадлежащие пространству $W_2^1[0, 1]$ функции

$$y_-(x) = \begin{cases} y(x) - y(a) & \text{при } x \leq a, \\ 0 & \text{при } x \geq a, \end{cases} \quad y_+(x) = \begin{cases} y(x) - y(a) & \text{при } x \geq a, \\ 0 & \text{при } x \leq a. \end{cases}$$

При этом очевидным образом справедливы оценки

$$\|y_-\|_{L_2[0,1]}^2 + \|y_+\|_{L_2[0,1]}^2 = \|y - y(a)\|_{L_2[0,1]}^2 \geq (1 - \varepsilon)^2 \|y\|_{L_2[0,1]}^2. \quad (6)$$

С другой стороны, справедливы также соотношения

$$J_\gamma(y) \geq \int_0^1 (y'_-)^2 dx + \int_0^1 (y'_+)^2 dx \geq \frac{\pi^2}{4} \|y_-\|_{L_2[0,1]}^2 + \frac{\pi^2}{4} \|y_+\|_{L_2[0,1]}^2,$$

объединяя которые с (6), получаем оценку $G_\gamma(y) \geq (\pi^2/4) \cdot (1 - \varepsilon)^2$.

Обозначим символом Y множество функций $y \in M$, для которых неравенство (5) нарушается хотя бы в одной точке отрезка $[0, 1]$. Введем также обозначение $\hat{y}$ для функции вида $\hat{y}(x) \equiv 1$. Предложение 4 гарантирует в случае $\varepsilon < 1/3$ справедливость оценок

$$m_\gamma \leq G_\gamma(\hat{y}) = 1 < \frac{\pi^2}{4} \cdot (1 - \varepsilon)^2 \leq \inf_{y \in Y} G_\gamma(y),$$

а потому и соотношения $m_\gamma = \inf_{y \in M \setminus Y} G_\gamma(y)$. Незначительной модификацией этого факта является следующее предложение, в формулировке которого мы используем символ S для обозначения единичной сферы пространства $W_2^1[0, 1]$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. *Существует значение $\zeta > 0$ со свойством*

$$m_\gamma = \inf_{y \in M_\zeta \cap S} G_\gamma(y).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно заметить, что всякая функция $y \in M \setminus Y$ со свойством $G_\gamma(y) < 3$ удовлетворяет оценкам

$$\|y\|_{W_2^1[0,1]}^2 \leq [G_\gamma(y) + 1] \cdot \|y\|_{L_2[0,1]}^2 < 4\|y\|_{L_2[0,1]}^2,$$

гарантирующим справедливость оценок $y(x) > (\varepsilon/2) \cdot \|y\|_{W_2^1[0,1]}$.

Заметим теперь, что полная непрерывность вложения пространства $W_2^1[0, 1]$ в пространство $L_2[0, 1]$ гарантирует существование последовательности $\{y_n\}_{n=0}^\infty$ функций $y_n \in M_\zeta \cap S$, обладающей свойством $\lim_{n \rightarrow \infty} G_\gamma(y_n) = m_\gamma$ и сходящейся в пространстве $L_2[0, 1]$ к некоторой функции $y_* \in L_2[0, 1]$. Рассмотрим соответствующую двойную последовательность $\{y_{n,m}\}_{(n,m) \in \mathbb{N}^2}$ функций вида

$$y_{n,m} = \frac{y_n + y_m}{2} \in M_\zeta.$$

С учетом неравенства Гёльдера и теоремы Лагранжа о конечном приращении получаем, что указанные функции подчиняются оценкам

$$\left| \int_0^1 y_{n,m}^{2\gamma/(\gamma-1)} dx - \int_0^1 y_*^{2\gamma/(\gamma-1)} dx \right| \leq \frac{2\gamma \cdot \zeta^{(\gamma+1)/(\gamma-1)}}{1 - \gamma} \cdot \|y_{n,m} - y_*\|_{L_2[0,1]}.$$

Соответственно, справедливы также соотношения

$$\begin{aligned} \liminf_{n,m \rightarrow \infty} G_\gamma(y_{n,m}) &= \frac{\liminf_{n,m \rightarrow \infty} \|y_{n,m}\|_{W_2^1[0,1]}^2 - \|y_*\|_{L_2[0,1]}^2 + \left(\int_0^1 y_*^{2\gamma/(\gamma-1)} dx \right)^{(\gamma-1)/\gamma}}{\|y_*\|_{L_2[0,1]}^2} \\ &\leq \frac{1 - \|y_*\|_{L_2[0,1]}^2 + \left(\int_0^1 y_*^{2\gamma/(\gamma-1)} dx \right)^{(\gamma-1)/\gamma}}{\|y_*\|_{L_2[0,1]}^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} G_\gamma(y_n) = m_\gamma, \end{aligned}$$

вместе с тривиальной оценкой

$$\liminf_{n,m \rightarrow \infty} G_\gamma(y_{n,m}) \geq m_\gamma$$

означающие выполнение равенства

$$\lim_{n,m \rightarrow \infty} \|y_{n,m}\|_{W_2^1[0,1]} = 1.$$

Из факта равномерной выпуклости гильбертова пространства $W_2^1[0,1]$ теперь немедленно вытекает, что последовательность $\{y_n\}_{n=0}^\infty$ фундаментальна в пространстве $W_2^1[0,1]$. Тем самым, предельная функция $y_* \in L_2[0,1]$ в действительности принадлежит классу $M_\zeta \cap S$ и удовлетворяет равенству

$$G_\gamma(y_*) = m_\gamma.$$

Итак, нами установлено существование функции $y_* \in M$, на которой достигается минимальное по классу M значение функционала G_γ . Это автоматически означает обращение в нуль дифференциала $DG_\gamma(y_*)$, что, в свою очередь, равносильно выполнению равенства

$$T_{q_*}(m_\gamma)y_* = 0,$$

где положено

$$q_* = \left(\int_0^1 y_*^{2\gamma/(\gamma-1)} dx \right)^{-1/\gamma} \cdot y_*^{2/(\gamma-1)} \in A_\gamma.$$

Доказательство предложения 1 тем самым завершено.

4. Доказательство предложения 2. Начнем с установления справедливости второй части рассматриваемого предложения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. При любом $\gamma \in (1 - 2\pi^{-2}, 1)$ выполняется неравенство $m_\gamma < 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно установить, что функция $\hat{y} \in M$ вида $\hat{y}(x) \equiv 1$ не является минимумом функционала G_γ . Это заведомо имеет место, когда квадратичная форма второго дифференциала функционала G_γ в точке $\hat{y}$ не является неотрицательно определенной. Для доказательства последнего ввиду легко проверяемых тождеств

$$DG_\gamma(y; v) \equiv \frac{2}{\|y\|_{L_2[0,1]}^2} \cdot \left[\int_0^1 y'v' dx + \left(\int_0^1 y^{2\gamma/(\gamma-1)} dx \right)^{-1/\gamma} \cdot \int_0^1 y^{(\gamma+1)/(\gamma-1)} v dx - G_\gamma(y) \cdot \int_0^1 yv dx \right],$$

$$D^2G_\gamma(\hat{y}; u, v) \equiv \int_0^1 2u'v' dx + \frac{4}{1-\gamma} \left(\int_0^1 u dx \cdot \int_0^1 v dx - \int_0^1 uv dx \right)$$

достаточно установить отрицательность наименьшего собственного значения граничной задачи

$$\begin{aligned} -y'' + \frac{2}{1-\gamma} \left(\int_0^1 y dx - y \right) &= \lambda y, \\ y'(0) &= y'(1) = 0. \end{aligned}$$

Однако это собственное значение есть $\pi^2 - 2(1-\gamma)^{-1} < 0$.

При доказательстве первой части предложения 2 мы будем опираться на следующий факт.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. *Функция $\gamma \mapsto m_\gamma$ является невозрастающей на множестве $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства зафиксируем произвольную равномерно положительную функцию $q \in C[0, 1]$. С учетом неравенства Гёльдера при любом выборе значений $\gamma > 0$ и $\beta > 1$ справедливы оценки

$$\left(\int_0^1 q^\gamma dx \right)^{1/\gamma} = \left[\left(\int_0^1 q^{\beta \cdot (\gamma/\beta)} dx \right)^{1/\beta} \right]^{\beta/\gamma} \geq \left(\int_0^1 q^{\gamma/\beta} dx \right)^{\beta/\gamma},$$

а при любом выборе значений $\gamma < 0$ и $\beta > 1$ справедливы оценки

$$\left(\int_0^1 q^\gamma dx \right)^{1/\gamma} = \left[\left(\int_0^1 q^{\beta \cdot (\gamma/\beta)} dx \right)^{1/\beta} \right]^{\beta/\gamma} \leq \left(\int_0^1 q^{\gamma/\beta} dx \right)^{\beta/\gamma}.$$

Вместе с легко проверяемым асимптотическим соотношением

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0} \left(\int_0^1 q^\gamma dx \right)^{1/\gamma} = \exp \left(\int_0^1 \ln q dx \right)$$

это означает неубывание функции $\gamma \mapsto \left(\int_0^1 q^\gamma dx \right)^{1/\gamma}$ на множестве $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Соответственно, независимо от выбора значений $\gamma, \gamma_1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ со свойством $\gamma_1 > \gamma$ для любой функции $q \in A_\gamma \cap C[0, 1]$ найдется величина $C \in (0, 1]$ со свойством $Cq \in A_{\gamma_1}$. Учет тривиальных оценок $\lambda_1(Cq) \leq \lambda_1(q)$ и факта плотности подмножества $A_\gamma \cap C[0, 1]$ в множестве $A_\gamma \subset L_1[0, 1]$ завершает доказательство.

Предложение 7 вместе с выполняющимся независимо от выбора $\gamma \in (0, 1)$ для функции $\hat{y} \in M$ вида $\hat{y}(x) \equiv 1$ равенством $G_\gamma(\hat{y}) = 1$ показывают, что справедливость предложения 2 достаточно проверить в случае $\gamma = 1 - 2\pi^{-2}$. Выполнение последнего равенства и будет предполагаться в оставшейся части статьи.

Введем в рассмотрение параметризованное величиной $\alpha > 0$ семейство функций

$$f_\alpha(t) = \alpha t^{2\gamma} - t^2 - 1, \quad t \in (0, +\infty). \quad (7)$$

Имеет место следующий факт.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8. *Множество точек $t \in \mathbb{R}$ со свойством $f_\alpha(t) > 0$ непусто в точности при выполнении условия*

$$\alpha > \gamma^{-\gamma}(1 - \gamma)^{\gamma-1} \quad (8)$$

и представляет собой в этом случае некоторый интервал $(\omega_\alpha^-, \omega_\alpha^+)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При любом значении параметра $\alpha > 0$ справедливо тождество

$$f'_\alpha(t) \equiv 2\alpha\gamma t^{2\gamma-1} - 2t, \quad (9)$$

означающее, что функция f_α строго возрастает слева от точки $\tau_\alpha = (\alpha\gamma)^{1/(2-2\gamma)}$ и строго убывает справа от нее. Соответственно, область положительности функции f_α непуста в точности при выполнении условия $f_\alpha(\tau_\alpha) > 0$, равносильного условию (8), и представляет собой в этом случае содержащий точку τ_α интервал.

Кроме тождества (9), нами далее будут использоваться также тождества

$$f''_{\alpha}(t) \equiv 2\alpha\gamma(2\gamma - 1)t^{2\gamma-2} - 2, \quad (10)$$

$$f'''_{\alpha}(t) \equiv 2\alpha\gamma(2\gamma - 1)(2\gamma - 2)t^{2\gamma-3}. \quad (11)$$

Предложение 1 показывает, что граничная задача

$$\begin{aligned} -y'' + y^{(\gamma+1)/(\gamma-1)} &= \mu y, \\ y'(0) &= y'(1) = 0, \\ \int_0^1 y^{2\gamma/(\gamma-1)} dx &= 1 \end{aligned} \quad (12)$$

не может оказаться неразрешимой в случае $\mu = m_{\gamma}$. Непосредственно проверяется также, что в случае $\mu < 1$ соответствующее решение не может быть постоянным. Тем самым, для завершения доказательства предложения 2 достаточно установить, что период непостоянных решений уравнения (12) не может быть равен 2 при выполнении неравенства $\mu < 1$. Поскольку, как показывают стандартные вычисления, этот период представляет собой величину $2\mu^{-1/2}(1 - \gamma)I_0(\hat{\alpha})$, где положено

$$\begin{aligned} I_{\varepsilon}(\alpha) &\Rightarrow \int_{\omega_{\alpha}^{-} + \varepsilon}^{\omega_{\alpha}^{+} - \varepsilon} \frac{dt}{\sqrt{f_{\alpha}(t)}}, \quad \varepsilon \geq 0, \\ \hat{\alpha} &\Rightarrow \left(\frac{\gamma}{1 - \gamma} \right)^{1-\gamma} \cdot \mu^{-\gamma} \cdot \left[(y')^2 + \mu y^2 + \frac{1 - \gamma}{\gamma} y^{2\gamma/(\gamma-1)} \right], \end{aligned}$$

то поставленная цель будет достигнута установлением справедливости следующего предложения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9. *Функция I_0 не может принимать значения, меньшие величины $(1 - \gamma)^{-1}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Введем обозначения

$$A_{\alpha}(t) \Rightarrow t^{2\gamma} f'_{\alpha}(t) - 4\gamma t^{2\gamma-1} f_{\alpha}(t), \quad (13)$$

$$\psi_{\alpha} \Rightarrow (f'_{\alpha})^2 - 2f_{\alpha} f''_{\alpha}. \quad (14)$$

Из тождества (11) следует, что при любой фиксации значения $\alpha_0 > \gamma^{-\gamma}(1 - \gamma)^{\gamma-1}$ функция ψ_{α_0} монотонна на интервале $(\omega_{\alpha_0}^{-}, \omega_{\alpha_0}^{+})$. Отсюда и из обусловленных тождеством (9) неравенств $f'_{\alpha_0}(\omega_{\alpha_0}^{\pm}) \neq 0$ вытекает также равномерная положительность функции ψ_{α_0} на указанном интервале.

Дифференцируя с учетом последнего факта функции I_{ε} при $\varepsilon > 0$ на малой окрестности $U \ni \alpha_0$, устанавливаем справедливость соотношений

$$\begin{aligned} I'_{\varepsilon}(\alpha) &\equiv - \int_{\omega_{\alpha}^{-} + \varepsilon}^{\omega_{\alpha}^{+} - \varepsilon} \frac{t^{2\gamma} dt}{2f_{\alpha}^{3/2}(t)} - \frac{(\omega_{\alpha}^{+})^{2\gamma}}{f'_{\alpha}(\omega_{\alpha}^{+})\sqrt{f_{\alpha}(\omega_{\alpha}^{+} - \varepsilon)}} + \frac{(\omega_{\alpha}^{-})^{2\gamma}}{f'_{\alpha}(\omega_{\alpha}^{-})\sqrt{f_{\alpha}(\omega_{\alpha}^{-} + \varepsilon)}} \\ &= - \int_{\omega_{\alpha}^{-} + \varepsilon}^{\omega_{\alpha}^{+} - \varepsilon} \frac{t^{2\gamma} dt}{2f_{\alpha}^{3/2}(t)} - \frac{A_{\alpha}(t)}{\psi_{\alpha}(t)\sqrt{f_{\alpha}(t)}} \Big|_{\omega_{\alpha}^{-} + \varepsilon}^{\omega_{\alpha}^{+} - \varepsilon} + O(\varepsilon^{1/2}) \\ &= - \int_{\omega_{\alpha}^{-} + \varepsilon}^{\omega_{\alpha}^{+} - \varepsilon} \left[\frac{t^{2\gamma}}{2f_{\alpha}^{3/2}(t)} + \left(\frac{A_{\alpha}(t)}{\psi_{\alpha}(t)\sqrt{f_{\alpha}(t)}} \right)' \right] dt + O(\varepsilon^{1/2}), \end{aligned}$$

где асимптотические оценки остаточных слагаемых равномерны по окрестности U . Соответственно, функция I_0 также дифференцируема на U и имеет производную

$$\begin{aligned}
 I'_0(\alpha) &\equiv - \int_{\omega_{\alpha}^{-}}^{\omega_{\alpha}^{+}} \left[\frac{t^{2\gamma}}{2f_{\alpha}^{3/2}(t)} + \left(\frac{A_{\alpha}(t)}{\psi_{\alpha}(t)\sqrt{f_{\alpha}(t)}} \right)' \right] dt \\
 &= - \int_{\omega_{\alpha}^{-}}^{\omega_{\alpha}^{+}} \frac{1}{\psi_{\alpha}^2(t)\sqrt{f_{\alpha}(t)}} \cdot \left[\frac{t^{2\gamma}\psi_{\alpha}^2(t)}{2f_{\alpha}(t)} + \left(A'_{\alpha}(t) - \frac{A_{\alpha}(t)f'_{\alpha}(t)}{2f_{\alpha}(t)} \right) \cdot \psi_{\alpha}(t) \right. \\
 &\quad \left. - A_{\alpha}(t)\psi'_{\alpha}(t) \right] dt \\
 &= - \int_{\omega_{\alpha}^{-}}^{\omega_{\alpha}^{+}} \frac{1}{\psi_{\alpha}^2(t)\sqrt{f_{\alpha}(t)}} \cdot \left[\frac{t^{2\gamma}\psi_{\alpha}^2(t)}{2f_{\alpha}(t)} - \left(\frac{t^{2\gamma}\psi_{\alpha}(t)}{2f_{\alpha}(t)} + 4\gamma(2\gamma-1)t^{2\gamma-2}f_{\alpha}(t) \right) \cdot \psi_{\alpha}(t) \right. \\
 &\quad \left. - A_{\alpha}(t)\psi'_{\alpha}(t) \right] dt \\
 &= \int_{\omega_{\alpha}^{-}}^{\omega_{\alpha}^{+}} \frac{1}{\psi_{\alpha}^2(t)\sqrt{f_{\alpha}(t)}} \cdot \left[4\gamma(2\gamma-1)t^{2\gamma-2}f_{\alpha}(t) \cdot [(f'_{\alpha}(t))^2 - 2f_{\alpha}(t)f''_{\alpha}(t)] \right. \\
 &\quad \left. - 2f_{\alpha}(t)f'''_{\alpha}(t) \cdot [t^{2\gamma}f'_{\alpha}(t) - 4\gamma t^{2\gamma-1}f_{\alpha}(t)] \right] dt \\
 &= \int_{\omega_{\alpha}^{-}}^{\omega_{\alpha}^{+}} \frac{8\gamma(2\gamma-1)t^{2\gamma-3}f_{\alpha}(t)f'_{\alpha}(t)}{\psi_{\alpha}^2(t)\sqrt{f_{\alpha}(t)}} dt \\
 &= \int_{\omega_{\alpha}^{-}}^{\tau_{\alpha}} \frac{16\gamma(2\gamma-1)t^{2\gamma-3}}{3\psi_{\alpha}^2(t)} d(f_{\alpha}^{3/2}) + \int_{\tau_{\alpha}}^{\omega_{\alpha}^{+}} \frac{16\gamma(2\gamma-1)t^{2\gamma-3}}{3\psi_{\alpha}^2(t)} d(f_{\alpha}^{3/2}).
 \end{aligned}$$

С учетом обусловленного (14) и (11) убывания функции $t \mapsto t^{2\gamma-3}\psi_{\alpha_0}^{-2}(t)$ это гарантирует справедливость неравенства

$$I'_0(\alpha_0) > 0.$$

Произвольность выбора точки $\alpha_0 > \gamma^{-\gamma}(1-\gamma)^{\gamma-1}$ означает потому строгое возрастание функции I_0 на всей ее области определения. С другой стороны, при $\alpha \rightarrow \gamma^{-\gamma}(1-\gamma)^{\gamma-1} + 0$ имеют место асимптотические соотношения

$$\begin{aligned}
 I_0(\alpha) &= \int_{\omega_{\alpha}^{-}}^{\omega_{\alpha}^{+}} \frac{d(f'_{\alpha})}{f'_{\alpha}\sqrt{f_{\alpha}}} \\
 &= \frac{1+o(1)}{2\sqrt{1-\gamma}} \cdot \left[\int_{\tau_{\alpha}}^{\omega_{\alpha}^{-}} \frac{\sqrt{2}d(f'_{\alpha})}{\sqrt{[f'_{\alpha}(\omega_{\alpha}^{-})]^2 - [f'_{\alpha}]^2}} + \int_{\omega_{\alpha}^{+}}^{\tau_{\alpha}} \frac{\sqrt{2}d(f'_{\alpha})}{\sqrt{[f'_{\alpha}(\omega_{\alpha}^{+})]^2 - [f'_{\alpha}]^2}} \right] \\
 &= \frac{1+o(1)}{\sqrt{1-\gamma}} \cdot \int_0^1 \frac{\sqrt{2}dt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{\pi}{\sqrt{2 \cdot (1-\gamma)}} + o(1) = (1-\gamma)^{-1} + o(1).
 \end{aligned}$$

Тем самым, доказываемое утверждение справедливо.

Доказательство предложения 2 завершено. В заключение отметим, что приведенное доказательство предложения 9 основано на идее доказательства основной леммы работы [8].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Ю. В. Егоров, В. А. Кондратьев, “Об оценках первого собственного значения в некоторых задачах Штурма–Лиувилля”, *УМН*, **51**:3 (1996), 73–144.
- [2] О. В. Мурышкина, “Об оценках минимального собственного значения задачи Штурма–Лиувилля с несимметричными краевыми условиями”, *Дифференц. уравнения*, **37**:6 (2001), 854.
- [3] С. С. Ежак, “Об оценках минимального собственного значения задачи Штурма–Лиувилля с интегральным условием”, *Соврем. матем. и ее прилож.*, **36** (2007), 56–69.
- [4] В. А. Винокуров, В. А. Садовничий, “О границах изменения собственного значения при изменении потенциала”, *Докл. РАН*, **392**:5 (2003), 592–597.
- [5] Ю. В. Егоров, В. А. Кондратьев, “Об оценках первого собственного значения задачи Штурма–Лиувилля”, *УМН*, **39**:2 (1984), 151–152.
- [6] Е. С. Карулина, “Оценки первого собственного значения задачи Штурма–Лиувилля с краевыми условиями третьего типа”, *Качественные свойства решений дифференциальных уравнений и смежные вопросы спектрального анализа*, ЮНИТИ-ДАНА, М., 2012, 560–607.
- [7] E. S. Karulina, A. A. Vladimirov, “The Sturm–Liouville problem with singular potential and the extrema of the first eigenvalue”, *Tatra Mt. Math. Publ.*, **54** (2013), 101–118.
- [8] А. И. Назаров, “О точных константах в одномерных теоремах вложения произвольного порядка”, *Проблемы современной теории приближений*, Изд-во СПбГУ, СПб., 2004, 146–158.

А. А. Владимиров

Вычислительный центр им. А. А. Дородницына
РАН, г. Москва

E-mail: vladimi@mech.math.msu.su

Поступило

27.12.2014

Е. С. Карулина

Московский государственный университет
экономики, статистики и информатики

E-mail: karulinaes@yandex.ru