Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Ф. Лукомский, Г. С. Бердников, Ю. С. Крусс, Об ортогональности системы сдвигов масштабирующей функции на группах Виленкина, *Матем. заметки*, 2015, том 98, выпуск 2, 310–313

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10664>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.197.203

26 апреля 2023 г., 17:48:44

Об ортогональности системы сдвигов масштабирующей функции на группах Виленкина

С. Ф. Лукомский, Г. С. Бердников, Ю. С. Крусс

Введение. Пусть $(G, \dot{+})$ – локально компактная группа Виленкина, элементами которой являются бесконечные в обе стороны последовательности

$$x = (\dots, 0_{n-1}, x_n, x_{n+1}, \dots), \quad x_j = 0, \dots, p-1,$$

где p – любое простое число; $g_n = (\dots, 0_{n-1}, 1_n, 0_{n+1}, \dots)$ – базисные элементы в G . Операция сложения $\dot{+}$ определяется как покоординатное сложение по модулю p , т.е.

$$x \dot{+} y = (x_j \dot{+} y_j) = (x_j + y_j \bmod p).$$

Пусть

$$G_n = \{x \in G : x = (\dots, 0_{n-1}, x_n, x_{n+1}, \dots)\}, \quad n \in \mathbb{Z},$$

– основная цепочка подгрупп, $G_n^\perp$ – аннуляторы подгрупп G_n , X – группа всех характеров, $r_n \in G_{n+1}^\perp \setminus G_n^\perp$ – функции Радемахера на группе G . Оператор растяжения $\mathcal{A}$ в группе G определяется равенством $\mathcal{A}x := \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n g_{n-1}$, где $x = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n g_n \in G$, в группе характеров – равенством $(\chi \mathcal{A}, x) = (\chi, \mathcal{A}x)$. Определим множества

$$H_0^{(s)} = \{h \in G : h = a_{-1}g_{-1} \dot{+} a_{-2}g_{-2} \dot{+} \dots \dot{+} a_{-s}g_{-s}\}, \quad s \in \mathbb{N},$$

$$H_0 = \{h \in G : h = a_{-1}g_{-1} \dot{+} a_{-2}g_{-2} \dot{+} \dots \dot{+} a_{-s}g_{-s}, s \in \mathbb{N}\}.$$

Множество H_0 есть множество сдвигов в G . Оно есть аналог множества целых неотрицательных чисел.

Протасов, Фарков в работах [1]–[3] охарактеризовали все двоичные финитные всплески на $\mathbb{R}_+$ и указали алгоритм их построения. Фарков в работах [4], [5], рассматривая масштабирующие функции $\varphi(x)$ с компактным носителем G_{-N} , получил необходимые и достаточные условия на маску $m_0(\chi)$, которая порождает ортогональный КМА. Эти условия были даны при дополнительном предположении

$$\sum_{\alpha_0=1}^{p-1} |m_0(G_{-N}^\perp r_{-N}^{\alpha-N} r_{-N+1}^{\alpha-N+1} \dots r_{-1}^{\alpha-1} r_0^{\alpha_0})|^2 = 1,$$

которое является необходимым для ортогональности системы сдвигов соответствующей масштабирующей функции φ . Фарков в [4]–[5], доказал, что в этом случае масштабирующая функция φ порождает ортогональный КМА тогда и только тогда, когда маска m_0 не имеет блокированных множеств. Задача нахождения блокированных множеств является переборной и требует перебора примерно 2^{p^N} различных вариантов, что реально только при достаточно малых p и N .

Поэтому задача построения ортогональной масштабирующей функции, не требующая перебора, является актуальной. В работах [6], [7] для построения масштабирующей функции φ были использованы деревья, но предложенный там метод работает в случае, когда функция $|\widehat{\varphi}(\chi)|$ постоянна на смежных классах по подгруппе $G_{-1}^\perp$ и принимает только 2 значения: 0 или 1. В [8] удалось избавиться от условия $\text{supp } \varphi(x) \subset G_{-1}$, для этого было введено понятие N -валидного дерева и было доказано, что ступенчатая функция $\varphi(x)$ с носителем $\text{supp } \varphi(x) \subset G_{-N}$ и условием $|\widehat{\varphi}(\chi)| = 0$ или 1 порождает КМА тогда и только тогда,

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 13-01-00102-а).

DOI: 10.4213/mzm10664

© С. Ф. Лукомский, Г. С. Бердников, Ю. С. Крусс, 2015

когда $\varphi(x)$ порождена N -валидным деревом. В настоящей заметке мы избавляемся от условия $|\hat{\varphi}(\chi)| = 0$ или 1 и указываем алгоритм построения ортогональной масштабирующей функции с единственным ограничением: $\hat{\varphi}(\chi)$ – ступенчатая функция. Полученный алгоритм не требует перебора.

Задачу построения такой функции мы сводим к нахождению некоторого графа, который, в свою очередь, строится по произвольному N -валидному дереву.

1. Масштабирующая функция и КМА. Мы будем рассматривать случай, когда масштабирующая функция φ , порождающая ортогональный КМА, является ступенчатой. Множество ступенчатых функций, постоянных на смежных классах по подгруппе G_M с носителем $\text{supp}(\varphi) \subset G_{-N}$, обозначим через $\mathfrak{D}_M(G_{-N})$, $M, N \in \mathbb{N}$. Аналогично, $\mathfrak{D}_{-N}(G_M^\perp)$ есть множество ступенчатых функций, постоянных на смежных классах по подгруппе $G_{-N}^\perp$ с носителем $\text{supp}(\varphi) \subset G_M^\perp$. Если функция $\varphi \in \mathfrak{D}_M(G_{-N})$ порождает ортогональный КМА, то она удовлетворяет масштабирующему уравнению $\varphi(x) = \sum_{h \in H_0^{(N+1)}} \beta_h \varphi(\mathcal{A}x \dot{-} h)$ [9], которое можно записать в частотном виде

$$\hat{\varphi}(\chi) = m_0(\chi) \hat{\varphi}(\chi \mathcal{A}^{-1}), \quad (1)$$

где

$$m_0(\chi) = \frac{1}{p} \sum_{h \in H_0^{(N+1)}} \beta_h \overline{(\chi \mathcal{A}^{-1}, h)} \quad (2)$$

– маска уравнения (1). В [9] были доказаны следующие утверждения.

- 1) Если $\hat{\varphi}(\chi) \in \mathfrak{D}_{-N}(G_M^\perp)$ есть решение масштабирующего уравнения (1) и система сдвигов $(\varphi(x \dot{-} h))_{h \in H_0}$ есть ортонормированная система, то φ порождает ортогональный КМА.
- 2) Если $\hat{\varphi}(\chi) \in \mathfrak{D}_{-N}(G_M^\perp)$, то система сдвигов $(\varphi(x \dot{-} h))_{h \in H_0}$ будет ортонормированной системой тогда и только тогда, когда для любых $\alpha_{-N}, \alpha_{-N+1}, \dots, \alpha_{-1} = (0, \dots, p-1)$

$$\sum_{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{M-1}=0}^{p-1} |\hat{\varphi}(G_{-N}^\perp r_{-N}^{\alpha_{-N}} \dots r_0^{\alpha_0} \dots r_{M-1}^{\alpha_{M-1}})|^2 = 1. \quad (3)$$

Таким образом, для построения ортогонального КМА нужно построить функцию $\hat{\varphi}(\chi) \in \mathfrak{D}_{-N}(G_M^\perp)$, которая является решением масштабирующего уравнения (1) и для которой выполнены условия (3). Именно одновременное выполнение этих двух условий представляет главную сложность. Для достижения этих двух целей и появились блокированные множества. Мы предлагаем решение этой задачи без использования блокированных множеств.

2. Построение ортогональной масштабирующей функции.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Пусть N – натуральное число, p – простое. Под N -валидным деревом мы будем понимать дерево, ориентированное от листа к корню и удовлетворяющее следующим условиям:

- 1) корень и все вершины вплоть до $(N-1)$ -го уровня имеют значение равно нулю;
- 2) любой путь $(\alpha_k \rightarrow \alpha_{k+1} \rightarrow \dots \rightarrow \alpha_{k+N-1})$ длины $N-1$ присутствует в дереве ровно один раз; здесь $\alpha_i = 0, \dots, p-1$.

Выберем N -валидное дерево T и будем строить по нему масштабирующую функцию.

- 1) По дереву T строим новое дерево $\tilde{T}$ следующим образом. Заменяем последовательность из N нулей, заканчивающуюся корнем дерева, на одну вершину со значением $(0_N, 0_{N-1}, \dots, 0_1)$. Все вершины $(N+1)$ -го уровня дерева T теперь связаны с этой вершиной в дереве $\tilde{T}$. Она является корнем дерева $\tilde{T}$. Без изменения связей переобозначаем остальные вершины. Если в дереве T с вершины α_N начинался путь из N элементов в направлении к корню

$$\alpha_N \rightarrow \alpha_{N-1} \rightarrow \dots \rightarrow \alpha_1,$$

то в новом дереве $\tilde{T}$ данная вершина будет иметь значение, равное N -мерному вектору $(\alpha_N, \alpha_{N-1}, \dots, \alpha_1)$. В силу условия N -валидности дерева T каждому такому вектору в дереве $\tilde{T}$ соответствует единственная вершина. Также, если мы обозначим $\text{height}(T) = H$, $\text{height}(\tilde{T}) = \tilde{H}$, то очевидно $\tilde{H} = H - N + 1$.

2) Теперь по дереву $\tilde{T}$ строим граф Γ . Каждую вершину $\bar{\alpha}_N = (\alpha_N, \alpha_{N-1}, \dots, \alpha_1)$ дерева $\tilde{T}$ свяжем со всеми вершинами низшего уровня, имеющими вид $(\alpha_{N-1}, \dots, \alpha_1, \alpha_0)$, т.е. первые $N - 1$ элементов этой вершины совпадают с последними $N - 1$ элементами вершины $\bar{\alpha}_N$. Вершины, с которыми вершина $\bar{\alpha}_N$ связана, мы будем обозначать $(\alpha_{N-1}, \dots, \alpha_1, \tilde{\alpha}_0)$. То есть $\alpha_0 \in \{\tilde{\alpha}_0\}$ тогда и только тогда, когда вершина $\bar{\alpha}_N$ связана с вершиной $(\alpha_{N-1}, \dots, \alpha_1, \alpha_0)$ в графе Γ .

3) Обозначим

$$\lambda_{\alpha_{-N}, \alpha_{-N+1}, \dots, \alpha_{-1}, \alpha_0} = |m_0(G_{-N}^\perp r_{-N}^{\alpha_{-N}} r_{-N+1}^{\alpha_{-N+1}} \dots r_{-1}^{\alpha_{-1}} r_0^{\alpha_0})|^2.$$

Если вершина $(\alpha_{-N}, \alpha_{-N+1}, \dots, \alpha_{-1})$ в графе Γ связана с вершинами

$$(\alpha_{-N+1}, \alpha_{-N+2}, \dots, \alpha_{-1}, \tilde{\alpha}_0)$$

то значения маски определяем так, чтобы

$$\sum_{\tilde{\alpha}_0} \lambda_{\alpha_{-N}, \alpha_{-N+1}, \dots, \alpha_{-1}, \tilde{\alpha}_0} = 1, \quad \lambda_{\alpha_{-N}, \alpha_{-N+1}, \dots, \alpha_{-1}, \alpha_0} = 0 \quad \text{для всех} \quad \alpha_0 \notin \{\tilde{\alpha}_0\}. \quad (4)$$

Также определим $m_0(G_{-N}^\perp) = 1$, откуда следует, что $\lambda_{0,0,\dots,0} = 1$.

Чтобы сформулировать основной результат, введем дополнительные обозначения. Сначала заметим, что условие (3) ортонормированности системы сдвигов функции $\varphi(x)$, можно переписать в следующем виде: для любых $\alpha_{-N}, \alpha_{-N+1}, \dots, \alpha_{-1} = 0, \dots, p - 1$,

$$\begin{aligned} 1 &= \sum_{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{M-1}=0}^{p-1} |\widehat{\varphi}(G_{-N}^\perp r_{-N}^{\alpha_{-N}} \dots r_{-1}^{\alpha_{-1}} r_0^{\alpha_0} \dots r_{M-1}^{\alpha_{M-1}})|^2 \\ &= \sum_{\alpha_0=0}^{p-1} \lambda_{\alpha_{-N}, \alpha_{-N+1}, \dots, \alpha_0} \sum_{\alpha_1=0}^{p-1} \lambda_{\alpha_{-N+1}, \alpha_{-N+2}, \dots, \alpha_1} \dots \sum_{\alpha_{M-2}=0}^{p-1} \lambda_{\alpha_{M-N-2}, \alpha_{M-N-1}, \dots, \alpha_{M-2}} \\ &= \sum_{\alpha_{M-1}=0}^{p-1} \lambda_{\alpha_{M-N-1}, \alpha_{M-N}, \dots, \alpha_{M-1}} \lambda_{\alpha_{M-N}, \alpha_{M-N+1}, \dots, \alpha_{M-1}, 0} \dots \lambda_{\alpha_{M-1}, 0, \dots, 0}. \end{aligned} \quad (5)$$

Теперь зададим последовательность N -мерных массивов

$$A^{(n)} = (a_{i_1, i_2, \dots, i_N}^{(n)})_{i_1, i_2, \dots, i_N=0}^{p-1}$$

рекуррентно через их элементы:

$$a_{i_1, i_2, \dots, i_N}^{(0)} = \lambda_{i_1, i_2, \dots, i_N, 0} \lambda_{i_2, i_3, \dots, i_N, 0, 0} \dots \lambda_{i_N, 0, \dots, 0}, \quad (6)$$

$$a_{i_1, i_2, \dots, i_N}^{(n)} = \sum_{j=0}^{p-1} \lambda_{i_1, i_2, \dots, i_N, j} a_{i_2, i_3, \dots, i_N, j}^{(n-1)}. \quad (7)$$

Мы будем говорить, что элемент массива $a_{i_1, i_2, \dots, i_N}^{(s)}$ соответствует вершине $(i_1, i_2, \dots, i_N)$. Пользуясь новыми обозначениями, условие ортонормированности (5) можно переформулировать в следующем виде.

Система сдвигов по функции $\varphi(x) \in \mathfrak{D}_M(G_{-N})$ будет ортонормированной тогда и только тогда, когда для любых $i_1, i_2, \dots, i_N$ имеем $a_{i_1, i_2, \dots, i_N}^{(M)} = 1$; иными словами, когда массив $A^{(M)}$ состоит только из единиц.

ЛЕММА 1. В массиве $A^{(0)}$ на местах, соответствующих вершинам уровня $s \leq N$ в дереве $\tilde{T}$, стоят единицы.

ЛЕММА 2. Пусть по N -валидному дереву T построены дерево $\tilde{T}$, граф Γ и определены значения маски $m_0(\chi)$ так, как указано в равенствах (4). Пусть $(A^{(n)})_{n=0}^\infty$ – последовательность массивов, определяемая равенствами (6) и (7). Тогда в массиве $A^{(n)}$ элементы, соответствующие вершинам уровня $s \leq N + n$ в дереве $\tilde{T}$, равны единице.

Из этих лемм сразу следует

ТЕОРЕМА. Пусть по N -валидному дереву T построены дерево $\tilde{T}$, граф Γ и определены значения маски $m_0(\chi)$ так, как указано в равенствах (4). Пусть $\tilde{H} = \text{height}(\tilde{T})$. Тогда равенство

$$\widehat{\varphi}(\chi) = \prod_{k=0}^{\infty} m_0(\chi \mathcal{A}^{-k}) \in \mathfrak{D}_{-N}(G_M^\perp)$$

определяет ортогональную масштабирующую функцию $\varphi(x) \in \mathfrak{D}_M(G_{-N})$, причем $M \leq \tilde{H} - N$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Обозначим через Φ_N совокупность функций $f_N: \{0, 1, \dots, p-1\}^N \rightarrow [0, 1]$ и выберем функцию $\Lambda \in \Phi_{N+1}$. Функцию Λ можно рассматривать как $(N+1)$ -мерный массив $\Lambda = (\lambda_{i_1, i_2, \dots, i_N, i_{N+1}})$. Тогда равенства (7) определяют дискретную динамическую систему $\Lambda: \Phi_N \rightarrow \Phi_N$, а равенство (6) задает начальную точку траектории. Теорема указывает класс дискретных систем Λ , у которых траектория, выходящая из начальной точки (6), имеет неподвижную точку.

В заключение отметим роль авторов в подготовке настоящей статьи. Теорему при $N = 1$, $p = 3$ получил Лукомский, при $N = 1$ и произвольном p – Крусс, при любых N и p – Бердников.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] В. Протасов, Ю. Фарков, *Матем. сб.*, **197**:10 (2006), 129–160. [2] Ю. Фарков, *УМН*, **62**:6 (2007), 189–190. [3] В. Протасов, *Матем. сб.*, **198**:11 (2007), 135–152. [4] Ю. Фарков, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **69**:3 (2005), 193–220. [5] Ю. Фарков, *Матем. заметки*, **82**:6 (2007), 934–952. [6] S. Lukomskii, *Trees in Wavelet Analysis on Vilenkin Groups*, arXiv:1303.5635. [7] С. Лукомский, *Докл. РАН*, **457**:1 (2014), 24–27. [8] S. Lukomskii, G. Berdnikov, *N-Valid Trees in Wavelet Theory on Vilenkin Groups*, arXiv:1412.3096. [9] S. Lukomskii, *J. Fourier Anal. Appl.*, **20**:1 (2014), 42–65.

С. Ф. Лукомский

Саратовский государственный
университет им. Н. Г. Чернышевского
E-mail: LukomskiiSF@info.sgu.ru

Поступило
17.01.2015

Г. С. Бердников

Саратовский государственный
университет им. Н. Г. Чернышевского
E-mail: evrointelligent@gmail.com

Ю. С. Крусс

Саратовский государственный
университет им. Н. Г. Чернышевского
E-mail: KrussUS@gmail.com